PAPPI ALEXANDRINI
COLLECTIO.

PAPPI ALEXANDRINI
COLLECTIO.

PAPPI ALEXANDRINI
COLLECTIONIS
QUAE SUPERSUNT

E LIBRIS MANU SCRIPTIS EDIDIT
LATINA INTERPRETATIONE ET COMMENTARIIS
INSTRUXIT

FRIDERICUS HULTSCH.

VOLUMEN I.

INSUNT LIBRORUM II III IV V RELIQUIAE.

BEROLINI
APUD WEIDMANNOS
MDCCCLXXVI.

PRAEFATIO.

Pappi Alexandrini collectionem mathematicam, cuius codices manu scripti neque rari erant nec fere ignoti, nonnulli iam viri docti in publicum edere cogitaverunt, pauci etiam incohaverunt; nec tamen ea vel consilia vel operis initia quisquam perduxit ad finem. Ac mihi quidem, cum primum studiorum tirocinio peracto ipse iam, quantum in me esset, operam aliquam Graecis litteris navare institui, Pappi reliquias ex tenebris minime meritis in lucem vindicare animo erat fixum et destinatum; sed anno demum 1864, postquam Heronis geometrica et quaecunque alia id genus elaboranda erant absolvi, viam hanc difficilem et arduam ingredi suscepi, qua tandem tot veterum mathematicorum theoremata ac problemata splendidissima, a Pappo collecta aucta illustrata, communem eruditorum in usum proponerem.

Nec defuerunt fausta statim ab initio auspicia. Nam cum de incepto meo consuluissem Theodorum Mommsen, qui insigni sua et humanitate et auctoritate nunquam petenti mihi deesse voluit, ab eoque quaesivissem, an forte in Italia, maximeque in bibliotheca Vaticana Pappi codex antiquior servaretur, quoniam Parisini reliquique tum noti essent recentissimi, ille mihi audivisse se respondit a Curtio Wachsmuth cum alios mathematicorum libros tum Pappi codicem Romae inspectos esse. Quem cum ea de re litteris adiissem, rescripsit mihi meminisse se quidem vetustum ac spectabilem Pappi codicem in Vaticana latere, sed certiorem eius rei nuntium ab ADOLPHO KIESSLING me impetraturum esse. Nec spes fefellit; nam egregia comitate hic mihi indicavit Pappi codicem ceteris, ut iam tum videbatur, multo praestantiorem, quem postmodum omnium reliquorum archetypum esse cognovi. Sed priusquam Romam ad excutiendum eum librum me conferrem, continuus Graecus textus ex aliis codicibus describendus et quaedam quasi praevia editio paranda erat. Quam operam aestate anni 1865 exigere licuit, postquam Parisiis et Lugduno Batavorum ii libri manu scripti, quos inprimis adire necesse erat, ad me missi sunt. Iam proximo anno illius quem dixi Vaticani partem priorem Romae cum meis schedis contuli, tum redux in patriam, quidquid praeterea ad edendum scriptorem opus erat, congerere coepi. Sed intercessit Polybii edendi munus non minus gratum mihi ac vix minore temporis spatio praeparatum. Quo absoluto id iam agere instituebam, ut Pappi editio, cum tamdiu in cunabulis quasi iacuisset, suis iam pedibus in publicum prodire valeret. Attamen id fieri non potuit nisi subsidiis quibusdam subministratis, unde honestissimus bibliopola sumptus ac periculum edendi libri paucorum in manus venturi facere auderet.

Itaque feliciter et peroptato contigit, ut ACADEMIA LITTERARUM REGIA BORUSSICA, adsentiente et iubente MINISTERIO SUPREMO REGIO, quod rebus sacris et medicinalibus atque institutioni publicae praeest, tantam pecuniam ad Pappum edendum concederet, quanta pro paucitate eorum qui librum empturi essent contribuenda videretur. Cuius insignis liberalitatis elogium ut nunc ego gratissimo animo refero, ita, si quid opera mea quantulacunque profectum erit, multos harum litterarum studiosos gratiis a me actis spero adstipulaturos esse.

DE CODICIBUS MANU SCRIPTIS.

Quoniam de aetate, qua Pappus collectionem suam composuisse videatur, ac de titulo operis in tertio volumine disputandum erit, hoc loco restat ut de apparatu et copiis, unde haec profluxit editio, paucis exponam. Est Romae in bibliotheca Vaticana Graecus liber manu scriptus CCXVIII membraneus, saeculi XII, ex quo reliqui, quotquot adhuc ita innotuerunt, ut de eorum origine iudicari posset, descripti aut, intermediis aliis, derivati sunt. Cuius priorem partem usque ad V libri finem anno 1866, ut modo dictum est, ipse contuli; tum reliqua rogatu meo sedulo excusserunt AUGUSTUS WILMANNS et HUGO HINCK; denique libri VII capita 212—290, cum haec quidem schedarum pars non pervenisset ad me in itinere amissa, iterum cum editione Gerhardti a. 1873 contulit AUGUSTUS MAU, qui etiam scholia, quae sunt in margine, describenda, operam magni admodum laboris ac paene taedii, suscepit. Praeterea et Hinckius, qui, dum Romae erat, quaecunque ego absens interrogabam de iis summa comitate respondere non cessabat, et Augustus Mau, denique etiam LUDOVICUS MENDELSSOHN locos nonnullos, si qua in progressu operis dubitatio mihi incidisset, iterum in codice Vaticano inspexerunt.

Prima libri Vaticani folia occupat ἀνθεμίου περὶ παραδόξων μηχανημάτων fragmentum, recentiore manu scriptum; tum a folio tertio manus saeculi XII Pappi collectionem inde a verbis γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι ita exarare incepit, ut iam in archetypo, unde librarius haec descripsit, initium Graeci contextus defuisse appareat. Verum propria insuper labes in ipsum Vaticanum invasit, cum ad imos foliorum margines interiores humore ac situ scriptura passim evanuerit. Iam cum iisdem locis codices recentiores omnes lacunarum hiatus ostendant, hos ex ipso Vaticano, non ex ullo vetustiore codice derivatos esse manifesto constat. Itaque hi libri, nisi forte coniecturas probabiles exhibent, nullo sunt pretio, nulla auctoritate. Quibus emendandi studiis iam in Vaticano plures manus incubuerunt, eaque opera continuata est in Parisino 2440 cum laudabili diligentia, passim etiam prospero eventu. Pauca correcta sunt in Parisino 2368, quo e libro Scaligeranus et, ut videtur, Vossianus originem duxerunt. Hi autem quos postremo dixi codices singulari dignitate excellunt propter recentiorum virorum doctorum emendationes ibi perscriptas. Nam ille quem nota V^2 significavi vir fuit et in mathematicis satis versatus et dictionis, qua Graeci eius disciplinae auctores uti solent, peritissimus. Scripsit autem notas suas aut antequam Commandinus Pappi interpretationem Latinam in lucem protulit, aut, si forte postea, non inspecto hoc libro, id quod et multis testimoniis, quae in adnotationem meam criticam congessi, confirmatur, neque utriusque consensu infringitur; namque in mathematicis rebus duos viros artis ac rationis peritos idem, quod verum est, idque eadem Graeca appellatione expressum, invenire et omnino veri est simile et interdum paene necessarium. Sed eum de quo dicimus ignotum virum doctum non fuisse Raemundum Massacum, a quo codicem Vossianum Petavio a. 1599 dono datum esse subscriptio docet (v. infra p. XIV), efficitur mea quidem sententia ex diversis litterarum ductibus. An forte fuerit Petavius, aliis relinquo diiudicandum. Alter autem codex, quem Scaligeranum vocamus, insigni splendore enitet propter plurimas Scaligeri emendationes (hunc enim auctorem esse constat ex catalogo bibliothecae Lugduno-Batavae p. 339; atque id ipsum confirmatum vidi alio Scaligeri chirographo, quod mihi in manibus fuit). Hae quoque notae, quae nunc demum ex obscuritate diuturna in lucem prodeunt, saepius conveniunt cum Commandini coniecturis; tamen neutrum horum quidquam petivisse ab altero tam manifestum est, ut singillatim id demonstrare supersedeam.

Ex his quos commemoravi codicibus anno 1865 per paucos menses uti mibi licuit Parisino 2440, saeculi XV, et Lugdunensibus Scaligerano Vossianoque, quos libros summi illarum bibliothecarum curatores in manus meas tradi benevole concesserunt. Ac Scaligeranum quidem totum partim descripsi partim cum fragmentis, quae tum iam edita erant, contuli; Parisini maiorem partem usque ad libri sexti finem excussi, reliqua quae propter temporis angustias ipse absolvere non potuissem, secundum Waitzii apographum, de quo statim dicturus sum, pertractavi. Vossiani minorem tantum partem conferre licuit; tamen e toto codice, quaecunque ad editionem meam utilia esse viderentur, excerpere non omisi.

Et antiquissimo exemplo Vaticano et Parisino libro 2440 simillimi sunt ceteri qui Parisiis publice servantur. E quibus codex 2368 anno 1562 exaratus, de quo supra dictum est, 2369 (qui partem libri tertii continet), 2370 a. 1646 exaratus, 583 (in quo liber octavus exstat) innotuerunt mihi e Theodori Waitzii apographo, quod, quamdiu hac editione occupatus eram, manibus tenere et inspicere mihi licuit viduae Waitziae beneficio, quae illas schedas Guilelmo Borchardto mittendas mihi tradidit. Itaque et matronae illi spectatissimae et huic viro in omni mathematicae doctrinae genere splendidissimo, quod primum de eo apparatu certiorem me fecerit et postea saepius in ea re operam suam comiter praestiterit, singulares hic ago gratias. Ad libri secundi reliquias, quas Waitzius non descripserat, usui fuerunt notae e codice Parisino 2368 excerptae a G. G. Bredowio in Epistolis Parisiensibus (Lipsiae 1812) p. 180—183.

In edendo fragmento illo, quod in nostra editione inde a libri VIII capite 19 legitur, Vincentius praeter Parisinum 2368 adhibuit eiusdem bibliothecae codicem 2871 et supplementi 15. Hos quoque communem cum ceteris recentioribus originem habere ex notis a Vincentio adscriptis partimque in hac editione repetitis satis apparet.

Liber Graecus, quo Commandinus usus est, proxime accedit ad Parisinum 2440, sed ita quidem, ut non ex hoc ipso, sed ex alio simillimo descriptus esse videatur (v. adnot. ad p. 88, 9. 92, 19 sq. 94, 2. 96, 4—6 et 7. 98, 2 et 6. 118, 8. 132, 18 etc.). Sic hoc quoque apographum redit ad communem fontem qui in bibliotheca Vaticana adhuc latuit.

Non diversus ab his recentioribus codicibus, et qui non minus certa vestigia originis e Vaticano deductae prae se ferret, fuit Argentoratensis ille, cuius aliquam notitiam Camererus de tactionibus p. 19—32 patefecit. Quibus in notulis nihil ex eo codice, quod ad contextum emendandum valeret, nihil omnino proprium aut peculiare afferri potuit.

Codicibus Parisinis simillimi sunt duo Oxonienses Saviliani (citati etiam in Fabricii bibliotheca ed. Harles vol. IX p. 171), e quibus Pappi libri VII propositionem 70 edidit Horsley, Apollonii inclin. p. 18—21. Ac maxime quidem cum Parisino 2368 consentit ille quem "alterum" appellat Horsleius; magis ad Parisinum 2440 accedit prior Savilianus, sed idem multis propriis vitiis inquinatus est ac neutiquam "eximii" appellatione, quam Horsleius ei tribuit, dignus. Eosdem Savilianae bibliothecae codices Halleius, et alterutrum Wallisius adhibuisse videntur in edendis iis Pappi fragmentis, de quibus infra (p. XIX. XXI) exponetur. Certe nihil e suis codicibus hi duo viri doctissimi protulerunt, quod non communem cum reliquis libris recentioribus originem proderet. Neque aliter iudicandum est de eo codice, qui "noster MS^{tus}" a Meibomio in dialogo de proportionibus appellatur, unde hic libri VII propositiones 232—234 edidit.

Ambrosiani codicis 266, praeter Parisinos 2440 et 2368, mentionem facit Gerhardtus (infra p. XIX). Ac librum quidem Pappi septimum editor ille, quem minus alto silentio de ea re uti optandum erat, ex alterutro Parisino repetivisse videtur, ex alio autem codice nescio quo Pappi librum octavum. Qua in parte quae sint codicis menda quaeque aliis ex causis orta (omnino sane haud pauca), nostrum non est scrutari; satis videtur hoc unum affirmare, in omni Gerhardti editione nihil usquam inveniri, quod codicum subsidium indicet diversum ab una illa familia, quae e Vaticano propagata est.

Guelferbyti cum anno 1864, edendis scriptoribus metrologicis intentus, per paucos dies commorarer, inspexi Gudianum Graec. 7, qui Pappi collectionis libros III—VI ac partem septimi continet, quem in idem genus atque omnem recentiorum gregem referendum esse facile apparuit. Testis est praeterea G. G. Bredow, qui in Epistolis Parisiensibus (Lipsiae 1812) p. 187—200 libri III extremam partem, quae est de duplicatione cubi (cap. 96—104) ex eodem codice edidit.

Praeterea commemoro Urbinatem Graec. 72, saeculi XVI, in quo liber septimus exstat, quem Romae inspexi et eiusdem, quam totiens dixi, familiae esse cognovi, neque tamen conferre potui.

Neapolitani codicis bibliothecae Borbonicae, qui ex Vaticano 218 descriptus esse videatur, brevem mentionem fecit Adolphus Kiessling ea in epistula de qua supra dixi.

De codice Vaticano, quo Torellius se usum esse dicit, infra (p. XX sq.) paucis exponam.

Vindobonensis codex suppl. LXV, saeculi XV, post Heronis pneumatica habet Pappi collectionis libros III—VI et septimi initium usque ad verba cap. 9 δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος μὲν * * *. Pauca ex hoc Graeca affert Kollarius in supplem. ad Lambecii commentarios de bibl. Vindob. p. 432—436; sed ea ipsa satis aperte huius libri cum reliquis recentioribus cognationem ac similitudinem declarant. Eiusdem bibliothecae codex suppl. LXVII, omnes reliquias quae in hac nostra editione exstant continens, descriptus est ex Parisino 2440 (v. Kollar. p. 440).

Quoniam igitur omnis scripturae antiquitus traditae unus fons atque archetypus est Vaticanus, quem nota A insignimus, reliqui codices propter emendationes tantummodo et coniecturas, si quae in iis occurrunt, respiciendi sunt. Ne multa, praeter Vaticanum, cuius auctoritate haec editio plane innititur, primariam ubique rationem habui codicis B, id est Parisini 2440, et quaecunque in eo a variis viris doctis correcta vel alioqui mutata sunt diligenter adnotavi, omisi autem apertos scribae errores. Reliquorum recentiorum instar omnium elegi Scaligeranum, atque una littera S non solum hunc ipsum codicem notavi, sed etiam alios recentiores aut consentire significavi, aut, si forte dissentirent, nihil mentione dignum ex iisdem enotandum fuisse. Tamen, ubicunque opus esse videbatur, Vossianum (V) et Commandini codicem, rarius Parisinos 2368 et 2369 diserte citavi.

Sequitur codicum ac notarum conspectus. Est igitur

A = cod. Vaticanus Graecus 218, cuius in scriptura distinxi

- A^1 = ipsius librarii manum antiquam, ubicunque haec praeter continuum textum ad primarios calami ductus, idque in medio describendi negotio, aut addidit aliquid aut correxit,
- A^2 = manum suppletricem, ipsam quoque antiquam et eandem fortasse atque A^1, quae nonnulla in describendo omissa, ex archetypo denuo collato inseruit, plurima praeterea correxit,

A^3 = manum scholiastae, qui et scholia quaedam passim margini adscripsit et fere librorum titulos ac subscriptiones addidit, multa etiam emendavit,

A^4 = recentiorem aliquam manum nec crebram nec satis ad emendandum idoneam, a qua differt alia, ut videtur, manus recentior, quam

A rec. significavi. Vaticanum sequitur

B = Parisinus 2440, in quo similiter distinxi

B^2 = ipsius librarii manum correctricem,

B^3 = manum cuiusdam correctoris mathematicorum non ignari et qui ad aliud exemplum librarii B apographum exigeret ac passim eam scripturam restitueret quae in Vaticano exstat,

B^4 = aliam eiusmodi, sed nullo codicis subsidio (praeter ipsum B) innitentem.

Has diversas manus separavi in adnotationibus ad eam Pappi collectionis partem, quam ipse cum codice B contuli; sed ad librum septimum et octavum a Waitzio variae eiusdem codicis scripturae rarissime adnotatae sunt, neque quidquam nisi hoc, alteram scripturam primariam esse, alteram secundariam, tradi solet. Ergo in hac operis parte B non tam ipse est Parisinus quam Waitzii apographum, passim, ut cognovi, ab archetypi ductibus paulo aberrans; et praeterea nota tantummodo B^c (qua scilicet correctum esse in codice aliquid significaretur) afferri potuit. Sequitur

S = Lugduno-Batavus Scaligeranus 3 fol., cuius nota, sicut modo (p. XII) demonstratum est, alios quoque recentiores codices comprehendere solet. Quorum e numero compendiis scripturae notati sunt

V = Lugduno-Batavus Vossianus 18 fol., duabus diversis manibus, sed ex uno codice archetypo, qui Parisino 2368 fuit simillimus, descriptus, cuius extremo folio haec leguntur "Amico integerrimo simul et Doctiss. viro D. paulo petavio in suprema curia Senatori Raemundus massacus Dono dedit tertio nonas Novembres 1599", tum

V^2 = vir doctus qui scholia nonnulla adscripsit et menda permulta correxit, denique

cod. *Co* = codex Commandini ab ipso citatus.

Accedunt hae notae:

| significat versus exitum in codice A,

/ spatia singularum litterarum, quae in eodem libro evanuerunt (supra p. VII),

· spatia singularum litterarum, ubi recentiorum codicum librarii propter evanidam in A scripturam, vacuo spatio relicto, lacunas notaverunt.

* in Graeco contextu lacunam, in adnotatione singulas litteras in A erasas indicat.

• notae codicis adiectum significat dubitationem de scriptura quae silentio tantum, ut aiunt, confirmatur.

( ) in contextu scriptoris pro vulgari usu parentheseos signa sunt. Iidem uncini in adnotatione litterae codicis recentioris circumscripti, velut (B), declarant huius quidem codicis scripturam eandem esse atque eius, cuius nota ante uncinos posita est, sed nullam fidem praestari de spiritu vel accentibus vel ι subscripto vel ν ἐφελκυστικῷ vel exeunte vocis οὕτως sigma vel etiam de linea super litteras geometricas ducta. Namque ipsius Vaticani, id est archetypi, scriptura diligenter enotata aliorum codicum in his minutiis varietatem adiungere plerumque inutile erat et supervacaneum.

[ ] interpolatorum additamenta notant, quos inter uncinos, sicubi etiam hi ( ) comparent, interpolatis iam verbis ab altero infelicis istius industriae aemulo aliud insuper interpretamentum insertum esse videtur.

Super litteras geometricas et notas numerorum, ubicunque nihil adnotatum est, in A lineam transversam ductam esse putato. Varietatem autem ubique adscripsi, etiamsi de distinctione tantummodo vel coniunctione litterarum agebatur, velut pro A B, quod expressum sit in contextu, Vaticanum habere $\overline{AB}$, atque alia id genus nusquam sciens equidem commemorare omisi.

Quaecunque verba Graeco contextui coniectura sunt inserta, ea diversis litteris exprimenda curavi, item cursivis litteris in Latina interpretatione quidquid perspicuitatis causa ipse addidi.

VIRORUM QUI PAPPI FRAGMENTA EDIDERUNT VEL INTERPRETATI SUNT CONSPECTUS.

Sequuntur nomina vel nominum notae virorum doctorum, quorum emendationes, coniecturae, interpretationes frequentius laudandae fuerunt.

Breton = *Recherches nouvelles sur les Porismes d'Euclide, par M. P. Breton (de Champ)*, in annalibus qui inscribuntur *Journal de mathématiques pures et appliquées publié par*

J. Liouville, tome XX, année 1855, p. 209—304. Edita sunt adhibitis codicibus Parisinis 2368 et 2440 Graeca huius editionis libri VII cap. 13—20; eadem in Francogallicum sermonem conversa voluminis citati pag. 211—218. Tum Bretonus Pappi lemmata (libri VII cap. 193—232) liberius in eundem sermonem convertit, quibus inde a pag. 247 varia ad explicandam porismatum rationem addidit. Denique appendicis instar pag. 299—303 propositiones de locis planis, quas Pappus (VII cap. 23—26) breviter affert, adiunctae sunt. Atque iteratis etiam curis omnem quaestionem quae est de porismatis Bretonus tractavit in iisdem annalibus *Deuxième série, tome II, année 1857,* p. 185—205, et *tome III, année 1858,* p. 89—142. Equidem in hac editione primum Bretoni tractatum secundum singulas paginas citavi, eas autem quae secutae sunt disputationes et controversias hoc loco semel commemoravisse satis fuerit.

Ca = Apollonii de tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita a Ioanne Guilielmo Camerer, Gothae 1795, et *Apollonius von Pergen ebene Oerter. Wiederhergestellt von Robert Simson. Aus dem Lateinischen übersezt von Johann Wilhelm Camerer,* Lipsiae 1796. Quorum librorum prior continet huius editionis libri VII cap. 11. 12. 158—184, alter libri VII cap. 21—26. 185—192. De ratione critica quam in libro de tactionibus tenuerit sic disserit auctor p. 19 sq.: "In edendis his lemmatibus, quae nunc primum, e duobus codicibus bibliothecae olim Regiae Parisiensis, codice nempe 2368 et 2440 descripta, collato etiam alio codice, qui Argentorati in bibliotheca Academica servatur, Graeco sermone prodeunt, ita versatus sum, ut, si unus saltim codex lectionem commodam haberet, eam amplecterer, neglecta prorsus inepta reliquorum lectione, si vero nullus omnino lectionem haberet, quae intelligi posset, meo sensu plerumque lectionem restituerem, indicata tamen in margine msptorum lectione, si dubius essem, dubia pariter in margine notarem". Prorsus iisdem codicum subsidiis eademque ratione critica in altero libro, qui reliquias de locis planis continet, Camererus usus est (vide illic praef. p. VI sq.)

Chasles = *Les trois livres de porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la notice et les lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions; par M. Chasles, Paris* 1860. Francogallico sermone vel liberius expressa vel in brevius contracta sunt quae in hac Pappi editione libri VII cap. 13—20. 193—232 leguntur. Praeterea quaecunque vir acutissimus ad restituendos Euclidis libros porismatum contulit, ea ex Pappi reliquiis se repetivisse ipse commemorat p. 86. Invenit autem suo ingenio porismata CCXXI, id est aliquanto plura quam ipse Euclides, siquidem verba quae VII cap. 20 extr. leguntur: *τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων — θεωρημάτων ἐστὶν ρογ'* sine numeri errore tradita et, id quod mihi quidem dubium videtur, ab ipso Pappo scripta sunt.

Co = Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Fed. Commandino Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae, Venetiis apud Franciscum de Franciscis Senensem, 1589 et (quod ad calcem legitur) Pisauri apud Hieronymum Concordiam 1588. Eadem editio nullo nisi primo folio mutato paulo post repetita est sub hoc titulo: Fed. Commandini — commentaria in libros octo mathematicarum collectionum Pappi Alexandrini — ad Seren. Franciscum Mariam II. Urbini Ducem, Pisauri apud Hieron. Concordiam 1602. Itaque cum tres editiones commemoret Fabricius in biblioth. Graeca (vol. IX p. 173 ed. Harles), quae Pisauri 1588, Venetiis 1589, Pisauri 1602 prodierint, pro illis haec una tantum quam statim attulimus numeranda est. Alteram editionem Carolus Manolessius Bononiae a. 1660 in publicum emisit incredibili paene cum ignorantia ac temeritate. Qui cum statim in titulo iactaverit Commandini commentarios ab innumeris, quibus scaterent, mendis, et praecipue in Graeco contextu, diligenter vindicatos esse, et in praefatione gloriose addiderit emaculatiorem aut diligentiorem editionem nullam hac sua fieri posse, tamen nec quidquam quod dignum mentione esset sua industria addidit et Graecas scripturas a Commandino plerumque recte, interdum mediocri cum errore enotatas ad immanes corruptelas detorsit et hoc re vera assecutus est, ut maculatior aut indiligentior editio vix ulla cogitari possit. Sed redeo ad Commandinum, qui quam egregie de Pappo meritus sit, ut in re manifesta, non opus est demonstrare. Neque solum ad theoremata et problemata, quae in hanc collectionem congesta sunt, interpretanda atque illustranda laudabilissimam operam attulit, sed etiam Graeca verba totiens et tam feliciter emendavit, ut, si pares aemulos habuisset eos qui secuti sunt fragmentorum editores, Pappi contextum qui legi posset iamdudum haberemus. Correxit autem vel ipsa Graeca verba, scriptura codicis sui diserte allata, vel tacite in interpretatione pro Graecis corruptis posuit emendata Latina. Itaque ubicunque postea ab alio editore id Graece expressum est quod Latine significaverat Commandinus, illum quidem, ut par erat, citavimus, sed simul eius emendationis auctorem esse Commandinum adiunximus. Contra si eiusdem coniecturas Latina interpretatione significatas non recepimus, eas tamen verbis "voluit *Co*" in Graecum sermonem translatas apposuimus in adnotatione.

Ei = *Πάππου συναγωγαί.* Pappi Alexandrini collectiones mathematicae nunc primum Graece edidit Herm. Ios. Eisenmann. Libri quinti pars altera. Parisiis 1824. Tractatum de solidorum corporum comparationibus, i. e. libri V capita 33—105, omissa accentuum notatione, exhibet editor uno subsidio codicis Parisini 2368 usus, cuius nonnullos errores emendavit, plurimos retinuit, quosdam etiam mirum in modum auxit. Multae deprehenduntur lacunae, quae, si codicem Parisinum 2440 inspicere non libebat, ex Commandini saltem versione expleri poterant, multa libero arbitrio eoque vix unquam felici mutata sunt, omnino, quamvis Graeca edita sint, tamen hic liber multo longius abest a vera Pappi scriptura quam Commandini versio Latina.

Ge = *Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Griechisch und deutsch herausgegeben von C. J. Gerhardt, zweiter Band, Halle* 1871, continet librum septimum et octavum. Quibus libris manu scriptis editor usus sit, incertum est, nisi forte e notula ad pag. 216 codices Parisinos 2368 et 2440 inspectos esse licet concludere. Praeterea pag. 300 Ambrosianus 266 ab editore commemoratur (conf. supra p. X sq.)

Ha = Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo ex Arabico MSto latine versi. Accedunt eiusdem de sectione spatii libri duo restituti. Praemittitur Pappi Alexandrini praefatio ad VII^{mum} collectionis mathematicae, nunc primum graece edita: cum lemmatibus eiusdem Pappi ad hos Apollonii libros. Opera et studio Edmundi Halley, Oxonii 1706, et: Apollonii Pergaei conicorum libri IV priores cum Pappi Alexandrini lemmatis ex codd. MSS. Graecis edidit Edmundus Halleius, Oxoniae 1710. Horum Halleii egregiorum operum prius continet huius editionis libri VII cap. 1—67, alterum eiusdem libri cap. 233—311. In praefatione ad libros de sectione rationis, "Pappi", inquit, "praefationem non antehac graece, immo vix latine editam operibus hisce praemisi; pristinae integritati, quoad eius fieri potuit, restitutam e duobus codd. MSS. bibliothecae Savilianae. Verum, ut ingenue fatear, manum adhuc medicam postulat. Nam ut Graeca Pappi in hisce codicibus saepiuscule luxata sunt et depravata, praecipue in descriptione porismatum Euclidis (ubi nihil fere sani occurrit), ita in plerisque absurda adeo et insulsa erat Commandini versio, ut necesse habuerim aut passim eam emendare aut aliam de novo conficere". Ex iisdem codicibus Pappi ad Apollonii conica lemmata primus edidit.

Haumann = *Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Perga von den Berührungen, von C. G. Haumann, Breslau* 1817. Graece repetita sunt ea quae Camererus libro de tactionibus (v. supra p. XVI) ediderat.

Horsley = Apollonii Pergaei inclinationum libri duo. Restituebat Samuel Horsley. Oxonii 1770. Graece edita sunt huius editionis libri VII cap. 27. 28. 126.

Hu = editoris emendationes vel coniecturae.

Sca = notae quas Scaliger inter lineas vel ad marginem sui codicis (v. supra p. VIII) adscripsit.

Simson = Apollonii Pergaei locorum planorum libri duo restituti a Roberto Simson, Glasguae 1749. Ex Hallei libris de sectione rationis ea quae in hac editione libri VII cap. 21—26 leguntur repetita partimque emendata sunt e codicibus Parisinis 2368 et 2440 a Iacobo Moor collatis (v. illic praef. p. X). Praeterea Pappi ad hos Apollonii libros lemmata (in hac editione libri VII cap. 185 sqq.) Latino sermone expressa Simsonus Apollonio suo restituto inseruit ac nonnulla ita correxit, ut ipse Graecus contextus inde emendari posset. Item uberrimi fructus redundarunt ex Apollonii sectionis determinatae et porismatum libris ab eodem viro subtilissimo restitutis in volumine quod inscribitur "Roberti Simson opera quaedam reliqua post auctoris mortem in lucem edita cura Iacobi Clow. Glasguae 1776", quibus libris etsi Graeca non edidit, tamen ad restituenda genuina Pappi verba formulasque plurimum contulit.

To = Iosephi Torelli Veronensis geometrica, Veronae 1769. Edita sunt p. 89—96 Pappi libri IV capita 45—52 ex "Vaticanae bibliothecae codice mss.," ut ipse ait praef. p. XIII. Qui codex num idem fuerit ac noster A, propterea difficilius est iudicatu, quia, si forte Torellius aliter quid adnotet ac nos in A invenimus, id vel illius errore vel vitio apographi, quod ille exarandum curaverit, factum esse videatur. Attamen in paucis paginis tot et tantae discrepantiae a Torellio afferuntur, ut codicem Vaticanum, quo ille usus est, alium ac nostrum A fuisse veri sit simillimum. Itaque nos non omnem istam variam scripturam in hanc editionem recepimus; nam quaecunque in illo Vaticano ab A discrepant ex describendi neglegentia originem duxerunt ideoque nulla sunt auctoritate.

Vincent = *Considérations sur les Porismes en général et sur ceux d'Euclide en particulier. Examen et réfutation de l'interprétation donnée par M. Breton (de Champ) aux textes de Pappus et de Proclus relatifs aux Porismes. Par A. J. H. Vincent.* Etenim cum Vincentius in annalibus qui *La Science* inscribuntur contra Bretoni de porismatis commentarium disputare instituisset, plura ab utroque diversis iudiciis in medium prolata sunt; denique Vincentius, quaecunque de hoc argumento prius scripserat, ea subtilissime retractavit eo quem statim attuli commentario, qui prodiit in *Journal de mathématiques pures et appliquées publié par Liouville, deuxième série, tome IV, année 1859,* p. 9—46. Praeterea de Pappo optime meritus est Vincentius edito mechanicorum fragmento, de quo in adnotatione ad libri VIII cap. 19 commemoratum est.

Wa = Iohannis Wallis operum mathematicorum volumen III, Oxoniae 1699. Cuius voluminis pag. 597—610 Wallisius Pappi libri secundi reliquias iteratis curis edidit, postquam primum a. 1688 eas in lucem emiserat. Ibidem p. 570—572 et 578—580 inter Aristarchi Samii de magnitudinibus solis et lunae propositiones insertum est fragmentum Pappi sexti libri cap. 69—79. Quo codice usus sit, sic breviter commemorat editor p. 596: "Cum itaque inter codices manuscriptos ab . . . Henrico Savilio bibliothecae mathematicae in usum professorum suorum datos inciderim iam dudum in Pappi codicem MS. Graecum, qui continet non tantum Pappi librum tertium cum sequentibus, sed secundum etiam, non quidem integrum, sed ipsius partem non contemnendam, ex qua de reliquo iudicium fiat: facturum me putabam opus mathematicis haud ingratum, fragmentum illud ex MS. erutum tunc primum anno 1688 in lucem mittere".

Quaecunque alii viri docti ad Pappi reliquias emendandas passim attulerunt, ea suis quaeque locis in adnotatione citata sunt plenis librorum titulis adscriptis.

DE INTERPRETATIONE LATINA.

Interpretationem Latinam ita conformare studui, ut ab huius aetatis et mathematicis et philologis, etiamsi in Graecae dictionis mathematicae proprietate minus versati essent, commode intellegi posset. Ergo, quantumcunque Graecus scriptor, servato utique vetusti sermonis colore, concessurus esse videbatur, formulas recentioris consuetudinis adhibui vel eas, primum Graecis verbis strictius translatis, postmodum apposui. Praeterea et in indice, qui partem tertii voluminis occupabit, omnia vocabula mathematica illustravi, et statim in ipsa interpretatione vel in adnotationibus, ubi opus erat, explicavi; pauca, quae longiorem disputationem requirerent, ad appendicem item tertio volumini inserendam reieci. Omnino autem nunquam et Graecum et veterem mathematicorum scriptorem a me edi et illustrari oblitus sum, et, quidquid mea coniectura addendum esse videretur, his me continui finibus, ut aut aliorum veterum scriptorum theoremata ad singulos Pappi locos utilia, ubicunque inveniri possent, citarem, aut, si non invenirentur et tamen Pappum eorum rationem habuisse constaret, ex ipsa veterum mathematicorum arte ac disciplina restituere conarer. Plurima etiam illustrare contigit hac ratione, ut demonstrationem a Graeco scriptore in brevius contractam, interpositis eis quae ille tacite suppleri vellet verbis vel sententiis, planam et perspicuam redderem.

DE QUIBUSDAM GRAECORUM MATHEMATICORUM FORMULIS.

Denique ne quis in dicendi genere saepissime apud Pappum obvio atque a nostra dictione alieno haesitet, hic breviter, quas formulas in proportionum latissimo usu Graeci mathematici adhibere soleant, explicare propositum est.

Ex Euclidis praeceptis (elem. 5 def. 13—17) proportio $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ has variationes subire potest:

ἐναλλάξ, i. e. *alterna ratione* sive *vicissim* (quod plerique etiam *permutando* dicere consueverunt), $\alpha : \gamma = \beta : \delta$,

ἀνάπαλιν, i. e. *inversa ratione* sive *e contrario*, $\beta : \alpha = \delta : \gamma$

συνθέντι sive **κατὰ σύνθεσιν**, i. e. *componendo* sive *per compositionem*, $\alpha + \beta : \beta = \gamma + \delta : \delta$,

διελόντι sive **κατὰ διαίρεσιν**, i. e. *dirimendo* sive *per diremptionem* (vulgo *dividendo* et *divisione rationis* dicere solent), $\alpha - \beta : \beta = \gamma - \delta : \delta$,

ἀναστρέψαντι, i. e. *convertendo*, $\alpha : \alpha - \beta = \gamma : \gamma - \delta$.

Similiter quaenam fiant, si sit $\alpha : \beta \gtrless \gamma : \delta$, cum Euclides omiserit demonstrare, addit Pappus VII propos. 3 sqq.

Porro secundum elem. 5 propos. 12 et 19, si rursus ponatur $\alpha : \beta = \gamma : \delta$, additione vel subtractione sunt

$$\alpha \pm \gamma : \beta \pm \delta = \alpha : \beta = \gamma : \delta,$$

quae ratio vocabulis *συναμφότερος* sive *ὅλος*, et in subtractione adiectivo *λοιπός* significari solet.

Schema **δι' ἴσου** sive *ex aequali* secundum elem. 5 defin. 18 et propos. 22 hoc est. Si sit

$$\alpha : \beta = \delta : \varepsilon, \text{ et}$$
$$\beta : \gamma = \varepsilon : \zeta, \text{ hinc efficitur}$$
$$\alpha : \gamma = \delta : \zeta.$$

Similiter συνημμένος sive συγκείμενος λόγος, quam nos *formulam compositae proportionis* diximus, efficitur multiplicatis inter se duabus proportionibus. Velut si sit

$\alpha : \beta = \delta : \varepsilon$, et

$\beta : \gamma = \zeta : \eta$, erit

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\delta \cdot \zeta}{\varepsilon \cdot \eta},$$

id quod pro veterum usu ex elem. 6 propos. 23 et 1 geometrica ratione concluditur.

Denique est formula μέγεθος μεγέθους δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, in datorum theorematis passim obvia, quam ad verbum interpretari Latine, quamvis languida et subobscura haec versio esset, necesse fuit. Hac igitur formula veteres auctore Euclide (dat. defin. 11) significant in proportione

$$\alpha - \gamma : \beta$$

non ipsas quidem magnitudines α et β datas esse, at datam et magnitudinem γ et proportionem $\alpha - \gamma : \beta$. Similiter ἔλασσον ἢ ἐν λόγῳ, sive $\alpha + \gamma : \beta$, explicandum est. Conf. Chasles *Aperçu historique* p. 8 versionis Germanicae, et Fr. Buchbinder *Euclids Porismen und Data*, programm. scholae Portensis a. 1866, p. 11.

Scribebam Dresdae d. XXVI m. Octobris a. MDCCCLXXV.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗ.

PAPPI ALEXANDRINI
COLLECTIONIS RELIQUIAE.

1 * γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι ἑκατοντάδος μετρεῖσθαι δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.

Ἔστωσαν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ν′ ν′ ν′ μ′ μ′ λ′· ἔσονται ἄρα οἱ πυθμένες ε′ ε′ ε′ δ′ δ′ γ′· ὁ ἄρα ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδων ͵ς. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων ἐστὶν ς′ καὶ μετρούμενον ὑπὸ τετράδος λείπει δύο, ἔσται ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς [τῶν δεκάδων] μυριάδων ἁπλῶν ἑκατόν. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν δεκάδων στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεὸν ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς στερεόν, αἱ ἄρα μυριάδες ρ′ ἐπὶ τὰς μονάδας ͵ς γενόμεναι ποιοῦσιν μυριάδας ξ′ διπλᾶς, ὥστε ὁ ἐκ τῶν ν′ ν′ ν′ μ′ μ′ λ′ στερεός ἐστιν μυριάδων ξ′ διπλῶν.

2 ιε′. Ἔστωσαν δὴ πάλιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐφ᾽ ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρείσθω δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα τοὺς ἀριθμούς.

Γεγονέτω, καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους αὐτῶν μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος, καὶ ὑποκείσθω ὑπὸ ἕκαστον τῶν Β ἑκατοντὰς ἡ α′, καὶ καθὸ μετρεῖται ἕκαστος τῶν Β

---

1. ἐλάσσονος ASV, corr. BV² 2. αυτὸν (sine spir.) A, corr. BS 4. οἱ — μ′ λ′ add. *Wa* 5. οἱ πυθμένες ante 4. ἔσονται ἄρα ABS, transposuit *Hu* 6. μονάδων BS, $\overset{o}{\mu}$ A 7. ς′ *Wa* pro $\overline{\kappa\varsigma}$ 8. τῶν δεκάδων del. *Hu* 9. τῶν δεκάτων A, corr. BS 11. μονάδας BS, $\overset{o}{\mu}$ A γινόμεναι V¹ *Wa* 12. $\overline{\nu\nu\nu\mu}$ $\overline{\mu}$ $\overline{\lambda}$ A (S), distinxit B 14. ιε′ add. *Hu*, ις′ *Wa* δὲ *Wa* ὅσοι δήποτε οὖν AB, corr. S 18. Γεγονέτω add. *Hu* 20. τῶν $\overline{\beta}$ S*Wa*, τῶν δύο AB utroque loco

Pappi Alexandrini collectionis libri II reliquiae.

(*Vide commentarios appendicis loco adiunctos.*)

* nam *supponitur* eos *numeros* minores esse centenario Prop. 14 *)
et per denarium divisibiles, et oporteat solidum *numerum* ex iis *productum* dicere, neque tamen ipsos multiplicare.

Sint igitur numeri 50 50 50 40 40 30; erunt igitur numeri fundamentales 5 5 5 4 4 3, qui inter se multiplicati efficiunt 6000. Et quia decades sunt numero 6, qui numerus si per 4 dividitur, *prodit quotiens 1 et* restant 2, solidus *numerus* ex his *decadibus* productus erit 100 myriadum simplicium. Et quoniam productum ex decadibus multiplicatum cum producto ex numeris fundamentalibus efficit productum ex numeris qui ab initio *propositi sunt*, myriades igitur 100 cum 6000 multiplicatae efficiunt duplas myriadas 60, *sive* $60 \cdot 10000^2$.

XV. Sit iterum quotcunque numerorum series β, singuli Prop. 15
autem *numeri* sint minores quam 1000 et divisibiles per 100, et oporteat solidum *numerum* ex his *productum* dicere, neque tamen *singulos* numeros multiplicare[1]).

Factum iam sit, et *quaeratur,* quot *sint singuli numeri; quot autem sunt, hic ipse* numerus duplicatus sit primum per 4 divisibilis, et sub quemque seriei β *numerum* ponatur 100,

*) Hanc propositionem quintam decimam numerat *Wa* et sic porro reliquas, praeter codicis A auctoritatem.

1) Nonnulla in hac propositione itemque in demonstratione obscuriora videntur, quia et priores Pappi propositiones et Apollonii liber, qui de hac numerorum doctrina scriptus erat, perierunt. Tamen commentarii instar habendae sunt propositio, quae sequitur, decima septima et aliae deinceps. Praeterea conf. append. ad hanc propos.

ὑπὸ τῆς ἑκατοντάδος ἔστωσαν οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ· πυθμένες ἄρα εἰσὶν οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β. ὁ δὲ διὰ τῶν πυθμένων στερεὸς ἔστω ὁ Ε [τουτέστιν μονάδες ρκ']. δείκνυται οὖν διὰ τῶν γραμμῶν ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β στερεὸς μυριάδων διπλῶν ρκ, ἐπειδὴ καὶ ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β στερεὸς ἴσος ἐστὶν τῷ διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεῷ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεόν, τουτέστιν διπλῆ μυριὰς α' ἐπὶ τὰς ρκ' μονάδας.

3 Ἀλλ' ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β μὴ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος· μετρούμενος ἄρα λείψει δυάδα ἐξ ἀνάγκης (τοῦτο γὰρ προδέδεικται), ὥστε καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενος ὑπὸ τετράδος· τὸ ἄρα πλῆθος τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενον ὑπὸ δυάδος λείψει μίαν ἑκατοντάδα. ὁ τοίνυν διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεὸς ἔσται μυριάδων ρ' ὁμωνύμων τῷ Ζ, τουτέστι διπλῶν, ὥστε δῆλον ὅτι ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β μυριάδες εἰσὶν ρ' ὁμώνυμοι τῷ Ζ γενόμεναι ἐπὶ τὸν Ε [τὰς ρκ' μονάδας]. γίνονται μυριὰς μία δισχίλιαι διπλῶν μυριάδων.

4 ις'. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ μὲν Α ὑποκείσθω ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, οἷον μονάδες φ', ὁ δὲ Β ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, οἷον μονάδες μ', καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.

---

1. οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ] οἱ C̅ AB[3], οἱ ς̅ B[1], οἱ σ̅ S, Γ (omisso οἱ) Wa, ἐφ' ὧν τὰ add. Hu 2. τὰ Γ Wa, τὰ C̅ (C̅ super versum) A, τὰ σ̅ B[3]S, τὰ (omisso σ̅) B[1] 3. πυθμένων — 5. ὁ διὰ τῶν om. A[1], add. A[2] in marg. (BS) 3. ὁ Ε Wa, ὁ Ι̅ A[2]B, ὁ δέκα S τουτέστιν μ̊ ρ̅κ̅ A[2], del. Hu 4. τὰ β̅ SWa, τὰ δύο AB, item vs. 6 8. μονάδας BS, μ̊ A 9. Ἀλλ' ὁ Hu pro ἀλλα (sine acc.) 10. post ἄρα add. κατὰ τὸν Ζ Wa (conf. adnot. ad Latina) 12. μετρούμενος Wa pro μετρεῖται, qui praeterea post ὑπὸ τετράδος addit κατὰ τὸν Ζ λείψει δυάδα (sed haec tacite intellegi voluit scriptor) 13. δυάδος Wa pro τετράδος 15. ὁμωνύμων τῷ Ζ Wa, ὁμωνύμωι Ν̅ A(B), ὁμωνύμων S 16. ρ' Wa pro δύο 17. τῷ Ζ Wa pro τῶι Ν̅ τὸν Ε Wa pro τὸν Ι̅ τὰς ρ̅κ̅ μ̊ A, del. Hu 18. γίνονται δὲ Wa, τουτέστιν coni. Hu 19. ις A[1] in marg. (BS) οἱ Α̅·Β̅ A (id est οἱ Α̅Β̅ correctum in οἱ Α̅ Β̅)
21. οἷον μονάδες φ̅ add. B Savilianus (οἷον μονάδων φ' add. V[2]), in A

et divisione per 100 facta existat series γ; ergo numeri seriei γ fundamentales sunt numerorum seriei β. Sit autem *numerus* solidus ex fundamentalibus *productus* ε. Jam lineari demonstratione[2]) ostenditur numeris seriei β inter se multiplicatis effici duplas myriadas 120, quoniam *numerus* solidus e numeris seriei β *productus* aequalis est solido ex centenariis *numero* multiplicato cum numero *producto* ex fundamentalibus, id est $= 10000^2 \cdot 120$.

Sed, *quot sunt singuli numeri* in serie β, horum numerus duplicatus ne sit divisibilis per 4; erit igitur $= 4\zeta + 2$; hoc enim antea demonstratum est, *ubi* ζ *significabat, quotuplae essent myriades*[3]). Itaque etiam centenariorum numerus duplicatus erit $= 4\zeta + 2$; ideoque ipse centenariorum numerus $= 2\zeta + 1$. Ergo solidus *numerus* e centenariis *productus* erit 100 myriadum potentiae ζ*), id est duplarum; itaque apparet productum ex numeris seriei β**) esse $= 100 \cdot 10000^{\zeta} \cdot \varepsilon$, id est $12000 \cdot 10000^2$.

XVI. Sint duo numeri α β, quorum prior ponatur minor quam 1000 et divisibilis per 100, velut 500, alter autem minor quam 100 et divisibilis per 10, velut 40, et oporteat solidum *numerum* ex his *productum* dicere, neque tamen ipsos multiplicare. Prop. 16

2) Graeca *δείκνυται οὖν διὰ τῶν γραμμῶν* sine dubio ad Apollonii librum spectant, non ad lineas quasdam cum notis maximam partem corruptis in codice adscriptas, e quibus nulla demonstratio concinnari potest. Quapropter nos, perinde ac Wallisius, eas figuras repetere omisimus; probabilem autem descriptionem restituimus in appendice.

3) Numerus igitur singulorum numerorum seriei β ponitur *περισσός* sive impar, qui duplicatus si per 4 dividitur, restant 2, quotiens autem ζ significat myriadis potentiam; ergo, si $\zeta = 2$ ponitur, sunt *μυριάδες διπλαῖ* $= 10000^2$.

*) Ergo illa quam ex Graecis effecimus formula $2\zeta + 1$, cum centenarii numeri supponantur, significat $(100^2)^{\zeta} \cdot 100$; habes igitur in nuce, ut aiunt, ipsam logarithmorum doctrinam.

**) Vide append. ad hanc propositionem.

---

sex septemve litterae erasae 22. *δεκατος* (sine acc.) et Δ super *τ* A[1] *μονάδες* $\bar{\mu}$ B (*μονάδων* $\bar{\mu}$ S), β $\tilde{\mu}$ A 23. *ἀριθμὸν*] *στερεὸν* *Wa* (debuit *τετράγωνον*)

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν· οἱ γὰρ ε′ δ′ πυθμένες αὐτῶν ὄντες [μο. ε′ καὶ μο. δ′] πολλαπλασιασθέντες ποιοῦσι μονάδας κ′, χιλιάκις δὲ ὁ κ′ ἀριθμὸς ποιεῖ μυριάδας δύο ποιούσας τὸν ὑπὸ τῶν Α Β γινόμενον. τὸ δὲ γραμμικὸν δῆλον ἐξ ὧν ἔδειξεν Ἀπολλώνιος.

5 ιζ. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιη′ θεωρήματος. Ἔστω πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ᾽ ὧν τὰ Α, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλο πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ᾽ ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς.

Ἔστωσαν γὰρ πυθμένες τῶν μὲν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α οἱ ἐφ᾽ ὧν τὰ Η, μονάδες α′ καὶ β′ καὶ γ′ καὶ δ′, τῶν δὲ ἐφ᾽ ὧν τὰ Β οἱ ἐφ᾽ ὧν τὰ Θ, μονάδες β′ καὶ γ′ καὶ δ′ καὶ ε′, καὶ ληφθέντος τοῦ ἐκ τῶν πυθμένων στερεοῦ [τῶν β′ γ′ δ′ β′ γ′ δ′ ε′], τουτέστιν τοῦ Ε, μονάδων ὄντος ͵βωπ′, τὸ πλῆθος τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α προσλαβὸν τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Β μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος [κατὰ τὸν Ζ, μετρεῖ δὲ αὐτούς]. καὶ δείκνυσιν ὁ Ἀπολλώνιος τὸν ἐκ πάντων τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β στερεὸν μυριάδων τοσούτων, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμωνύμων τῷ Ζ ἀριθμῷ, τουτέστιν τριπλῶν μυριάδων ͵βωπ′. [μία γὰρ μυριὰς ὁμώνυμος τῷ Ζ, τουτέστιν τριπλῆ, ἐπὶ τὸν Ε, τουτέστιν τὰ ͵βωπ′, γενομένη ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν στερεῶν ἀριθμὸν τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμώνυμοι τῷ Ζ ἀριθμῷ.]

6 Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν ἐφ᾽ ὧν τὰ Α, προσλαβὸν

---

1. οἱ γὰρ $\overline{EZ}$ A(BS), corr. *Wa* 2. μο $\overline{E}$ καὶ μο $\overline{\Delta}$ A, μονάδες $\overline{\varepsilon}$ καὶ μο′ $\overline{\delta}$ B (μονάδων $\overline{\varepsilon}$ καὶ μονάδων $\overline{\delta}$ S), del. *Hu* 3. μο $\overline{\varkappa}$ AB post μονάδας κ′ add. *Wa* οἱ δὲ ρ′ καὶ ι′ πολλαπλασιασθέντες ποιοῦσι χίλια 4. τῶν $\overline{AB}$ A, distinx. BS 4. 5. τὸ δὲ — Ἀπολλώνιος om. B¹ Savilianus (exstant in A Parisino 2368 SV, in B add. man. 2) 6. $\overline{\iota\zeta}$ A¹ in marg. (BS) ιη′ add. B² *Wa* ἀριθμῶν om. ABS, τῶν ἀριθμῶν add. *Wa* 8. τῶν ante ἀριθμῶν add. S *Wa* 9. τὸ (ante ἐφ᾽ ὧν) *Hu* pro τῶν,

Apparet autem, *si computatio* per numeros *fiat*. Nam numeri fundamentales 5 4 inter se multiplicati efficiunt 20, *et centenarius cum denario multiplicatus efficit 1000*, et 1000 · 20 sunt 2 myriades, id est productum e numeris α β. Linearis autem descriptio manifesta est ex Apollonii demonstratione [1]).

XVII. In *Apollonii* theorema XVIII. Sit series numerorum α, quorum singuli minores sint quam 100 et divisibiles per 10, et alia series numerorum β, quorum singuli minores sint quam 1000 et divisibiles per 100, et oporteat solidum *numerum* ex *numeris* serierum α β *productum* dicere, neque tamen ipsos multiplicare. Prop. 17

Etenim fundamentales numerorum seriei α comprehendantur serie η, *scilicet* 1 2 3 4, et fundamentales numerorum seriei β serie ϑ, *scilicet* 2 3 4 5, et sumpto solido *numero, qui* ex fundamentalibus *efficitur*, id est $\varepsilon = 2880$, *quaeratur, quot sint numeri in serie α quotque in serie β*; quot *autem* sunt in serie α et bis tot quot sunt in serie β, haec summa sit primum per 4 divisibilis, *sitque quotiens* ζ. Et demonstrat Apollonius solidum *numerum* ex omnibus *numeris* serierum α β *productum* myriadas potentiae ζ tot habere, quot sunt unitates in ε, id est $10000^3 \cdot 2880$. (*Hic vocetur primus propositionis casus.*)

Sed, quot sunt *numeri* in serie α et bis tot quot sunt

1) Vide append. ad hanc propos.

om. B Savilianus *μὲν* add. *Hu* 11. *τὰ* $\overline{AB}$ A, distinx. BS 13. *μ̊* ABS *τῶν δὲ* — 14. *γ' καὶ δ'* om. A[1], add. A[2] in marg. (BS) 13. *τῶν* $\overline{I}$ *δὲ* A[2]BS, corr. *Wa* 14. *μ̊* A[2]BS 15. 16. *τῶν* $\overline{B\Gamma\Delta}$ $\overline{B\Gamma\Delta E}$ AS, distinx. B, del. *Hu* 16. *μονάδων* S, *μ̊* A, *μονάδος* B $\overline{B\Omega\Pi}$ AB, *βωπ* S 17. *προσλαβὸν* *Wa* pro *προσλαβόντα* *διπλασιασονα* (sine acc.) A, alterum *ασ* expunxit prima manus 19. *κατὰ τὸν Z* — *αὐτοὺς* interpolatori tribuit *Hu* 20. *τὰ* $\overline{AB}$ A, distinx. BS, item posthac 21. 22. *ὁμωνύμων τῷ* *Wa* pro *ὁμώνυμοι* 22. *τριπλαῖς μ̊* A, *τριπλαῖς μ̈'* B (*τριπλαῖς μονάδες* S), *τριπλαῖ μυριάδες* *Wa*, corr. *Hu* $\overline{B\Omega\Pi}$ ABS, item vs. 24 23. *μία γὰρ* — 28. *ἀριθμῷ* interpolatori tribuit *Hu* 24. *τουτέστιν τὰ*] *γενομένη τὰ* ABS, *τουτέστι* (omisso *τὰ*) *Wa* 25. *τῶν* (post *ἀριθμὸν*) *Wa* pro *τὸν* 27. *μ̊* A *τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β, μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλειπέτω πρότερον ἕνα. καὶ συνάγει ὁ Ἀπολλώνιος ὅτι ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐφ' ἂν τὰ Α Β στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ δεκαπλασίων τοῦ Ε, ἐὰν δὲ τὸ προειρημένον πλῆθος μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλείπῃ δύο, ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ, ὅταν δὲ τρεῖς καταλειφθῶσιν, ἴσος ἐστὶν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς μυριάσιν τοσαύταις ὁμωνύμοις τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ.*

7 *ιη'. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιθ' θεωρήματος. Ἔστω τις ἀριθμὸς ὁ Α ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλοι ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐλάσσονες δεκάδος* οἷον οἱ Β Γ Δ Ε, *καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἰπεῖν.*

Ἔστω γὰρ καθ' ὃν μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῆς δεκάδος ὁ Ζ, τουτέστιν ὁ πυθμὴν τοῦ Α, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Ζ Β Γ Δ Ε στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις εἰσὶν οἱ Η.

Καὶ ἔστι φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν· τοῦ γὰρ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἰπεῖν, μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων γ' καὶ τοῦ Γ μονάδων δ' καὶ τοῦ Δ μονάδων ε' καὶ τοῦ Ε μονάδων ϛ', ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδες ͵ζσ'. ἀλλὰ καὶ τοῦ Ζ ὄντος μονάδων β', ὅς ἐστι πυθμὴν τοῦ Α, ὁ ἐκ τούτου καὶ τῶν Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις *γενόμενος ἔσται μονάδες ͵ζσ', ἴσος τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ. τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται.*

---

1. *μετρούμενον Wa* pro *μετρουμένων* 2. *συνάγει* idem, *συναγειν* (sine acc.) A (BS) 3. *ὁ* ante *ἐκ τῶν* add. *Hu* 4. *τῷ* add. *Hu* *ὅσος Wa* pro *ὅς* 5. *πλῆθος* S, *τὸ πλῆθος* AB[3], *πλῆθος τὸ* B[1] Savilianus 6. *ὁ* add. *Wa* 8. *οἱ* ante *ὁμώνυμοι* add. ABS, del. *Wa* 9. *ἐστὶν Wa* pro *ἔσται* 12. *$\overline{ιη}$* A[1] in marg. (BS) 14. *ὅσοις | δήποτ' οὖν* A, *ὅσοι*δήποτ' οὖν* B, corr. S *ἐλάσσονες* S, *ἔλαττον* AB[1], super quod *τες* (voluit *νες*) scripsit B[3] *οἷον οἱ* add. *Hu* 15. *Β Γ Δ Ε* add. *Wa* *ἐκ τῶν $\overline{ΑΒΓΔΕ}$* ABS, distinx. *Wa* 18. 19. *$\overline{ΖΒΓΔΕ}$* ABS,

in serie β, haec summa si per 4 dividatur, primum in divisione restet 1, *quotiens autem rursus sit* ζ. Et colligit Apollonius solidum *numerum* ex numeris serierum α β *productum* myriadas potentiae ζ tot habere, quot sunt unitates in numero ε decies ducto — *qui est secundus casus* —

sin autem eadem summa per 4 dividatur et restent 2, solidum *numerum* ex numeris serierum α β *productum* myriadas potentiae ζ tot habere, quot sunt unitates in numero ε centies ducto — *qui est tertius casus* —

si denique in divisione restent 3, solidum *numerum* aequalem esse tot myriadibus potentiae ζ, quot sunt unitates in numero ε millies ducto — *qui est quartus casus*[1]).

XVIII. In *Apollonii* theorema XIX. Sit numerus α minor quam 100 et divisibilis per 10, et alii quotcunque numeri minores quam 10, velut β γ δ ε, et oporteat solidum *numerum* ex α β γ δ ε *productum* dicere. Prop. 18

Sit enim, si α per 10 dividatur, quotiens ζ, id est fundamentalis numeri α, et sumatur solidus *numerus* ex ζ β γ δ ε *productus*, sitque η; dico esse $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \varepsilon = 10\,\eta$.

Et manifestum hoc est per numeros; nam si verbi causa ponatur $\alpha = 20$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = 5$, $\varepsilon = 6$, solidus *numerus* ex his *productus* fit 7200. Sed cum sit $\zeta = 2$ (qui est fundamentalis *numeri* α) solidus ex ζ et β γ δ ε *productus isque* decies ductus erit 7200, aequalis solido ex α β γ δ ε. Linearum autem ratio ab Apollonio demonstrata est[2]).

1) Linearem, quam Pappus solet dicere, descriptionem vide in append., et conf. Nesselmann, *die Algebra der Griechen*, Berolini 1842, p. 128 sq.

2) Vide append.

---

distinx. *Wa* 19. ὁ ante *διὰ* add. *Wa* 19. 20. $\overline{ΑΒΓΔΕ}$ ABS, distinx. *Hu*, similiter posthac 20. *δεκάκις ἐστὶν ὁ Η* coni. *Hu* 22. *μονάδων κ'* S, *μ̊* $\overline{Κ}$ A, *μονάδες* $\overline{κ}$ B *Wa* *μονάδων* $\overline{γ}$ S, *μ̊* $\overline{Γ}$ AB, *μονάδες* $\overline{γ}$ *Wa*, et similiter posthac 24. *μονάδες* $\overline{͵ζσ}$ *Wa*, *μ̊* $\overline{͵ΖΘ}$ AB[1], *μ̊* $\overline{͵ζσ}$ B[3], *μονάδων* $\overline{͵ζθ}$ S 25. *πυθμὴν τοῦ* $\overline{κ}$ *Wa* ὁ ante *ἐκ* add. *Hu*, utrumque om. *Wa* 26. *δεκάκις* add. B[3] *Wa* *ἔσται* in A super versum add. man. 1 27. *μ̊* $\overline{͵ΖC}$ AB, *μονάδων* $\overline{͵ζσ}$ S, corr. *Wa*

8 ιθ'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, ὧν ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Γ Δ Ε ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος ἔστω, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν Α Β πυθμένες οἱ Ζ Η· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς τοῦ ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεοῦ ἑκατονταπλάσιός ἐστιν.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων λ' καὶ τοῦ Γ μονάδων β' καὶ τοῦ Δ μονάδων γ' καὶ τοῦ Ε μονάδων δ' καὶ τοῦ Ζ μονάδων β' καὶ τοῦ Η μονάδων γ'· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεός ἐστιν μ^{α} ͵δυ', ὁ δὲ ὑπὸ Ζ Η Γ Δ Ε μονάδες ρμδ', οὗτος δὲ γενόμενος ἑκατοντάκις ποιεῖ μ^{α} ͵δυ'. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου.

9 κ'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ, καὶ ἔστω ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Δ Ε Ζ ἔστω ἐλάσσων δεκάδος, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ πυθμένες οἱ Η Θ Κ, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Η Θ Κ Δ Ε Ζ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεὸς ἴσος ἐστὶν χιλίοις τοῖς Ξ.

Ἔστι φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος λόγου χάριν μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων λ' καὶ τοῦ Γ μονάδων μ' καὶ τοῦ Δ μονάδων β' καὶ τοῦ Ε μονάδων γ' καὶ τοῦ Ζ μονάδων δ', τοῦ δὲ Η μονάδων β' καὶ τοῦ Θ μονάδων γ' καὶ τοῦ Κ μονάδων δ'· ὁ γὰρ ὑπὸ Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεός ἐστιν μυριάδων νζ' ἁπλῶν καὶ μονάδων ͵ϛ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Η Θ Κ πυθμένων καὶ τῶν Δ Ε Ζ ἔσται μονάδων φοϛ', αὗται δὲ χιλιάκις γενόμεναι, τουτέστιν ὁ ἐκ πάντων στερεός, γίνεται μυριάδων ἁπλῶν νζ' καὶ μονάδων ͵ϛ.

10 κα'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν πλείους τριῶν οἱ Α Β Γ Δ Ε,

---

1. ιθ' add. B³S   οἱ add. *Wa* $\overline{ΑΒ}$ A, distinx. BS   ἕκαστος *Wa*   3. $\overline{ΓΔΕ}$ ABS et similiter posthac, distinx. *Hu*   6. ὁ add. *Wa*   9. μονάδων $\overline{κ}$ S, μ̊ $\overline{Κ}$ AB   μονάδων λ'] μ̊ $\overline{Λ}$ AS, μ̊ $\overline{λ}$ B   9—11. μ̊ $\overline{Β}$ et similiter posthac AB, μον'' $\overline{β}$ etc. S.   12. μ̊ ͵δυ ὁ δὲ, id est μυριὰς ἁπλῆ etc., B³ in rasura, μ̊ ˘Δ δύο δὲ A, μονάδων χ̄ι ͵$\overline{δ}$ δύο δὲ S, μυ-

XIX. Sed sint duo numeri $\alpha\ \beta$, quorum uterque minor sit quam 100 et divisibilis per 10, et alii numeri $\gamma\ \delta\ \varepsilon$, quorum quisque minor sit quam 10, et oporteat solidum *numerum* ex *$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ productum* dicere. Prop. 19

Sint enim *numerorum* $\alpha\ \beta$ fundamentales $\zeta\ \eta$; dico esse $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon = 100\ \zeta\cdot\eta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$.

Hoc quoque manifestum est per numeros, cum sit $\alpha = 20$, $\beta = 30$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 4$, $\zeta = 2$, $\eta = 3$. Est enim $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon = 14400$, et $\zeta\cdot\eta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon = 144$. Linearum autem descriptio ex Apollonii *libro repetenda est.*

XX. Sed sint tres numeri $\alpha\ \beta\ \gamma$, quorum quisque minor sit quam 100 et divisibilis per 10, quisque autem *numerorum* $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ sit minor quam 10, et sint *numerorum* $\alpha\ \beta\ \gamma$ fundamentales $\eta\ \vartheta\ \varkappa$, et sumatur productum ex $\eta\ \vartheta\ \varkappa\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$ sitque ξ; dico esse $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta = 1000\ \xi$. Prop. 20

Manifestum est per numeros, cum verbi causa sit $\alpha = 20$, $\beta = 30$, $\gamma = 40$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 3$, $\zeta = 4$, tum $\eta = 2$, $\vartheta = 3$, $\varkappa = 4$. Nam productum ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$ est 576000, productum autem ex fundamentalibus $\eta\ \vartheta\ \varkappa$ et $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ erit 576.

XXI. Sed sit *numerorum* plus trium series $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ Prop. 21 *)

*) Propositio XXI et XXII ab interpolatore quodam, qui numerum huius libri propositionum Apollonianis aequalem esse vellet, intersertae esse videntur; nam Pappus, etsi interdum impeditius et languidius, nunquam tamen inepte scribit aut leviter. In his autem, quae interpolata esse dico, nonnulla tam neglegenter scripta sunt, ut omnes emendandi conatus eludant.

ριὰς $\overline{α}$ μονάδες $\overline{,δυ}$, ὁ δὲ *Wa* τοῦ ante ὑπὸ add. *Wa* 12. 13. μ̊ $\overline{PM}$ A, μονάδες $\overline{ρμ}$ B, μονάδων $\overline{ρμ}$ S, corr. *Wa* 13. μ̊ $\overline{,δυ}$ B[3] partim in rasura, μ̊ ˘Δ $\overline{υ}$ A, μύρια $\overline{,δυ}$ S, μυριάδα $\overline{α}$ μονάδας $\overline{,δυ}$ *Wa* 15. $\overline{κ}$ A[1] in marg. (BS) οἱ om. *Wa* $\overline{ΑΒΓ}$ AB, distinx. S, item vs. 18 17. $\overline{ΔΕΖ}$ ABS, distinx. *Hu* ἐλάσσων *Hu* pro ἐλάττων δεκάδος add. *Wa* 18. $\overline{ΗΘΚ}$ AB, distinx. S. 19. $\overline{ΗΘΚ}$ $\overline{ΔΕΖ}$ et 20. $\overline{ΑΒΓ}$ $\overline{ΔΕΖ}$ ABS, distinx. *Hu* 22. λόγου in A add. man. 2 super vs. 23—26. μονάδων ubique S, μ̊ A, μονάδες vel μ̊' B 24. καὶ τοῦ $\overline{δ}$ μ̊' $\overline{β}$ add. B[3] (*Wa*) καὶ τοῦ $\overline{ε}$ BS, καὶ τοῦ $\overline{C}$ A 26. ὑπὸ $\overline{αβγδεζ}$ B, ὑπὸ $\overline{ΒΓΔ}$ $\overline{ΕΖ}$ AS 27. μυριάδων S, μ̊ AB μ̊ $\overline{,ς}$ AB 28. $\overline{ΗΘΚ}$ et $\overline{ΔΕΖ}$ ABS μονάδες $\overline{φος}$ B, μ̊ $\overline{ΦΟς}$ A 29. ὁ ἐκ πάντων vel ὁ ἐκ τῶν ΑΒΓΔΕΖ add. *Hu* 30. μυριάδων hoc loco etiam in AB plene scriptum est 31. $\overline{κα}$ A[1] in marg. (BS) $\overline{ΑΒΓΔΕ}$ AB[3]S, αβγδ B[1] *καὶ ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Ζ Η Θ ἕκαστος ἔστω ἐλάσσων δεκάδος.*

Τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε πρότερον μετρείσθω ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Ο, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ Δ Ε πυθμένες οἱ Κ Λ Μ Ν Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεὸς ἴσος ἐστὶν μυριάσιν ὁμωνύμοις τῷ Ο ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ στερεῷ τῷ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ.

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων ι' καὶ τοῦ Β μονάδων κ' καὶ τοῦ Γ μονάδων λ' καὶ τοῦ Δ μονάδων μ', καὶ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων ὄντων μονάδων α' καὶ β' καὶ γ' καὶ δ'· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεός ἐστιν ἁπλῶν μυριάδων κδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ μυριάδων ἁπλῶν ρμδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων μονάδων κδ'· οὗτος δὲ γενόμενος ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ, ὄντα μονάδων ς', ποιεῖ μονάδας ρμδ', ὅσαι μυριάδες ἁπλαῖ εἰσιν τοῦ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τετράδα ἅπαξ μετρεῖν τὸ πλῆθος *τῶν Α Β Γ Δ.*

11 *Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε μὴ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος· μετρούμενον δὴ ἤτοι α' ἢ β' ἢ γ' λείψει. εἰ μὲν οὖν ἕνα λείψει, ἔσται ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε* Ζ Η Θ *στερεὸς μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Ο, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ γενόμενος δεκάκις, εἰ δὲ δύο λείψει, ἑκατοντάκις [γενόμενος ὁ εἰρημένος στερεός]. εἰ δὲ τρεῖς λείψει, ὅσων ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ*

---

2. *ΖΗΘ* ABS 3. *ΑΒ ΓΔΕ* A, *αβγδε* BS, item proximo versu 4. 5. *καὶ ἔστωσαν — Κ Λ Μ Ν Ξ* post *δεκάδος* vs. 2. transponit *Wa* 5. *ΚΛΜΝΞ* ABS ac similiter posthac *ὁ* add. *Wa* 6. *τῷ Ο Wa* pro *τῶι σ μοναδες* (sine acc.) A(BS) 7. *στερεῷ Hu* pro *ἑτέρωι ἐκ τῶν ΚΛΜ* ABS, *Ν* add. *Wa* 10—12. *μονάδων* ubique S, *μ̊* A, *μ̊'* vel *μονάδες* B 12. *ὁ Wa*, *ὁ ἄρα Hu* pro *τῶν* 13. *τῶν* ante *ἁπλῶν* additum in ABS del. *Hu* *μυριάδων* S, *μ̈* AB, at proximo versu idem plene scriptum in AB (in A sine acc.), item vs. 17 *μυριάδες* 15. *μ̊* AB, item vs. 16 bis 18. 19. *τὸ καὶ τὸν Θ αὐτῆς μετρεῖ τοὺς ΑΒΓΔ* ABS (nisi quod B *τοῦ* prò *τοὺς*), *τὸ καὶ τὸν ο αὐτοῦ μετρεῖν τοῦ αβγδ* B[4], *τετράδα* corr. *Hu*, reliqua *Wa* 20. *κβ* hoc loco add. A[1]BS (conf.

$\varepsilon \ldots$[1]), quorum quisque minor sit quam 100 et divisibilis per 10, et *numerorum* $\zeta\ \eta\ \vartheta$ quisque minor sit quam 10.

Quot sunt *numeri* in serie $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots$, haec summa primum sit divisibilis per 4 sitque quotiens o, et sint *numerorum* $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots$ fundamentales $\varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi \ldots$; dico solidum *numerum* ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$ *productum* aequalem esse tot myriadibus potentiae o, quot unitates sunt in solido ex $\varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$ *producto.*

Manifestum hoc est ex numeris, cum verbi gratia sit $\alpha = 10$, $\beta = 20$, $\gamma = 30$, $\delta = 40$, $\zeta = 1$, $\eta = 2$, $\vartheta = 3$, et fundamentales $\varkappa = 1$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = 4$. Est igitur $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = 240000$, et $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \zeta \cdot \eta \cdot \vartheta = 1440000$, et $\varkappa \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \nu \cdot = 24$; est autem $24 \cdot \zeta \cdot \eta \cdot \vartheta = 24 \cdot 6 = 144$, quot sunt myriades simplices in producto ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \zeta\ \eta\ \vartheta$; *simplices autem myriades* (*id est potentiae 1*) *sunt,* quia $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ *quattuor numeri sunt, cuius* summae per 4 divisae quotiens est 1.

Sed quot sunt *numeri* in serie $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots$, haec summa ne sit divisibilis per 4; ergo in divisione restabit aut 1 aut 2 aut 3. Jam si primum 1 restabit, productum ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$ tot myriadas potentiae o continebit, quot *unitates* continet productum ex $\varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$ decies ductum; sin vero 2 restabunt, centies; si denique 3 restabunt, quot erunt *unitates* in producto ex $\varkappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$

1) Ternis punctis quotcunque numerorum seriem esse significavi. Eius modi seriem supra (propos. 15 et 17) *οἱ ἐφ' ὧν τὰ Α* etc. appellari vidimus; sed eadem, quae hoc loco, appellatio redit etiam in propos. 25, ubi nulla interpolationis suspicio subest. In exemplo autem, quod scriptor huius propositionis 21 fingit, satis habet seriem $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ proponere, ceteros casus nihil curans.

---

propos. 22) *μὴ* add. B⁴ *Wa* 21. *$\bar{\alpha}$ ἠ δύο ἠ τρεῖς* (*ἠ* sine acc.) A (S), corr. B *Wa* 22. *$\overline{ΑΒΓΔΕ}$* ABS, distinxit et *Ζ Η Θ* add. *Hu* (*ὁ ἐκ τῶν ΑΒΓΔΕ στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ΖΗΘ Wa*) 23. post *τῷ Ο* addendum esse videtur *τοσούτων* (*τοσαύτων*, incredibile visu, ante *μυριάδων* add. *Wa*) 24. *$\overline{ΚΛΜΝ}$* ABS, *Ξ* add. *Wa*, item vs. 26 post *Ζ Η Θ* add. *καὶ ὁ* ABS, del. *Wa* 25. *λείψει Hu* pro *λείπει* 25. 26. *γενόμενος — στερεός* del. *Hu* 26. *ὅσων* add. *Hu* ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ χιλιάκις γενόμενος ἔσται μονάδων, τοσούτων μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Θ. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον.

12 κβʹ. Ἔστω ὁ μὲν Α ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Β Γ Δ ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸν εἰπεῖν.

Κείσθω γὰρ τοῦ μὲν Α πυθμὴν ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Ε Β Γ Δ ὁ Ζ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸς ἑκατοντάκις ἐστὶν ὁ Ζ.

Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἰπεῖν, μονάδων τʹ καὶ τοῦ Β μονάδων γʹ καὶ τοῦ Γ μονάδων δʹ καὶ τοῦ Δ μονάδων εʹ· ὁ μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ ἐστὶν μ^α ͵η, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ε Β Γ Δ ἐστὶν μονάδων ρπʹ· οὗτος δὲ γενόμενος ἑκατοντάκις ἔσται μ^α ͵η. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον.

13 κγʹ. Ἐπὶ δὲ τοῦ κδʹ θεωρήματος. Τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων σʹ καὶ τοῦ Β μονάδων τʹ καὶ τοῦ Γ μονάδων βʹ τοῦ δὲ Δ μονάδων γʹ καὶ τοῦ Ε μονάδων δʹ, ὁ στερεὸς ἐξ αὐτῶν ἔσται μυριάδων ἁπλῶν ρμδʹ, ἐπεὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἅπαξ [κατὰ τὸν Κ], ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ Η πυθμένων καὶ τῶν Γ Δ Ε ἐστιν μονάδων ρμδʹ [ὁ Θ στερεός· ἁπλῶν οὖν μυριάδων ρμδʹ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερέος].

Ἐὰν δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μὴ μετρῆται ὑπὸ τετράδος, δῆλον ὅτι μετρούμενον κατὰ τὸν Κ λείψει δύο· τοῦτο γὰρ ἀνώτερον ἐδείχθη. διὰ δὴ τοῦτο [ἐκ τοῦ λείπεσθαι δύο] μυριάδες εἰσὶν ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς ὁ Θ ἴσος τῷ

---

1. *μονάδων* pro *μυριάδων* restituit et vs. 2 *μυριάδων* add. *Hu* 2. *τὸ* $\overline{O}$ A, corr. BS 4. *κβʹ* ex p. 12, 20 huc transponit *Hu*, *κγʹ* add. B 5. *δὲ* (ante *ὑπὸ*) *Wa* pro *μὲν* $\overline{ΒΓΔΕ}$ et 6. $\overline{ΑΒΓΔΕ}$ AB¹S, *E* del. B³ *Wa* 7. *ὁ δὲ Wa* pro *τῶι δὲ* 8. $\overline{ΕΒΓΔ}$ ABS ac similiter posthac 9. *ὁ* $\overline{ζ}$ B, $\overline{ΟΖ}$ A, $\overline{εζ}$ S *ὅτι* add. *Hu* 10. *καὶ* om. *Wa* 11. 12. *μονάδων* ubique S, *μ̊* A, *μ̊ʹ* vel *μονάδες* B 12. *ὑπὸ τῶν* (ante *Α*) om. *Wa* $\overline{ΑΒΓΔΕ}$ ABS, *E* del. B³ *Wa* *μ̊* ͵$\overline{η}$ (id est *μυριάδος ἁπλῆς* etc.) B³, *μ̊* ͵$\overline{Η}$ AB¹, *μονάδων* ͵$\overline{η}$ S, *μυριάδες* (sic) $\overline{α}$ *μονάδες* ͵η *Wa*, item

millies ducto, tot myriades potentiae o erunt in producto ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon \ldots \zeta\ \eta\ \vartheta$. Linearis autem descriptio ex libro elementari manifesta est.

XXII. Sit α minor quam 1000 et divisibilis per 100, et *numerorum* $\beta\ \gamma\ \delta$ quisque minor quam 10, et oporteat solidum *numerum* ex $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ *productum* dicere. Prop. 22

Ponatur enim *numeri* α fundamentalis ε, et $\varepsilon \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = \zeta$; dico esse $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = 100\ \zeta$.

Hoc quoque per numeros manifestum est, cum verbi causa sit $\alpha = 300$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = 5$. Est enim $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = 18000$, et $\varepsilon \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = 180$. Linearis autem descriptio ex libro elementari patet.

XXIII. In *Apollonii* theorema XXIV. Si verbi causa sit $\alpha = 200$, $\beta = 300$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$, $\varepsilon = 4$, productum ex his erit $10000 \cdot 144$, quoniam $\alpha\ \beta$ duo sunt *numeri centarii*, et duo duplicati ac per 4 divisi habent quotientem 1, et productum ex fundamentalibus $\zeta = 2$, $\eta = 3$, ac $\gamma\ \delta\ \varepsilon$ est unitatum 144. Prop. 23 *)

Sed quot sunt *numeri* in serie $\alpha\ \beta \ldots$, si haec summa duplicata non divisibilis sit per 4, ultra quotientem $\varkappa$ manifesto restabunt 2; id enim supra demonstratum est[1]. Quapropter sunt 100 myriades potentiae $\varkappa$; et ϑ, id est pro-

*) Haec quoque propositio eâ saltem, quae nunc exstat, compositione iustae suspicioni obnoxia est.

1) Conf. supra propos. 15 cum adnot. 3.

vs. 15 14. $\overset{\mu}{\beta}$ $\overline{P\Pi}$ AB 15. *γραμμι**κὸν* A, *δῆλον* add. *Wa* 16. $\overline{\varkappa\gamma}$ A¹ in marg. (S), $\overline{\varkappa\delta}$ B 17. 18. *μονάδων* ubique S, $\overset{\mu}{\beta}$ AB 19. *ἐπεὶ* *Hu* pro *ἐὰν* 20. *μετρῆται* S 21. *κατὰ τὸν K* del. *Hu* *ὁ δὲ* *Hu* pro *ὁ γὰρ* 21. 22. $\overline{ZH}$ — $\overline{\Gamma\Delta E}$ et similiter posthac ABS 22. *ἐστιν* *Hu* pro *ἔσται* $\overset{\mu}{\beta}$ AB *ὁ Θ* — 23. *στερεός* interpolatori tribuit *Hu* 22. *μυριάδων* add. *Wa* 24. *μετρεῖται* AB, corr. S 25. *δῆλονότι* (sic) A 26. *δὴ* om. *Wa* 27. *ἐκ τοῦ λείπεσθαι δύο* coni. et interpolatori tribuit *Hu*, *ἐκ τῶν* $\overline{\Lambda M}$ *δύο εκατοντάδων* A (BS), *ἐκ τοῦ λείμματος δύο ἤτοι ἑκατοντάδος* *Wa*, *ἐκ τῶν λειπομένων δύο ἑκατοντάδων* Bredow epist. Paris. p. 182 *ἑκατὸν* *Wa* pro *χιλίαι* 28. *ἴσος* — p. 16, 1. *στερεῷ* add. *Hu* ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεῷ ἐπὶ τὰς ἑκατὸν μυριάδας ὁμωνύμους τῷ Κ. τὸ γραμμικὸν ὡς Ἀπολλώνιος.

14 κδ΄. Ἐπὶ δὲ τοῦ κε΄ θεωρήματος. Ἔστω τῶν μὲν *Α Β* ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν *Γ Δ Ε* [ἔστω] ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν *Α Β* πυθμένες οἱ *Θ Κ*, καὶ τῷ ἐκ τῶν *Θ Κ Γ Δ Ε* στερεῷ ἴσος ἔστω ὁ *Λ*· ὅτι ὁ ἐκ τῶν *Α Β Γ Δ Ε* στερεὸς ἴσος ἐστὶν ἑκατὸν τοῖς *Λ*.

Ἔστι δὲ φανερὸν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ *Α* ὄντος μονάδων κ΄ καὶ τοῦ *Β* μονάδων κ΄, καὶ τοῦ *Γ* μονάδων ε΄ καὶ τοῦ *Δ* μονάδων ς΄ καὶ τοῦ *Ε* μονάδων ζ΄, καὶ τῶν *Θ Κ* πυθμένων ὄντων μονάδων β΄· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν *Θ Κ Γ Δ Ε* γίνεται στερεὸς μονάδων ωμ΄, οὗτος δὲ ἑκατοντάκις γενόμενος ἔσται μυριάδων η΄ μονάδων ͵δ, ἴσος τῷ ἐκ τῶν *Α Β Γ Δ Ε* στερεῷ ἀριθμῷ.

15 κε΄. Τὸ δ᾽ ἐπὶ πᾶσι θεώρημα κς΄ πρότασιν ἔχει καὶ ἀπόδειξιν τοιαύτην. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ἢ πλείους οἱ *Α Β*, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ ὁσοιδήποτε οἱ *Γ Δ Ε*, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλοι πάλιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ *Ζ Η Θ*, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν *Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ* στερεὸν εἰπεῖν.

Ἔστωσαν γὰρ τῶν *Α Β Γ Δ Ε* πυθμένες οἱ *Λ Μ Ν Ξ Ο*. ὁ δὴ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν *Α Β* μετὰ τοῦ τῶν *Γ Δ Ε* ἁπλοῦ ἀριθμοῦ ἤτοι μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἢ οὔ.

---

1. *ἐπὶ* B *Wa*, *ἐπεὶ* AS *τὰς ἑκατὸν Hu* (*ἑκατὸν Wa*) pro *χιλιας* (sine acc. A) 3. $\overline{\kappa\delta}$ A^1 in marg. (S), $\overline{\kappa\epsilon}'$ B 3. 4. *τῶν μὲν Α Β ἑκάτερος Hu*, *ὁ μὲν πρῶτος* AB^1S, *ὁ μὲν β΄* B^4, *ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ΑΒ Wa*, *ὁ μὲν πρῶτος Α ἐλασσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, ὁ δὲ δεύτερος Β ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος* cet. Nesselmann *Algebra der Griechen* p. 129 5. $\overline{\Gamma}$ $\overline{\Delta}$ $\overline{E}$ sic hoc loco recte distincta sunt in AS 6. *ἔστω* del. *Hu* 7—9. $\overline{AB}$ — $\overline{\Theta K}$ — $\overline{\Theta K\Gamma}$ $\overline{\Delta E}$ — $\overline{AB}$ $\overline{\Gamma\Delta E}$ et similiter posthac ABS 8. *ἔστω Wa* pro *ἔσται* 9. *στερεὸς* om. *Wa* *ἑκατὸν Wa* pro *χιλίοις* 10—14. *μονάδων* ubique S, $\overset{o}{\beta}$ A, $\overset{o}{\beta}'$ vel *μο-*

ductum ex $\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$, aequale est producto ex $\zeta\,\eta\,\ldots\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ multiplicato cum 100 myriadibus potentiae $\varkappa$.

XXIV. In *Apollonii* theorema XXV. Sit *numerorum* $\alpha\,\beta$ uterque minor quam 100 et per 10 divisibilis, et *numerorum* $\gamma\,\delta\,\varepsilon$ quisque minor quam 10, et oporteat solidum *numerum* ex his *productum* dicere. Prop. 24

Sint enim *numerorum* $\alpha\,\beta$ fundamentales $\vartheta\,\varkappa$, et $\lambda = \vartheta\cdot\varkappa\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$; dico esse $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon = 100\,\lambda$.

Manifestum autem est per numeros, cum sit $\alpha = \beta = 20$, et $\gamma = 5$, $\delta = 6$, $\varepsilon = 7$, et fundamentales $\vartheta = \varkappa = 2$. Est enim $\vartheta\cdot\varkappa\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon = 840$, qui numerus centies ductus erit $84000 = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon$.

XXV. Omnium autem ultimum *Apollonii* theorema habet hanc propositionem et demonstrationem [1]. Sint duo pluresve numeri $\alpha\,\beta\,\ldots$, quorum quisque minor sit quam 1000 et divisibilis per 100, et alii quotcunque numeri $\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\ldots$, quorum quisque minor sit quam 100 et divisibilis per 10, denique alii quotcunque numeri $\zeta\,\eta\,\vartheta\,\ldots$, quorum quisque minor sit quam 10, et oporteat solidum *numerum* ex $\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\ldots\,\zeta\,\eta\,\vartheta\,\ldots$ *productum* dicere. Prop. 25

Sint enim *numerorum* $\alpha\,\beta\,\ldots\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\ldots$ fundamentales $\lambda\,\mu\,\ldots\,\nu\,\xi\,o\,\ldots$, *et quaeratur quot sint numeri in serie* $\alpha\,\beta\,\ldots$, *quotque in serie* $\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\ldots$ Quot igitur *sunt* in serie $\alpha\,\beta\,\ldots$, *haec summa* duplicata unâ cum tot quot sunt in serie $\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\ldots$ aut divisibilis est per 4, aut non.

1) Vide append.

νάδες B 11. κ' (ante καὶ τοῦ B) Wa pro $\overline{\Gamma}$ 14. στερεὸς Wa pro ἀριθμὸς μονάδων ωμ'] $\overset{\beta}{\mu}$ $\overset{\beta}{\mu}$ $\overline{\omega\mu}$ A, $\overset{\beta}{\mu}$' $\overline{\omega\mu}$ B, μονάδων μυρίων $\overline{\omega\mu}$ S, μονάδες $\overline{\omega\mu}$ Wa ἑκατοντάκις Wa pro χιλιάκις 15. μυριάδες η μονάδες ͵δ Wa, $\overset{\beta}{\mu}$ $\overline{\omega\mu}$ A, $\overset{\beta}{\mu}$ $\overline{\omega\mu}$ B, μυριάδων $\overline{\omega\mu}$ S 17. κε' add. S 18. ἢ Wa pro οἱ 18. 19. οἱ $\overline{AB}$ ABS 20. ὅσοι δήποτε AB, ὁσοιδίποτε S, ὁσοιδηποτοῦν coni. Hu οἱ $\overline{\Delta\Gamma E}$ AB[1]S, corr. B[3] 21. μὲν add. Hu 22. ὅσοι δήποτ' οὖν AB, corr. S οἱ $\overline{ZH\Theta}$ et similiter posthac ABS 25. Ἔστωσαν Hu pro ἑκάστου 26. τοῦ πλήθους add. Hu μετὰ τοῦ Hu pro καὶ 27. ἁπλοῦ ἀριθμοῦ Hu, ἁπλῶς ἀριθμῶν ABS, ἁπλῶς ἀριθμῶν πλήθους Wa

Μετρείσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ, καὶ ὑποτετάχθωσαν τοῖς μὲν Α Β ἑκατοντάδες αἱ Π Ρ, τοῖς δὲ Γ Δ Ε δεκάδες αἱ Σ Τ Υ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα τοῦ πλήθους *τῶν Π Ρ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Σ Τ Υ μετρεῖται ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ]. καὶ φανερὸν ὅτι ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο* ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ. *εἰλήφθω δὴ ὁ ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο Ζ Η Θ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Φ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Κ ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ Φ. τοῦτο δὲ γραμμικῶς Ἀπολλώνιος ἀπέδειξεν.*

16 *Ἐὰν δὲ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Γ Δ Ε μὴ μετρῆται ὑπὸ τετράδος, μετρούμενος ἄρα κατὰ τὸν Κ λείψει ἢ ἕνα ἢ δύο ἢ τρεῖς. εἰ μὲν οὖν ἕνα λείψει, ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν δέκα ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ δύο, μυριάδες ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ τρεῖς, μυριάδες χίλιαι ὁμώνυμοι τῷ Κ. καὶ δῆλον ἐκ τῶν γεγραμμένων ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσος ὁ δεκαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ ἀριθμῷ, ἢ ὅσος ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ, ἢ ὅσος ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ.*

17 *Τούτου δὴ [τοῦ θεωρήματος] προτεθεωρημένου πρόδηλον, πῶς ἔστιν τὸν δοθέντα στίχον πολλαπλασιάσαι καὶ εἰπεῖν τὸν γενόμενον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ πρῶτον τῶν γραμμάτων ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ δεύτερον τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῆναι καὶ τὸν γενόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ τρίτον γράμμα καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς περαίνεσθαι μέχρι τοῦ διεξοδεύεσθαι τὸν στίχον, ὃν εἶπεν Ἀπολλώνιος ἐν ἀρχῇ [κατὰ τὸν στίχον] οὕτως.*

---

1. *μετρείσθω* A² ex *μετρεῖσθαι* 2. *αἱ Π Ρ Hu* pro *οἱ* $\overline{ΠΡ}$ 3. *αἱ Σ Τ Υ Hu* pro *οἱ* $\overline{CΤΥ}$ 3. *καὶ ὁ* — 5. *κατὰ τὸν Κ* interpolatori tribuit *Hu* 3. 4. *τοῦ πλήθους* add. *Wa* 5. 6. *ἐκ τῶν* $\overline{CΠΡ}$ $\overline{CΤΥ}$ ABS, prius C del. *Wa* 6. *ἴσος* — 7. *στερεῷ* add. *Wa* 10. *μονάδες* plene scriptum in AS, *μ̊* B 13. *μετρῆται Hu* pro *μετρεῖται*

Sit primum divisibilis per 4 et quotiens $\varkappa$, et substituantur *numeris* $\alpha\ \beta \dots$ centenarii $\pi\ \varrho \dots$, et *numeris* $\gamma\ \delta\ \varepsilon \dots$ denarii $\sigma\ \tau\ \upsilon \dots$ Et apparet productum ex $\pi\ \varrho \dots \sigma\ \tau\ \upsilon \dots$ multiplicatum cum producto ex $\lambda\ \mu \dots \nu\ \xi\ o \dots$ aequale esse producto ex $\alpha\ \beta \dots \gamma\ \delta\ \varepsilon \dots$ Iam sumatur productum ex $\lambda\ \mu \dots \nu\ \xi\ o \dots \zeta\ \eta\ \vartheta \dots$, sitque φ; dico productum ex $\alpha\ \beta \dots \gamma\ \delta\ \varepsilon \dots \zeta\ \eta\ \vartheta \dots$ tot myriadas potentiae $\varkappa$ habere, quot sunt unitates in φ. Hoc autem per lineas demonstravit Apollonius.

Sed quot *sunt numeri* in serie $\alpha\ \beta \dots$, si *haec summa* duplicata unà cum tot quot sunt in serie $\gamma\ \delta\ \varepsilon \dots$ non sit divisibilis per 4, in divisione igitur ultra quotientem $\varkappa$ restabunt aut 1 aut 2 aut 3. Si igitur primum 1 restabit, productum ex $\pi\ \varrho \dots \sigma\ \tau\ \upsilon \dots$ continebit 10 myriadas potentiae $\varkappa$, sin vero 2 *restabunt*, 100 myriadas potentiae $\varkappa$, denique si 3 *restabunt*, 1000 myriadas potentiae $\varkappa$. Et apparet ex iis, quae lineis descripta ac demonstrata sunt *ab Apollonio*, productum ex $\alpha\ \beta \dots \gamma\ \delta\ \varepsilon \dots \zeta\ \eta\ \vartheta \dots$ in primo casu esse $= 10000^{\varkappa} \cdot 10\ \varphi$, in secundo casu $= 10000^{\varkappa} \cdot 100\ \varphi$, in tertio casu $= 10000^{\varkappa} \cdot 1000\ \varphi$.

Hoc autem theoremate demonstrato apparet, quomodo Prop. 26
datus versiculus multiplicari et numerus dici possit, qui efficitur numero, quem prima littera designat, multiplicato cum numero secundae litterae eoque producto cum numero tertiae litterae multiplicato et sic deinceps usque ad finem versiculi, quem *exempli causa* Apollonius initio sic proposuit

14. *ἕνα* S, $\overline{\alpha}$ A, *α'* B (sed paulo post *ἕνα* etiam AB) 16. *ἑκατὸν* B, *ἑκατ* A, $\overline{\varrho}$ S 18. *γεγραμμένων* *Hu* pro *γενομένων* *ὁ* add. *Wa* 20. *δεκαπλάσιος τῶι* $\overline{\Phi}$ ABS, corr. *Wa* *ὁμώνυμος* cod. Savilianus *ὁ* (ante *ἑκατοντ.*) B, *δ'* AS 21. *τοῦ* $\overline{\Phi}$ AB, *τῷ* $\overline{\varphi}$ S 22. *ὁμώνυμος* B Savil. (non AS) 23. *δὲ* *Wa* *τοῦ θεωρήματος* del. *Hu* *προεκτεθειμένου* B Savil. 24. *πῶς* om. *Wa* *εστιν* sine spir. et acc. A, *ἐστι* sine acc. S, *ἐστὶ* B 25. *ἀριθμὸν* (alterum) *Hu* pro *τῶν ἀριθμῶν* 26. *ὃν* add. *Wa* (*ἐν* B) *γραμμάτων* *Wa* pro *γραμμῶν* 27. *πολλαπλασιασθῆναι* *Wa* pro *πολυπλασιασθῆναι* 30. *ὃν* *Hu* pro *ὡς* 31. *κατὰ τὸν στίχον* del. *Hu* (nam vix probabile videtur *κατὰ τὸ στοιχεῖον* coniicere) *ουτος* (sine spir. et acc.) A, corr. BS

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι
(*τὸ δὲ κλεῖτέ φησιν ἀντὶ τοῦ ὑπομνήσατε*).

18 *Ἐπεὶ οὖν γράμματά ἐστιν λη´ τοῦ στίχου, ταῦτα δὲ περιέχει ἀριθμοὺς δέκα τοὺς ρ´ τ´ σ´ τ´ ρ´ τ´ σ´ χ´ υ´ ρ´, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μέν ἐστιν χιλιάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἀριθμοὺς ιζ´ τοὺς μ´ ι´ ο´ κ´ λ´ ι´ κ´ ο´ ξ´ ο´ ο´ ν´ ν´ ν´ κ´ ο´ ι´, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μέν ἐστιν ἑκατοντάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ τοὺς λοιποὺς* [*σὺν ταῖς μονάσιν*] *ια´* τοὺς *α´ ε´ δ´ ε´ ε´ α´ ε´ ε´ ε´ α´ α´, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, ἐὰν ἄρα* [*τοὺς δέκα ἀριθμοὺς διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς γενομένους κ´ προσθῶμεν τοῖς εἰρημένοις ἁπλῶς ἀριθμοῖς ἑπτακαίδεκα, τὰ γενόμενα ὁμοῦ λζ´ ἕξομεν τῶν ὑπ᾽ αὐτοῦ γενομένων ἀναλόγων, κἂν*] *τοῖς μὲν δέκα ἀριθμοῖς ὑποτάξωμεν ἰσαρίθμους δέκα κατὰ τάξιν ἑκατοντάδος, τοῖς δὲ ιζ´ ὁμοίως ὑποτάξωμεν δεκάδας ιζ´, φανερὸν ἐκ τοῦ ἀνώτερον λογιστικοῦ θεωρήματος ιβ´ ὅτι δέκα ἑκατοντάδες μετὰ τῶν ιζ´ δεκάδων ποιοῦσι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα.* [*αἱ γὰρ δέκα ἑκατοντάδες δὶς γενόμεναι, τουτέστιν κ´, καὶ προσλαβοῦσαι τὰς ιζ´ δεκάδας γίνονται λζ´ ἀναλόγων ὄντα· μερισθέντα δὲ τὰ λζ´ εἰς τὸν δ´ ποιεῖ τὸν ἐκ τοῦ μερισμοῦ θ´ καὶ καταλείπεται α´, ὡς εἶναι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα τὰ ἐκ τῶν ἑκατοντάδων δέκα καὶ δεκάδων ιζ´.*]

19 *Ἐπεὶ δὲ καὶ πυθμένες ὁμοῦ τῶν μετρουμένων ἀριθμῶν ὑπὸ ἑκατοντάδος καὶ τῶν μετρουμένων ὑπὸ δεκάδος εἰσὶν οἱ ὑποκείμενοι κζ´*

α´ γ´ β´ γ´ α´ γ´ β´ ς´ δ´ α´
δ´ α´ ζ´ β´ γ´ α´ β´ ζ´ ς´ ζ´ ζ´ ε´ ε´ ε´ β´ ζ´ α´,

---

1. *κλεῖταε* A^1B Savil., *α* expunxit A^2, unde *κλεῖτε* S 2. *κλεῖτε φησὶν* A^2S, *κλεῖταε φησὶν* A^1B 3. $\overline{\lambda\eta}$ *Wa*, $\overline{ΛΜ}$ et eâdem manu superscriptum *ΛΗ* A, $\overline{\delta\mu}$ $\overline{\lambda\eta}$ BS (sed in B uterque numerus expunctus) 4. *τοὺς* $\overline{ΑΡΤCΤΡCΧΥΡ}$ A Paris. 2368 S (magis etiam corrupti B Savilianus), corr. *Wa* 6. 7. *τοῦ* $\overline{CΜΙΘΚΛΙΚΟΞΟΝΝΝΚΟΙ}$ A, *τοὺς* et reliqua perinde B (magis etiam corrupti Paris. 2368 S Savil.), corr. *Wa* 8. 9. *συνταῖς* $\overset{o}{\mu}$ A (B), del. *Hu* 9. *τοὺς* etc. add. *Hu* 10. *τοὺς δέκα* — 13. *κἂν* interpolatori tribuit *Hu* 11. *προσθῶμεν* om. *Wa* *τοῖς γενομένοις Wa* 12. *ἁπλῶν* S. 13. *ὑπ᾽ αὐτοῦ*] *Ἀπολ-*

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι
(*κλεῖτε* autem dicit pro *ὑπομνήσατε*, *i. e. in memoriam revocate sive celebrate*).

Quoniam versiculus litteras continet 38, in iisque decem, scilicet *ρ τ σ τ ρ τ σ χ υ ρ*, quae significant numeros singulos minores millenario et per centenarium divisibiles, *scilicet 100, 300, 200, 300, 100, 300, 200, 600, 400, 100*, porro septendecim, scilicet *μ ι ο κ λ ι κ ο ξ ο ο ν ν ν κ ο ι*, quae numeros significant singulos minores centenario et per denarium divisibiles, *scilicet 40, 10, 70, 20, 30, 10, 20, 70, 60, 70, 70, 50, 50, 50, 20, 70, 10*, denique undecim, scilicet *α ε δ ε ε α ε ε ε α α*, quae numeros significant singulos minores centenario, *scilicet 1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 1, 1*, si igitur decem illis numeris substituamus totidem in ordine centenariorum, et alteris illis septendecim totidem denarios, ex superiore logistico theoremate XII apparet decem centenarios unà cum septendecim denariis efficere decem myriadas noncuplas. [Nam 10 centenarii multiplicati cum 2 fiunt 20, his additi 17 denarii faciunt 37, quae est summa analogorum [1]), *id est singulorum denariorum, unde myriades computantur*; etenim 37 : 4 = 9, restatque 1; sunt igitur $10 \cdot 10000^9$.]

Sed quoniam numerorum et per centenarium et per denarium divisibilium fundamentales sunt hi qui sequuntur viginti septem

1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 6, 4, 1
4, 1, 7, 2, 3, 1, 2, 7, 6, 7, 7, 5, 5, 5, 2, 7, 1,

1) Vide append. ad hunc librum.

λωνίου intellexisse videtur interpolator *γενομένων* A¹ ex *γενόμενον* post *ἀναλόγων* add. *πλῆθος Wa* 14. *ὑποτάξομεν* A, *ω* superscr. 1 man. *δέκα Wa* pro *δὲ καὶ*, item vs. 17 16. *ἀνωτέρου Wa* (invitis ABS) 18. *αἱ γὰρ* — 22. *δεκάδων ιζ* interpolatori tribuit *Hu* 20. *ἀναλόγων* — *τὰ* $\overline{AZ}$ add. A² in marg. (BS) *ἀνάλογον* coni. *Hu*, *τὸν ἀναλόγων* B, *τῶν ἀναλόγων Wa* *μετρισθέντα Wa* (voluit *μετρηθέντα*) 22. *δέκα καὶ Wa* pro *δὲ καὶ* 24. *καὶ τῶν Wa* pro *καὶ τοῦ τῶν* 25. *κζ* add. *Hu* 26. 27. $\overline{ABΓΑΓΒϛΑΑΑΑΖΒΓΑΒΞϛΖ}$ $\overline{ΖΕΕΕΒΖΑ}$ ABS, corr. *Wa* ἀλλὰ καὶ τῶν ἐλασσόνων δεκάδος εἰσὶν ια', τουτέστιν ἀριθμοὶ οἱ

α' ε' δ' ε' ε' α' ε' ε' ε' α' α',

ἐὰν τὸν ἐκ τούτων τῶν ια' καὶ τὸν ἐκ τῶν κζ' πυθμένων στερεὸν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσωμεν, ἔσται ὁ στερεὸς μυριάδων τετραπλῶν ιθ' καὶ τριπλῶν ,ϛλϛ' καὶ διπλῶν ,ηυπ'.

20 [Ἴσος δὲ τούτῳ συνάγεται καὶ ὁ διὰ τῶν τοῦ στίχου πυθμένων ἅμα ταῖς μονάσιν

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι,

οἵ εἰσιν α' α' γ' ε' δ' α' δ' ζ' β' β' γ' ε' α' γ' ε' β' α' α' γ' ζ' β' ε' ϛ' ζ' ϛ' ζ' ε' ε' ε' ε' ε' α' β' ζ' δ' α' α' α'.

ἓν γὰρ ἐπὶ α' γίνεται α'
ἐπὶ γ' γίνεται γ'
ἐπὶ ε' γίνεται ιε'
ἐπὶ δ' γίνεται ξ'
ἐπὶ α' γίνεται ξ'
ἐπὶ δ' γίνεται σμ'
ἐπὶ ζ' γίνεται ,αχπ'
ἐπὶ β' γίνεται ,γτξ'
ἐπὶ β' γίνεται ,ϛψκ'
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{α} β' καὶ μ^{o} ρξ'
ἐπὶ ε' γίνεται μ^{α} ι' καὶ μ^{o} ω'
ἐπὶ α' γίνεται μ^{α} ι' καὶ μ^{o} ω'
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{α} λ' καὶ μ^{o} ,βυ'
ἐπὶ ε' γίνεται μ^{α} ρνα' καὶ μ^{o} ,β
ἐπὶ β' γίνεται μ^{α} τβ' καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ α' γίνεται μ^{α} τβ' καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ α' γίνεται μ^{α} τβ' καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{α} ϡζ' καὶ μ^{o} ,β

---

1. τῶν om. *Wa* δεκάδος *Wa* pro δεκάδες ια' add. *Wa* 1. 2. ἀριθμοὶ οἱ *Hu* pro ἀριθμῶν 3. $\overline{ΑΕΔΕΓΑΕΕΕΑΑ}$ ABS, corr. *Wa* 4. τῶν (ante ια') *Wa* pro τοῦ τὸν ἐκ add. *Wa* 5. πολλαπλασιάζωμεν *Wa* ἔσται *Hu* pro ἔσονται 6. $\overline{ιθ}$ B *Wa*, $\overline{CΘ}$ A[s]S 7 sqq. Ἴσος δὲ etc.] totum caput 20 interpolatori tribuit *Hu* 7. καὶ om. *Wa* 8. ἅμα ταῖς μονάσιν non debebat omittere interpolator, add. *Hu* 9. κλειται (sine acc.) A, ε superscr. 1 man. 10 sqq. οἵ εἰσιν etc.] hinc usque ad finem capitis apponitur continua scriptura codicis A, et uncis interclusa adiiciuntur si quae in BS correcta sunt; reliqua omnia a *Wa* emendata esse putato: οἵ εἰσιν $\overline{ΑΑΓΕ}$ | $\overline{ΔΑΔΖΒΒΓΕΑΓΕΒΑΑ}$ $\overline{ΓΖϚΕϚΖΕΕΕΕΕΑΒΖΔΑΑΑ}$. εν γαρ επι $\overline{Α}$ γίνεται $\overline{Α}$ ἐπὶ $\overline{Γ}$ γίνεται

et undecim numeri minores denario

1, 5, 4, 5, 5, 1, 5, 5, 5, 1, 1,

si productum ex his undecim cum producto ex illis viginti septem multiplicaverimus, efficietur solidus *numerus*

$$19 \cdot 10000^4 + 6036 \cdot 10000^3 + 8480 \cdot 10000^2.$$

[Aequale productum efficitur, si et fundamentales numeros et unitates ex ordine versiculi

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι

inter se multiplicamus, qui numeri sunt 1, 1, 3, 5, 4, 1, 4, 7, 2, 2, 3, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3, 7, 2, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 7, 4, 1, 1, 1 *)

	μ^δ = μυριάδες τετραπλαῖ	μ^γ = μυριάδες τριπλαῖ	μ^β = μυριάδες διπλαῖ	μ^α = μυριάδες ἁπλαῖ	μ^o = μονάδες
3 × 5 =	....	....	....	....	..15
× 4 =	....	....	....	....	..60
× 4 =	....	....	....	....	.240
× 7 =	....	....	....	....	1680
× 2 =	....	....	....	....	3360
× 2 =	....	....	....	....	6720
× 3 =	....	....	....	...2	0160
× 5 =	....	....	....	..10	0800
× 3 =	....	....	....	..30	2400
× 5 =	....	....	....	.151	2000
× 2 =	....	....	....	.302	4000
× 3 =	....	....	....	.907	2000

*) In schemate, quod sequitur, rationem multiplicandi, quam Graecus scriptor adhibuit, quantum fieri potuit, retinuimus; expulimus autem supervacaneas istas multiplicationes quae per 1 fiunt, eaeque ab ipso scriptore, non a librario, in fine capitis omissae esse videntur.

$\overline{\Gamma}$ ἐπὶ $\overline{E}$ γίνεται $\overline{IE}$ ἐπὶ $\overline{\Delta}$ γίνεται $\overline{\Xi}$ ἐπὶ $\overline{A}$ γίνεται $\overline{\Xi}$ ἐπὶ $\overline{\Delta}$ γίνεται $\overline{CM}$ ἐπὶ $\overline{Z}$ γίνεται ͵$\overline{AX\Pi}$ ἐπὶ $\overline{B}$ γίνεται ͵$\overline{AT\Xi}$ ἐπὶ $\overline{B}$ γίνεται ͵$\overline{ϚΨK}$ ἐπὶ $\overline{\Gamma}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{B}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{P\Xi}$ ἐπὶ $\overline{E}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ (μυριάδες S) $\overline{I}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{\Omega}$ ἐπὶ $\overline{A}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{I}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{\Omega}$ ἐπὶ $\overline{\Gamma}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{\Lambda}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ ͵$\overline{BK}$ ἐπὶ $\overline{E}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{PNA}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ ͵$\overline{B}$ ἐπὶ $\overline{B}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{TB}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\ddot{\Delta}$ ἐπὶ $\overline{A}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{TB}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{\Delta}$ ἐπὶ $\overline{A}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ $\overline{TB}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ $\overline{\Delta}$ ἐπὶ $\overline{\Gamma}$ γίνεται $\overset{\upsilon}{\mu}$ (μυριάδες S) Ϡ$\overline{Z}$ καὶ $\overset{o}{\mu}$ ͵ϛ

ἐπὶ ζ γίνεται μ^{α} ,ϛτν′ καὶ μ^{o} ,δ
ἐπὶ β′ γίνεται μ^{β} α′ καὶ μ^{α} βψ′ καὶ μ^{o} ,η
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{β} ϛ′ καὶ μ^{α} ,γϙδ′
ἐπὶ ϛ′ γίνεται μ^{β} λη′ καὶ μ^{α} ,αχδ′
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ^{β} σξϛ′ καὶ μ^{α} ,ζρξη′
ἐπὶ ϛ′ γίνεται μ^{β} ,αχ′ καὶ μ^{α} γη′
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ^{γ} α′ καὶ μ^{β} ,ασβ′ καὶ μ^{α} ,ανϛ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{γ} ε′ καὶ μ^{β} ,ϛι′ καὶ μ^{α} ,εσπ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{γ} κη′ καὶ μ^{β} νβ′ καὶ μ^{α} ,ϛυ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{γ} ρμ′ καὶ μ^{β} σξγ′ καὶ μ^{α} ,β
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{γ} ψ′ καὶ μ^{β} ,ατιϛ′
ἐπὶ ε′ γίνεται μ^{γ} ,γφ′ καὶ μ^{β} ,ϛϙπ′
ἐπὶ α′ γίνεται μ^{γ} ,γφ′ καὶ μ^{β} ,ϛϙπ′
ἐπὶ β′ γίνεται μ^{γ} ,ζα′ καὶ μ^{β} ,γρξ′
ἐπὶ ζ′ γίνεται μ^{δ} δ′ καὶ μ^{γ} ,θθ′ καὶ μ^{β} ,βρκ′
ἐπὶ δ′ γίνεται μ^{δ} ιθ′ καὶ μ^{γ} ,ϛλϛ′ καὶ μ^{β} ,ηυπ′.]

21 *Αὗται δὴ συμπολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων στερεόν, τουτέστι τὰς προκειμένας μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα, ποιοῦσιν μυριάδας τρισκαιδεκαπλᾶς ρϘϛ′, δωδεκαπλᾶς τξη′, ἑνδεκαπλᾶς ,δω′. [ἐνναπλαῖ γὰρ μυριάδες ἐπὶ μὲν τετραπλᾶς ποιοῦσι τρισκαιδεκαπλᾶς, ἐπὶ δὲ τριπλᾶς γενόμεναι ποιοῦσιν δωδεκαπλᾶς, καὶ ὁμοίως ἐπὶ διπλᾶς πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται ἑνδεκαπλαῖ ***] ταῦτα γὰρ πάντα προδέδεικται.*

22 *Φατέον οὖν τὸν ἐξ ἀρχῆς στίχον*

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι

πολλαπλασιασθέντα δι᾽ ἀλλήλων δύνασθαι μυριάδων πλῆθος τρισκαιδεκαπλῶν ρϘϛ′, δωδεκαπλῶν τξη′, ἑνδεκαπλῶν ,δω′, συμφώνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου προγεγραμμένοις.

ἐπὶ Ζ γίνεται μ^{α} ϛ ΤΝ καὶ μ^{o} Δ ἐπὶ Β γίνεται μ^{β} Α καὶ μ^{α} ϘΨ′ καὶ μ^{o} ,Η ἐπὶ Ε γίνεται μ^{β} ϛ καὶ μ^{α} ,ΓΦΔ ἐπὶ ϛ γίνεται μ^{β} ΛΗ καὶ μ^{α} ,ΖΡΞΗ ἐπὶ ϛ γίνεται μ^{α} α̊ ******* μ^{α} ,ΓΗ ἐπὶ Ζ γίνεται μα καὶ μ^{β} ,ΑϹΒ καὶ μ^{α} ,ΑΝϛ ἐπὶ Ε γίνεται μ^{γ} Ε καὶ μ^{β} ϛΙ καὶ μ^{α} ,ΕϹΠ ἐπὶ Ε γίνεται μ^{γ} ΚΗ καὶ μ^{β} ΝΒ καὶ μ^{α} ϛΥ ἐπὶ Ε γίνεται μ^{γ} ΡΜ καὶ μ^{β} ϹΞΓ καὶ μ^{α} ,Ζ ἐπὶ Ε γίνεται μ^{γ} Ψ′ καὶ μ^{β} α̃ ΤΙϛ ἐπὶ Ε γίνεται μ^{γ} ,ΓΦ καὶ μ^{β} ,ϛΦΠ ἐπὶ Α γίνεται μ^{γ} ,ΓΦ καὶ μ^{β} ,ϛΦΠ ἐπὶ Β γίνεται μ^{γ} ,ΖΑ καὶ ,ΒΡΚ ἐπὶ Δ

× 7 = ...	....	....	6350	4000
× 2 = ...	....	...1	2700	8000
× 5 = ...	....	...6	3504	0000
× 6 = ...	....	..38	1024	0000
× 7 = ...	....	.266	7168	0000
× 6 = ...	....	1600	3008	0000
× 7 = ...	...1	1202	1056	0000
× 5 = ...	...5	6010	5280	0000
× 5 = ...	..28	0052	6400	0000
× 5 = ...	.140	0263	2000	0000
× 5 = ...	.700	1316	0000	0000
× 5 = ...	3500	6580	0000	0000
× 2 = ...	7001	3160	0000	0000
× 7 = ...4	9009	2120	0000	0000
× 4 = ..19	6036	8480	0000	0000

Hoc igitur productum multiplicatum cum producto ex centenariis et denariis, id est, ut supra computatum est, cum $10 \cdot 10000^9$, efficit $196 \cdot 10000^{13} + 368 \cdot 10000^{12} + 4800 \cdot 10000^{11}$. [Est enim

$$(19 \cdot 10000^4 + 6036 \cdot 10000^3 + 8480 \cdot 10000^2) \cdot 10000^9$$
$$= 19 \cdot 10000^{4+9} + 6036 \cdot 10000^{3+9} + 8480 \cdot 10000^{2+9},$$

et id productum multiplicatum cum 10

$$= 196 \cdot 10000^{13} + 368 \cdot 10000^{12} + 4800 \cdot 10000^{11}.]$$

Haec enim omnia supra demonstrata sunt.

Jam dicendum est versiculum *qui* ab initio *propositus erat*

Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι,

singulis litteris inter se multiplicatis, efficere $196 \cdot 10000^{13} + 368 \cdot 10000^{12} + 4800 \cdot 10000^{11}$, congruenter cum iis quae Apollonius ea *quam invenit* ratione initio libri demonstravit.

γίνεται $\overset{\iota}{\mu}$ $\overline{Ι\Theta}$ καὶ $\overset{\iota\alpha}{\mu}$ $\overline{ϛ\Lambda ϛ}$ καὶ $\overset{\beta}{\mu}$ $\overline{ΗΥΠ}$. 17. *δὴ* add. *Hu*, *οὖν Wa* *συμπολυπλασιαζόμεναι* ABS, corr. *Wa* 19. *ἐνναπλᾶς* add. *Wa* *τρεῖς καὶ δεκαπλᾶς* ABS, corr. *Wa*, item vs. 21 20. *͵$\overset{o}{\overline{Δω}}$* A, *͵$\overline{δ^oω}$* BS *ἐνναπλαῖ* — 23. *ἐνδεκαπλαῖ* interpolatori tribuit *Hu*; omisit autem interpolator multiplicationem per decem (conf. infra cap. 26) 22. *δωδεκαπλᾶς Wa* pro $\overline{ΙΒ}$ 23. *διπλᾶς Wa* pro *διπλῶν* 26. post *κλειτε* (sic) add. A ligaturam *ει*, sed eam expunctam 27. *πολλαπλ. δι' ἀλλ'* om. *Wa* 28. *τρεῖς καὶ δεκαπλῶν* AB, corr. *Wa* 29. *͵$\overline{Δω}$* AB (*͵$\overline{αω}$* S) 30. *προγεγραμμένην Wa*

23 *Πάλιν δεδόσθω στίχος ὁ ὑποκείμενος*

Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου,

καὶ εἰλήφθω τά τε ἀνάλογα καὶ οἱ πυθμένες ἅμα ταῖς μονάσιν ὥσπερ ὑπόκεινται

δ' η' ε' α' ε' α' ε' α' δ' ε' θ' ε' α' δ' η' δ' η' γ' ε' α'
ζ' β' α' γ' γ' α' ζ' β' α' α' η' ζ' δ',

καὶ πεπολλαπλασιάσθωσαν δι' ἀλλήλων οἱ ἀριθμοί· γίνονται τετραπλαῖ μυριάδες δύο, τριπλαῖ ,αωμθ', διπλαῖ ,δυβ', ἁπλαῖ ,εχ'.

24 *Τέσσαρες γὰρ* μ^{o} *ἐπὶ η' γίνονται λβ'*
ἐπὶ ε' γίνονται ρξ'
ἐπὶ μίαν γίνονται ρξ'
ἐπὶ ε' γίνεται ω'
ἐπὶ α' γίνεται ω'
ἐπὶ ε' γίνεται ,δ
ἐπὶ μίαν γίνεται ,δ
ἐπὶ δ' γίνεται μ^{α} *α' καὶ* μ^{o} *ϛ'*
ἐπὶ ε' γίνεται μ^{α} *η'*
ἐπὶ θ' γίνεται μ^{α} *οβ'*
ἐπὶ ε' γίνεται μ^{α} *τξ'*
ἐπὶ α' γίνεται μ^{α} *τξ'*
ἐπὶ δ' γίνεται μ^{α} *,αυμ'*
ἐπὶ η' γίνεται μ^{β} *α' καὶ* μ^{α} *,αφκ'*
ἐπὶ δ' γίνεται μ^{β} *δ' καὶ* μ^{α} *,ϛπ'*
ἐπὶ η' γίνεται μ^{β} *λϛ' καὶ* μ^{α} *,ηχμ'*
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{β} *ρι' καὶ* μ^{α} *,εϡκ'*
ἐπὶ ε' γίνεται μ^{β} *φνβ' καὶ* μ^{α} *,θχ'*
ἐπὶ α' γίνεται μ^{β} *φνβ' καὶ* μ^{α} *,θχ'*
ἐπὶ ζ' γίνεται μ^{β} *,γωο' καὶ* μ^{α} *,ζσ'*
ἐπὶ β' γίνεται μ^{β} *,ζψμα' καὶ* μ^{α} *,δυ'*

---

1. *Πάλιν* etc.] haec usque ad finem libri non a Pappo, sed ab alio posteriore scriptore, eodem fortasse qui cap. 20 composuit, addita esse videntur 3. *μονάσιν* S, $\overset{\beta}{\mu}$ AB 5. 6. pro omnibus his numeris, quos restituit *Wa*, hos tantummodo habet A: $\overline{\Delta}\ \overline{H}\ \overline{E}\ \overline{A}\ \overline{E}\ \overline{A}\ \overline{H}\ \overline{Z}\ \overline{A}$ et superscr. 1 man. *EA EA Θ* $\overline{E}$ (magis etiam corrupti BS) 8. *τε-*

Rursus datús sit versiculus qui sequitur

Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου,

ac sumantur et analogi (*supra p. 21*) et fundamentales unà cum unitatibus hoc ordine

4, 8, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 4, 5, 9, 5, 1, 4, 8, 4, 8, 3, 5, 1, 7, 2, 1, 3, 3, 1, 7, 2, 1, 1, 8, 7, 4,

et hi ipsi numeri (*i. e. fundamentales unà cum unitatibus*) inter se multiplicentur: fiunt $2 \cdot 10000^4 + 1849 \cdot 10000^3 + 4402 \cdot 10000^2 + 5600 \cdot 10000$.

Fiunt enim

	μυριάδες τετραπλαῖ	μυριάδες τριπλαῖ	μυριάδες διπλαῖ	μυριάδες ἁπλαῖ	μονάδες
4 × 8 =	....	....	....	....	..32
× 5 =	....	....	....	....	.160
× 5 =	....	....	....	....	.800
× 5 =	....	....	....	....	4000
× 4 =	....	....	....	...1	6000
× 5 =	....	....	....	...8	0000
× 9 =	....	....	....	..72	0000
× 5 =	....	....	....	.360	0000
× 4 =	....	....	....	1440	0000
× 8 =	....	....	...1	1520	0000
× 4 =	....	....	...4	6080	0000
× 8 =	....	....	..36	8640	0000
× 3 =	....	....	.110	5920	0000
× 5 =	....	....	.552	9600	0000
× 7 =	....	....	3870	7200	0000
× 2 =	....	....	7741	4400	0000

τραπλαῖ μυριάδες *Hu*, δὲ μ̊ μυριάδες ABS (ubi δὲ μ̊ corruptum ex Ἁπλαῖ), δὲ μυριάδες τετραπλαῖ *Wa* 15. 16. ͵Δ utroque loco A (B) 17—22. μ^α *Hu*, μὲν ubique ABS, *Mυ. Wa* 23 sqq. ἐπὶ η' etc.] haec rursus usque ad finem capitis continuâ scripturâ ex A repetuntur (conf. supra ad p. 22, 10 sqq.): ἐπὶ Η̄ γίνεται μὲν (*Mβ. Wa*, corr. *Hu*, et similiter posthac) Α̅ καὶ μ̊ ͵ΑΦΚ ἐπὶ Δ̅ γίνεται μὲν Δ̅ καὶ μ̊ ͵ϛΠ ἐπὶ Η̄ γίνεται Λϛ καὶ μ̊ Η̄ καὶ ͵ΑΧΜ ἐπὶ Γ̅ γίνεται μ̊ ΡΙ̅ καὶ μὲν ͵ΕϠΚ ἐπὶ Ε̅ γίνεται μεν ΦΝΒ καὶ μεν ΘΧ ἐπὶ Ζ̅ γίνεται μὲν ͵ΓΩΟ καὶ μ̊ ͵ΖϹ ἐπὶ Β̅ γίνεται μ̊ ͵ΖΨΜΑ καὶ μὲν ͵ΔΥ

ἐπὶ α' γίνεται μ^{β} ,ζψμα' καὶ μ^{α} ,δυ'
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{γ} β' καὶ μ^{β} ,γσκδ' καὶ μ^{α} ,γσ'
ἐπὶ γ' γίνεται μ^{γ} ϛ' καὶ μ^{β} ,θχοβ' καὶ μ^{α} ,θχ'
ἐπὶ α' γίνεται μ^{γ} ϛ' καὶ μ^{β} ,θχοβ' καὶ μ^{α} ,θχ'
ἐπὶ ζ' γίνεται μ^{γ} μη' καὶ μ^{β} ,ζψι' καὶ μ^{α} ,ζσ'
ἐπὶ β' γίνεται μ^{γ} ϙζ' καὶ μ^{β} ,ευκα' καὶ μ^{α} ,δυ'
ἐπὶ α' καὶ πάλιν ἐπὶ α' γίνονται μ^{γ} ϙζ' καὶ μ^{β} ,ευκα' καὶ μ^{α} ,δυ'
ἐπὶ η' γίνεται μ^{γ} ψπ' καὶ μ^{β} ,γτοα' καὶ μ^{α} ,εσ'
ἐπὶ ζ' γίνεται μ^{γ} ,ευξβ' καὶ μ^{β} ,γχ' καὶ μ^{α} ,ϛυ'
ἐπὶ δ' γίνονται μ^{δ} β', τριπλαῖ ,αωμθ', διπλαῖ ,δυβ', ἁπλαῖ ,εχ'.

25 *Τῶν δὴ ἀναλόγων κβ' καὶ μετρουμένων ὑπὸ τετράδος [καὶ δυάδος ὑπολειπομένης] ὅσαι μονάδες γεγόνασιν [μέτρῳ εἰς ε'], τοσαυτάκις αὐξήσομεν τὸν ἐκβάντα διά τε τῶν μονάδων καὶ [διὰ τῶν πεπολλαπλασιασμένων] πυθμένων ἀριθμόν (λέγω δὲ τοσαυτάκις κατὰ μυριάδων αὔξησιν), ὥστε γίνεσθαι τὸν πρότερον ὑπάρχοντα μυριάδων τετραπλῶν δύο, τριπλῶν ,αωμθ', διπλῶν ,δυβ' καὶ ἁπλῶν ,εχ', νῦν ἐνναπλῶν β', ὀκταπλῶν, ,αωμθ', ἑπταπλῶν ,δυβ', ἑξαπλῶν ,εχ'.*

26 *Ὅτι δὲ περιλέλειπται τῶν ἀναλόγων δύο, ἅπερ ἐστὶ τῆς ἑκατοντάδος, τοσαυτάκις αὐξήσομεν τὸν εἰρημένον ἀριθμόν, ὥστε εἶναι μυριάδων ἐνναπλῶν σιη', ὀκταπλῶν ,δϡμδ', ἑπταπλῶν σνϛ'.*

27 *Ῥητέον οὖν τὸν ἐξ ἀρχῆς στίχον*

Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου

πολλαπλασιασθέντα δύνασθαι μυριάδων πλῆθος ἐνναπλῶν σιη', ὀκταπλῶν ,δϡμδ', ἑπταπλῶν σνϛ'.

ἐπὶ Α γίνεται μ̈ ΖΨΜΑ καὶ μ̂ Υ ἐπὶ Γ γίνεται μὲν Β καὶ μ̈ ,ΓϹΚΔ καὶ μ̈ ,ΓϹ ἐπὶ Γ γίνεται μ̈ ,ϛ καὶ μ̈ ,ΘΧΟΒ καὶ μὲν ,ΘΧ ἐπὶ Α γίνεται μ̈ ,ϛ καὶ μ̈ ,ΘΧΟΒ καὶ μ̈ ,ΘΧ ἐπὶ Ζ γίνεται μ̈ Μ Ή καὶ μ̈ ,ΖΨΙ καὶ μεν ,ΖΩ ἐπὶ Β γίνεται μ̈ ϘΖ μ̈ ,ΕΥΚΑ καὶ μ ,ΔΥ (post haec *ἐπὶ α γίνεται Μγ. ϙζ καὶ Μβ. ,ευκα καὶ Μα ,δυ* add. *Wa*, *ἐπὶ α'* tantummodo add. *Hu*) *καὶ πάλιν ἐπὶ Α γίνονται μ ϘΖ ,ΕΥΚΑ καὶ μ̈ ,ΔΥ ἐπὶ Η γίνεται μ̈ ΨΠ καὶ μὲν ,ΓΤ·ΟΑ καὶ μ̈ ,ΕϹ ἐπὶ Ζ γίνεται μ̈ ,ΕΥΞΒ καὶ μ̈ ,ΓΧ καὶ μ̈ ,ϛΥ ἐπὶ Δ γίνονται μ̈ Β τριπλαῖ*

$\times$ 3 = ...	...2	3224	3200	0000
$\times$ 3 = ...	...6	9672	9600	0000
$\times$ 7 = ...	..48	7710	7200	0000
$\times$ 2 = ...	..97	5421	4400	0000
$\times$ 8 = ...	.780	3371	5200	0000
$\times$ 7 = ...	5462	3600	6400	0000
$\times$ 4 = ...2	1849	4402	5600	0000

Quot autem sunt analogi, hunc numerum per 4 dividamus, et quot sunt in quotiente unitates, toties multiplicabimus illud productum, quod ex multiplicatione unitatum et fundamentalium prodiit (dico autem "toties" de *peculiari* myriadum multiplicatione), ita ut fiant

$$(2 \cdot 10000^4 + 1849 \cdot 10000^3 + 4402 \cdot 10000^2 + 5600 \cdot 10000) \cdot 10000^5 = 2 \cdot 10000^9 + 1849 \cdot 10000^8 + 4402 \cdot 10000^7 + 5600 \cdot 10000^6.$$

Quoniam autem in analogorum divisione relicti sunt 2, id est 100, toties multiplicabimus hunc quem modo dixi numerum, ita ut sint $218 \cdot 10000^9 + 4944 \cdot 10000^8 + 256 \cdot 10000^7$.

Dicendum igitur est versiculum, *qui* ab initio *propositus erat*,

Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου,

singulis litteris inter se multiplicatis efficere $218 \cdot 10000^9 + 4944 \cdot 10000^8 + 256 \cdot 10000^7$.

͵ΑΩΜΘ διπλαῖ ͵ΑΥΒ ἁπλαῖ ͵ΒΧ Ϲ Ν́   13. *δή*] *δὲ Wa*, *δὴ τῶν* ABS   14. *καὶ — ὑπολειπομένης* del. *Hu*   *καὶ* ante *ὑπολειπομένης* repetunt ABS, cuius loco *τῆς* coni. Bredow epist. Paris. p. 183 *ὅσαι μονάδες Hu* pro *ὅτι μὲν*   14. 15. *μετρω εις* (sine acc. et spir.) *Ε̅* A(BS), del. *Hu* (*μετρούμεναι εἰς ε′* voluisse videtur interpolator) 16. *διὰ τῶν πεπολλαπλασιασμένων Wa*, *τῶν διαπεπλασμένων* ABS, del. *Hu*   17. *λέγω — αὔξησιν*] haec utrum ab ipso huius loci scriptore, an ab alieno interprete interserta sint, ambiguum videtur 18. *μυριάδων* add. *Hu*   19. *νῦν* — 20. *ἑξαπλῶν ͵εχ′* om. et post *ὥστε γίνεσθαι* interponit *μυριάδων ἐνναπλῶν* etc. *Wa*   20. *ἑξαπλῶν* S (*ἐξαπλῶν* B), *ἐχαπλῶν* A   23. *μυριάδων Wa* pro *μονάδων ͵ΔΤΜΔ* AB, item vs. 28   25. *οὖν* add. *Wa*   28. in fine add. S *Βιβ. β̅ τέλος*

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Γ.

Περιέχει δὲ προβλήματα γεωμετρικὰ ἐπίπεδά τε καὶ στερεά.

1 *Οἱ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ ζητούμενα βουλόμενοι τεχνικώτερον διακρίνειν, ὦ κράτιστε Πανδρόσιον, πρόβλημα μὲν ἀξιοῦσι καλεῖν ἐφ᾽ οὗ προβάλλεταί τι ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, θεώρημα δὲ ἐν ᾧ τινῶν ὑποκειμένων τὸ ἑπόμενον αὐτοῖς καὶ πάντως ἐπισυμβαῖνον θεωρεῖται, τῶν παλαιῶν τῶν μὲν προβλήματα πάντα, τῶν δὲ θεωρήματα εἶναι φασκόντων. ὁ μὲν οὖν τὸ θεώρημα προτείνων συνιδὼν ὁντινοῦν τρόπον τὸ ἀκόλουθον τούτῳ ἀξιοῖ ζητεῖν καὶ οὐκ ἂν ἄλλως ὑγιῶς προτείνοι, ὁ δὲ τὸ πρόβλημα προτείνων [ἂν μὲν ἀμαθὴς ᾖ καὶ παντάπασιν ἰδιώτης], κἂν ἀδύνατόν πως κατασκευασθῆναι προστάξῃ, σύγγνωστός ἐστιν καὶ ἀνυπεύθυνος. τοῦ γὰρ ζητοῦντος ἔργον καὶ τοῦτο διορίσαι, τό τε δυνατὸν καὶ τὸ ἀδύνατον, κἂν ᾖ δυνατόν, πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατόν. ἐὰν δὲ προσποιούμενος ᾖ τὰ μαθήματά πως ἀπείρως προβάλλων, οὐκ ἔστιν αἰτίας ἔξω. πρῴην γοῦν τινες τῶν τὰ μαθήματα προσποιουμένων εἰδέναι διὰ σοῦ τὰς τῶν προβλημάτων προτάσεις ἀμαθῶς ἡμῖν ὥρισαν. περὶ ὧν ἔδει καὶ τῶν παραπλησίων αὐτοῖς ἀποδείξεις τινὰς ἡμᾶς εἰπεῖν εἰς ὠφέλειαν σήν τε καὶ τῶν φιλομαθούντων ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ. τὸ μὲν οὖν πρῶτον τῶν προβλημάτων μέγας τις γεωμέτρης εἶναι δοκῶν ὥρισεν ἀμαθῶς· τὸ γὰρ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ λαβεῖν ἔφασκεν εἰδέναι δι᾽ ἐπιπέδου*

---

1. 2. *πάππου ἀλεξανδρέως. συναγωγῶν* $\overline{\Gamma}$· *περιέχει — στερεά* om. A[1], add. A[2] (B, nisi quod hic *συναγωγὼν τρίτον*), *Πάππου ἀλεξανδρέως μαθηματικῶν συναγωγῶν βιβ.* $\overline{\Gamma}$ S, *ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ* corr. *Hu* 4. *κρατίστη πανδρόσιον* ABS, *Cratiste Co*, corr. *Hu* (conf. indicem) 10. *τὸν ἀκόλουθον τοῦτον* ABS, *consequens eius Co*, corr. *Hu* *ὑγειῶς* AB, corr. S 11. *ἂν μὲν* — 12. *ἰδιώτης* interpolatori tribuit *Hu* 16. 17. *προσποιούμενος ἠσκηκέναι τὰ μαθήματά πως ἀπείρως προβάλλῃ* coni. *Hu* *προβάλλων* S, *προβά|λὼν* A, *προβαλὼν* B 18. *τὰς* add. *Hu* 20. *ἀποδειξις* (sine acc.) A, corr. BS 21. *ὠφελίαν* A, corr. BS *φιλομα-*

Pappi Alexandrini collectionis liber III[1]).

Continet problemata geometrica plana ac solida.

Quicunque ea quae in geometria quaeruntur ex artis praeceptis accuratius discernere volunt, clarissime Pandrosio, problema appellari existimant in quo aliquid efficiendum et construendum proponitur, theorema vero in quo quaedam ita ponuntur, ut id quod consequitur atque omnino inde contingit perspiciatur. Quamquam veterum alii problemata omnia, alii *omnia* theoremata esse dicunt. Qui igitur theorema proponit, postquam aliqua ratione id quod inde consequitur mente praecepit, id ipsum quaerendum esse putat neque alio modo recte proponere videtur; qui vero problema proponit, etiamsi forte id praecipiat quod construi vix ulla ratione possit, venia tamen est dignus et culpa vacat; quaerentis enim est hoc etiam determinare, quid fieri possit, quid non, et, si fieri possit, quando et quomodo et quotupliciter fieri possit. At si quis mathematica se doctum esse profiteatur et tamen temere proponat, non est extra culpam. Ut nuper quidam eorum, qui mathematicis a te institutos se esse profitentur, problematum propositiones imperitius nobis determinaverunt. Quibus de rebus aliisque eius generis oportebat nos, ut et tibi et *omnibus* quicunque doctrinae student consuleremus, hoc tertio collectionis libro demonstrationes quasdam afferre. Primum igitur problema homo quidam, qui magnus esse geometra videbatur, imperite determinavit. Nam q u o m o d o d a t i s d u a b u s r e c t i s l i n e i s d u a e m e d i a e p r o p o r t i o n a l e s i n c o n t i n u a a n a l o g i a i n v e n i r e n t u r,

1) Hic liber quattuor partibus constat, quas ipse scriptor satis aperte distinguit. Primum enim problema, quod ab alio viro mathematico propositum esse dicitur, explicatur cap. 2—27, secundum cap. 28—57, tertium cap. 58—73, quibus succedit quartum inde a cap. 75.

θούντων Hu pro *φιλομαθῶν τῶν* 22. *τούτων* A, corr. BS 24. *δύο Hu* pro *δύο τῶν* 25. *ἀναλογίᾳ* B[3]S, *ἀναλογίαν* AB[1] θεωρίας, ἠξίου δὲ καὶ ἡμᾶς ὁ ἀνὴρ ἐπισκεψαμένους ἀποκρίνασθαι περὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτοῦ γενηθείσης κατασκευῆς, ἥτις ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον.

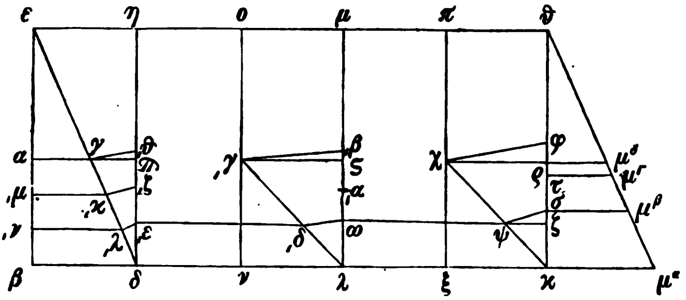
2 α΄. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΕΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΔΗ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΒΔ ἴσαι αἱ ΔΝ ΝΛ ΛΞ ΞΚ, καὶ διὰ τῶν Ν Λ Ξ Κ σημείων τῇ ΒΕ παράλληλοι αἱ ΝΟ ΛΜ ΞΠ ΚΘ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΚΡ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΚΡ κατὰ τὸ Σ, καὶ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, ὡς δὲ ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, οὕτως ἡ ΘΤ πρὸς ΘΦ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΞΠ τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΧΞ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΚ καὶ ἡ ΧΦ, καὶ ἀπὸ τοῦ Σ τῇ ΧΦ παράλληλος ἡ ΣΨ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ψ τῇ ΚΞ παράλληλος ἡ ΨΩ, καὶ ἔστω ὡς ΛΜ πρὸς ΜΩ, οὕτως ἡ ΩΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΩΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΟΝ τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΝΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΛ καὶ ἡ ΓΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ω τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΩΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ τῇ ΛΝ παράλληλος ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ΗΕ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΓ, καὶ ἤχθωσαν τῇ ΘΓ παράλληλοι αἱ ΖΚ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τῶν Κ Λ ταῖς ΑΓ ΒΔ παράλληλοι αἱ ΚΜ ΛΝ· δεῖξαι ὅτι τῶν ΑΓ ΒΔ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΚ ΝΛ.

---

1. ἠξίου δὲ *Hu*, ηξιούτε (sine spir.) A (BS) 4. α΄ om. AB, add. S 6. επι|ζεύχθω (sine spir.) A(B), corr. S 7. ante ἀπὸ τοῦ Ε cogitatione addendum est ἤχθω, quod saepius scriptor omisit 10. ἤχθωσαν ante διὰ τῶν add. B[4] διὰ τῶν ΝΛ ΞΚ A, distinx. BS 13. πρὸς θσ V[2] pro πρὸς ΘΕ πρὸς ΘΤ, ὡς *Hu*, πρὸς τὸ ΘΤ ὡς AB[1]S, πρὸς τὴν θτ ὡς B[3] 13. 14. πρὸς Θ οὕτως (omisso Τ) A, corr. BS 15. ἐπιζεύχθω AB, corr. S (nisi quod lapsu calami ἐπεζεύχω habet) 17. 18. ἡ ΩΜ πρὸς ΜΘ πρὸς ΜΒ ABS, pro ΜΘ corr. μα B[4] *Co*, tum ὡς δὲ ωμ πρὸς μα οὕτω μα add. et pro ΜΒ corr. μ,β B[4], reliqua corr. *Hu* 19. ἀφῃρήσθω add. B[4] ἐπιζεύχθω AB, corr. S 23. οὕτως ἡ ΖΗ (Ζ in rasura) A, lineolam ad Ζ add. B[4] 24. ἡ ΘΓ AB[1]S, lineolam

scire se dixit per planae figurae rationem, atque etiam a nobis petivit, ut re considerata responderemus de constructione quam ipse fecisset, quae quidem hoc modo se habet:

I. Sint duae rectae $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$ ad rectos inter se angulos, et ducatur a puncto β rectae $\alpha\gamma$ parallela $\beta\delta$ et ponatur $\beta\delta = \alpha\beta$, et iungatur $\delta\gamma$ concurratque cum $\beta\alpha$ *productâ* in puncto ε, et ducatur ab ε rectae $\alpha\gamma$ parallela $\varepsilon\vartheta$, et produ-



catur $\beta\delta$, et ducatur a puncto δ rectae $\beta\varepsilon$ parallela $\delta\eta$, et *in productâ* $\beta\delta$ ponatur $\delta\nu = \nu\lambda = \lambda\xi = \xi\varkappa = \beta\delta$, et per puncta ν λ ξ $\varkappa$ ducantur ipsi $\beta\varepsilon$ parallelae νo $\lambda\mu$ $\xi\pi$ $\varkappa\vartheta$, et ponatur $\varkappa\varrho = \beta\alpha$ seceturque bifariam in puncto σ, et sit $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \sigma\vartheta : \vartheta\tau = \vartheta\tau : \vartheta\varphi$, et a recta $\xi\pi$ abscindatur rectae $\alpha\beta$ aequalis $\chi\xi$, iunganturque $\chi\varkappa$ $\chi\varphi$, et ducatur a puncto σ rectae $\chi\varphi$ parallela $\sigma\psi$, et a puncto ψ rectae $\xi\varkappa$ parallela $\psi\omega$, et sit $\lambda\mu : \mu\omega = \omega\mu : \mu{}_{,}\alpha = \mu{}_{,}\alpha : \mu{}_{,}\beta$, et a recta $o\nu$ abscindatur rectae $\alpha\beta$ aequalis $\nu{}_{,}\gamma$, et iungantur ${}_{,}\gamma\lambda$ ${}_{,}\gamma{}_{,}\beta$ et ducatur a puncto ω rectae ${}_{,}\beta{}_{,}\gamma$ parallela $\omega{}_{,}\delta$, et a puncto ${}_{,}\delta$ rectae $\lambda\nu$ parallela ${}_{,}\delta{}_{,}\varepsilon$, et sit $\delta\eta : \eta{}_{,}\varepsilon = \eta{}_{,}\varepsilon : \eta{}_{,}\zeta = {}_{,}\zeta\eta : \eta{}_{,}\vartheta$, et iungatur ${}_{,}\vartheta\gamma$, et ipsi ${}_{,}\vartheta\gamma$ parallelae ducantur ${}_{,}\zeta{}_{,}\varkappa$ ${}_{,}\varepsilon{}_{,}\lambda$, et a punctis ${}_{,}\varkappa$ ${}_{,}\lambda$ rectis $\alpha\gamma$ $\beta\delta$ parallelae ${}_{,}\varkappa{}_{,}\mu$ ${}_{,}\lambda{}_{,}\nu$; demonstretur rectarum $\alpha\gamma$ $\beta\delta$ medias proportionales esse ${}_{,}\mu{}_{,}\varkappa$ ${}_{,}\nu{}_{,}\lambda$.

---

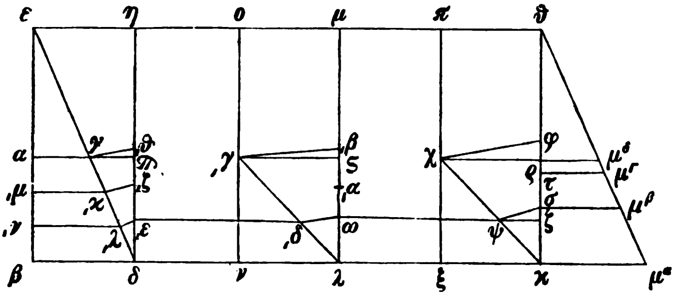
sub Γ erasit B[3] καὶ ἤχθωσαν τῇ $\overline{\Theta\Gamma}$ add. B[4] *Co* αἱ $\overline{ZK}$ AB[1], lineolam ad K add. B[3]S $\overline{\varepsilon\lambda}$ B[3] pro $\overline{EA}$ 25. ἀπὸ τῶν $\overline{K\Delta}$ AB[1], corr. B[3] *Co* αἱ $\overline{KM}$ $\overline{AN}$ AS, lineolam ad K add. B, tum pro $\overline{A}$ corr. $\overline{\lambda}$ B[3], denique lineolam ad N add. *Hu* 26. $\overline{\gamma\lambda}$ B[3] et *Co* pro $\overline{NA}$

3 *Ταῦτα μὲν οὖν ἐκεῖνος γράψας ἐξέδωκεν ἡμῖν μὴ περιέχοντα καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου προβλήματος. ἐπειδὴ δὲ καὶ Ἱέριος ὁ φιλόσοφος καὶ ἄλλοι πολλοὶ τῶν αὐτοῦ μὲν ἑταίρων ἐμοὶ δὲ γνωρίμων ἠξίωσαν ἀποκρίνασθαί με τέως περὶ τῆς προκειμένης κατασκευῆς, ἐκείνου τὴν ἀπόδειξιν ἐπαγγειλαμένου ποιήσασθαι, τοσοῦτον ἔχω τὸ νῦν εἰπεῖν, ὡς οὐ δεόντως, ἀλλ' ἀπείρως ἐχρήσατο τῇ κατασκευῇ. διχοτομήσας γὰρ τὴν ΡΚ εὐθεῖαν τῷ Σ καὶ ποιήσας ὡς μὲν τὴν ΚΘ εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως τὴν ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, ἐποίησεν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ τὴν ΤΘ πρὸς τὴν ΘΦ. πᾶσα δὲ ἀνάγκη μήτ' ἐκεῖνον εὑρίσκειν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ τρίτου λόγου, ὡς τὸ Φ, μήθ' ἡμᾶς. τῆς δὲ τοιαύτης ἀπορίας παρὰ τὴν αὐτοῦ αἰτίαν ἐπακολουθούσης ἐνεφάνισεν ἑαυτὸν μηδὲ τοῦτο συνιδόντα τὸ ἀκόλουθον.*
4 *ἀδυνάτου γὰρ ὄντος ὁρισθῆναι τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ τοῦ τρίτου λόγου, μὴ πρότερον ὑποτεθέντος τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ, τουτέστιν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὐ μόνον αὐτὸς πειρᾶται ζητεῖν τὸ ἀδύνατον, ἀλλὰ καὶ ἡμᾶς ἀξιοῖ. ὑποτεθέντος μέντοι τοῦ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ,* τουτέστιν *ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ δοθείσης τῆς ΚΘ, δέδοται ἡ ἐλάσσων εὐθεῖα τοῦ τρίτου λόγου. καὶ δοθέν ἐστιν τὸ Θ σημεῖον· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἕτερον πέρας τῆς ἐλαχίστης. καὶ ὅτι ἤτοι μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ ἢ μεταξὺ τῶν Ρ Τ δῆλόν ἐστιν. [ὅτι γὰρ καὶ τὸ Τ μεταξὺ πίπτει τῶν Ρ Σ δείξομεν,*

---

3. post *πολλοὶ* add. *μὲν* A^1, sed id expunctum 7. *δε*όντως* A^2 ex *δεν ὄντως* 9. *οὕτω* A^sBS 11. *πάση δὲ ἀνάγκη* AB, *πάσῃ δὲ ἀνάγκῃ* S^s, corr. *Hu* 14. *τοῦτο* accipiendum est pro *τόδε*; minime igitur *τούτῳ* scribendum 16. *ὑπερεκτεθέντος* B 17. $\overline{\Theta P}$ A^1, *Κ* superscr. A^2, unde $\overline{\kappa\rho}$ S, $\overline{\vartheta{*}\rho}$ B *τοῦ* om. BS 18. *ἡ* $\overline{H}$ *πρὸς τὴν* $\overline{BA}$ AB^1S, corr. B^4 *Co* 20. *τουτέστιν* add. B^4V^2, *τουτέστιν τοῦ ὃν ἔχει* mavult *Hu* 21. *δίδοται* AS, corr. B 23. *ὅτι* add. V^2 24. $\overline{\Theta P}$ — $\overline{PT}$ AS, distinx. B 24. 25. *δῆλον ἔσται* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 25. *ὅτι γὰρ* — p. 36, 3. *πρὸς τὴν ΘΡ* interpolatori tribuit *Hu* 25. *τῶν* $\overline{P\Sigma}$ A, distinx. BS

Haec igitur ille scripta nobis tradidit omissa demonstratione propositi problematis. Sed quoniam et Hierius philosophus et alii permulti ex eius amicis, qui mihi noti sunt, voluerunt de proposita constructione interim me respondere, cum ille quidem demonstrationem promisisset, neque tamen fecisset, hoc mihi in praesentia dicendum esse videtur, illum non ita, ut oportebat, sed imperite in demonstratione versatum esse.



Nam postquam rectam $\varrho\varkappa$ in puncto σ mediam divisit et fecit $\vartheta\sigma : \vartheta\tau = \varkappa\vartheta : \vartheta\sigma$, in eadem proportione etiam $\tau\vartheta : \vartheta\varphi$ constituit. At necessario sequitur punctum sectionis in tertia proportione, velut φ, neque ab illo neque a nobis inveniri posse. Cuius haesitationis cum ipse culpam contraxerit, ne hoc quidem quod sequitur sese perspexisse ostendit. Nam quoniam fieri non potest, ut sectionis punctum, velut φ in tertia proportione, definiatur, nisi prius supposita sit proportio $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho$, id est $\beta\varepsilon : \varepsilon\alpha$, non solum ipse id quod inveniri non potest quaerere conatur, sed etiam a nobis idem postulat. Si tamen proportionem $\beta\varepsilon : \varepsilon\alpha$ *datam* supposuerimus et data sit $\varkappa\vartheta$, data est etiam minor recta in tertia proportione, *id est* $\vartheta\varphi$*). Et datum est punctum ϑ; ergo etiam alter terminus rectae minoris, *id est* φ, datus est (*dat.* 27). Atque id punctum aut inter ϑ ϱ aut inter ϱ τ cadere appa-

*) Hoc demonstrat Euclides in datorum propos. 2. Abhinc autem usque Euclidis et elementa et data omisso auctoris nomine citabimus.

καὶ πρότερον ὅτι τὸ Φ σημεῖον ποτὲ μὲν μεταξὺ τῶν Θ Ρ ποτὲ δὲ μεταξὺ τῶν Ρ Τ παρὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΚΘ δοθεῖσα πρὸς τὴν ΘΡ.]

Ὑποκείσθω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος πρότερον διπλάσιος [τῆς ΚΘ πρὸς τὸν ΘΡ, τουτέστιν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ, ἢ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΓ]· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ ὃν ἔχει τὰ β′ πρὸς τὸ α′, τουτέστιν ὃν δ′ πρὸς β′· καὶ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς ΘΣ λόγος ἐστὶν ὃν δ′ πρὸς γ′· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, τουτέστιν ὡς δ′ πρὸς γ′, οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς ΘΤ, τουτέστιν ὡς γ′ πρὸς β′ καὶ δ″. ὡς δὲ καὶ τὰ γ′ πρὸς τὰ β′ καὶ δ″, οὕτως αὐτὰ τὰ β′ δ″ πρὸς ἄλλην [ἐὰν γένηται, ἔσται πρὸς] ἐλάσσονα τῶν δύο μονάδων τῆς ΘΡ, ὥστε τὴν ἐλάσσονα εὐθεῖαν τοῦ τρίτου λόγου [καὶ πασῶν ἐλαχίστην] ἐλάσσονα εἶναι τῆς ΘΡ, καὶ τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ, μεταξὺ πίπτειν τῶν Θ Ρ.

Ἀλλὰ δὴ ὁ δοθεὶς λόγος ἔστω τετραπλάσιος· λόγος ἄρα τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ ὃν ἔχει τὰ η′ πρὸς β′· καὶ τῆς ΘΚ ἄρα πρὸς ΘΣ λόγος ὃν ἔχει τὰ η′ πρὸς τὰ ε′. καὶ ἔστιν ὡς τὰ η′ πρὸς τὰ ε′, οὕτως τὰ ε′ πρὸς τὰ γ′ καὶ η″· ὡς δὲ τὰ ε′ πρὸς τὰ γ′ καὶ τὸ η″, οὕτως τὰ γ′ καὶ τὸ η″ πρὸς ἐλάσσονα τῶν δύο, ὥστε πάλιν ἡ τομὴ τοῦ τρίτου λόγου μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ.

Πάλιν ὑποκείσθω λόγος τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ πενταπλάσιος· λόγος ἄρα τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ ὃν δέκα πρὸς δύο· καὶ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΣ λόγος ἐστὶν ὃν τὰ ι′ πρὸς τὰ ϛ′. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὰ ι′ πρὸς τὰ ϛ′, οὕτως αὐτὰ τὰ ϛ′ πρὸς τὰ γ′ S ι″· ὡς δὲ τὰ ϛ′ πρὸς τὰ γ′ S ι″, οὕτως

---

1. *τῶν* $\overline{\Theta P}$ et 2. *τῶν* $\overline{PT}$ A, distinx. BS 5. *τῆς ΚΘ* — 6. *πρὸς ΑΓ*, manifestum interpretamentum, del. *Hu* 6. *ἢ τῆς* $\overline{B\Delta}$ AB, *ἢ τῆς* $\overline{\beta\alpha}$ S *Co* 7. *τὰ δύο πρὸς τὸ* $\overline{A}$ *τουτέστιν ὃν* $\overline{\Delta}$ *πρὸς δύο* AB, *τὰ δύο πρὸς τὸ ἕν, τουτέστιν ὃν τέσσαρα πρὸς δύο* S 8. 9. *λόγος ἐστιν ὃν* $\overline{\Delta}$ *πρὸς* $\overline{\Gamma}$ *καὶ ἔστιν ὡς ἡ* $\overline{H\Theta}$ (voluit $\overline{K\Theta}$) *πρὸς ΘΣ* om. A[1], add. A[2] in marg. 10. *ὡς* prius] *ουτω* (sine spir. et acc.) A, *οὕτω* B[1]S, corr. B[4] 10. 11. *δύο καὶ* $\overline{\Delta}$ — *δύο καὶ* $\overline{\Delta}$ A, *δύο καὶ δ′* utroque loco B, *δύο καὶ τέταρτον* V[2] *Sca* 11. *τὰ* $\overline{B}$ *Δ′* AB, *τὰ δύο* $\overline{\delta}$ S, *τὰ δύο δ″ Sca*, *τὰ δύο καὶ τέταρτον* V[2] *πρὸς ἄλλην*] *προσάλληλα* AB (S),

ret. [Nam etiam punctum τ inter ϱ σ cadere demonstrabimus, et antea, punctum φ tum inter ϑ ϱ, tum inter ϱ τ *cadere*, prout proportio $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho$ supposita sit.]

Primum enim supponatur datam proportionem esse duplam; ergo est $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho = 2 : 1 = 4 : 2$; itaque etiam $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = 4 : 3$ (*nam ex constructione est* $\varrho\sigma = \frac{1}{2}\varrho\varkappa$). Et *ex hypothesi* est $\vartheta\sigma : \vartheta\tau = \varkappa\vartheta : \vartheta\sigma$, id est $= 4 : 3 = 3 : 2\frac{1}{4}$. Sed ut *recta quae* 3 *unitatum est se habet* ad *eam quae est* $2\frac{1}{4}$, ita *haec* ipsa, *quae est* $2\frac{1}{4}$, ad aliam quandam[1]) minorem duabus unitatibus[2]), quas *ex hypothesi* recta $\vartheta\varrho$ continet, ita ut minor recta tertiae proportionis, *scilicet* $\vartheta\varphi$, minor sit quam $\vartheta\varrho$, et sectionis punctum φ cadat inter puncta ϑ ϱ.

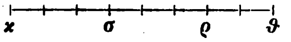
Sed sit data proportio quadrupla; est igitur $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho = 8 : 2$, ideoque $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = 8 : 5$*). Et est $8 : 5 = 5 : 3\frac{1}{8}$; sed ut *recta quae* 5 *unitatum est, se habet* ad *eam quae est* $3\frac{1}{8}$, ita *haec ipsa, quae est* $3\frac{1}{8}$, ad *aliam quandam* minorem duabus *unitatibus*, ita ut rursus sectionis *punctum* φ, *quod est* in tertia proportione, inter puncta ϑ ϱ cadat.

Rursus supponatur proportio $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho$ quintupla; ergo est $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho = 10 : 2$, ideoque $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = 10 : 6$. Et est $10 : 6$

1) Instituit hoc loco scriptor id definire, quod nos brevius designemus per proportionem $a : b = b : x$, scilicet quibus terminis in hoc, de quo agitur, problemate existat $x \gtrless 2$. Generalis autem conclusio infra legitur cap. 6.

2) Sic brevius scriptor pro "minorem rectâ quae 2 unitatum est" et similiter paulo post.

*) Si enim tota $\varkappa\vartheta$ est 8 unitatum et $\vartheta\varrho$ 2, reliqua $\varrho\varkappa$ habet 6 unitates, et dimidia $\varrho\sigma$ 3; ergo $\vartheta\varrho + \varrho\sigma = \vartheta\sigma$ habet 5 unitates, sicut etiam haec figura ostendit



πρὸς ἄλλα V² *Sca*, corr. *Co*, qui simul addit τινὰ, quod quidem in proximo ἐὰν latere coni. *Hu* 12. ἐὰν γένηται, ἔσται πρὸς del. *Hu* 13. 14. καὶ πασῶν ἐλαχίστην del. *Hu* 15. $\overline{\Theta P}$ ABS, distinxit B³ (an B⁴?) 17. ἔχει add. S, τὰ add. *Hu* προσδύο A (BS) 19. $\overline{\Gamma}$ καὶ H' AB, τρία καὶ $\bar{\eta}$ S ὡς add. B⁴ V² *Sca* 20. $\overline{E}$ A²BS, $\overline{P}$ A¹ $\overline{\Gamma}$ καὶ τὸ H' οὕτως τὰ $\overline{\Gamma}$ καὶ τὸ $\overline{H}'$ A (B), τρία καὶ τὸ ὄγδοον οὕτω τὰ τρία καὶ τὸ $\bar{\eta}$ S 24. ὃν ι′ πρὸς β′ *Hu* 26. $\bar{\iota}$ B³ *Co*, δέκα V² *Sca*, $\overline{E}$ AB¹S 27. $\overline{\Gamma}$ $\overline{L}'$ ι′ AB utroque loco, $\bar{\gamma}$ S′ ι″ S et hic et posthac *αὐτὰ τὰ γ′ S ι″ πρὸς μείζονά τινα τῶν δύο. καὶ ἔστιν ἡ ΘΡ αὐτῶν τῶν δύο· μεταξὺ ἄρα τῶν Ρ Τ τὸ σημεῖον πίπτει τῆς τομῆς τοῦ τρίτου λόγου.*

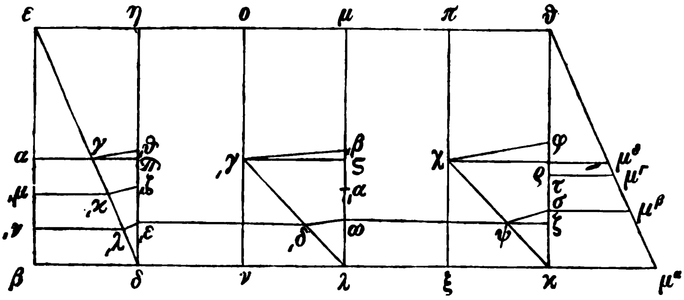
Καὶ δῆλον ὡς πάντες μὲν οἱ ἐλάσσονες τοῦ τετρα-
6 *πλασίου λόγου ποιοῦσιν τὴν τοιαύτην τομὴν μεταξὺ τῶν Ρ Θ, πάντες δὲ οἱ μείζους τοῦ πενταπλασίου ποιοῦσι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μεταξὺ τῶν Ρ Τ, ὡς καὶ λῆμμα περὶ τῆς τοιαύτης ἀναλογίας χρήσιμον ὑπέταξα.*

Ἐπεὶ οὖν ἐδείξαμεν τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ,
7 *ποτὲ μὲν μεταξὺ πῖπτον τῶν Θ Ρ ποτὲ δὲ μεταξὺ τῶν Ρ Τ, τοῦ τοιούτου μηδαμῶς ὑπ᾽ αὐτοῦ θεωρηθέντος δι᾽ ἣν εἴπομεν αἰτίαν [αὐτὸς δὲ λέγει δεικνύναι τὸ προκείμενον, ἐάν τε μεταξὺ τῶν Θ Ρ ᾖ τὸ Φ σημεῖον ἐάν τε μεταξὺ τῶν Ρ Τ], ἐκεῖνο χρὴ πρὸ πάντων σκοπεῖν ὅτι, ὅπου ἂν λάβῃ τὸ Φ, ἤτοι κάτω τοῦ Ρ ἢ ἄνω, οὐκ ἔσται ὡς ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως καὶ ἡ ΤΘ πρὸς ΘΡ. ἐὰν οὖν λέγῃ "γεγενήσθω ὡς μὲν ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ ἡ ΤΘ πρὸς τὴν ΘΡ," αὐτόθεν ἐλέγχεται τὸ ζητούμενον ὁμολογούμενον λαβών. ἐκβληθείσης γὰρ τῆς ΞΚ καὶ ἴσης τεθείσης τῇ ΞΚ τῆς* KM^{α}, *καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς* $M^{\alpha}\Theta$ *καὶ παραλλήλων ἀχθεισῶν τῇ* KM^{α} *διὰ τῶν Σ καὶ Τ καὶ Ρ σημείων, γεγονὸς ἔσται τὸ ζητούμενον καὶ δῆλόν πως. ἔσται γὰρ καὶ ὡς ἡ* KM^{α} *πρὸς* ΣM^{β}, *οὕτως ἡ* ΣM^{β} *πρὸς* TM^{γ} *καὶ ἡ* TM^{γ} *πρὸς τὴν* PM^{δ}.

---

1. *αὐτὰ τὰ Hu* pro *τὰ αὐτὰ* $\overline{\Gamma}\ \overline{L}$ *ι′* A (B ut supra) 2. *αὐτῶν τῶν Hu* pro *τῶν αὐτῶν* 5. 6. *τῶν* $\overline{P\Theta}$ et 7. *τῶν* $\overline{PT}$ A 10. *τῶν* $\overline{\Theta P}$ — *τῶν* $\overline{PT}$ A itemque posthac, distinx. BS 12. *αὐτὸς* — 14. *τῶν Ρ Τ* interpolatori tribuit *Hu* 15. *ἣ*] *ἢ* A[s]B[s]S 19. *ὡς* ante *ὁμολ.* add. *Co* 20. *τῆς* $\overline{\Xi K}$ *τῆς* $\overline{K}|\overset{\alpha}{M}$ AB[1], corr. B[3] 21. *τῆς* $M^{\alpha}\Theta$] minuta littera *α* atque item posthac *β γ δ* in ABS ubique super *M* positae sunt 21. 22. *τῆς* $\overline{K}\ \overline{\overset{\alpha}{M}}$ *διὰ τὴν* $\overline{C}$ *καὶ* $\overline{T}$ *καὶ* $\overline{P}$ *σημεῖον* AB[1], corr. B[3] (minus feliciter *διὰ τὰ — σημεῖα* V[2]) 23. *δῆλον πως* A; vix tamen probabile videtur *δῆλον πῶς* *ἡ* $\overline{KM}$ AB[1]S, corr. B[3] 24. *ἡ* ΣM^{β} *Hu*, $\overline{E\overset{\beta}{M}}$, omisso *ἡ*, AB[1]S, *σ* pro *E* corr. B[3] *πρὸς τὴν* $\overline{P\overset{\pi}{M}}$ AB[1]S, corr. B[3]V[2]

$= 6 : 3\frac{3}{5}$ *) ; sed ut *recta quae* 6 *unitatum est se habet* ad *eam quae est* $3\frac{3}{5}$, ita *haec* ipsa, *quae est* $3\frac{3}{5}$, ad *aliam* quandam maiorem duabus *unitatibus*. Et *ex hypothesi* $\vartheta\varrho$ est duarum *unitatum*; ergo sectionis *punctum* φ, *quod est* in tertia proportione, inter puncta ϱ τ cadit[1]).



Et apparet omnes proportiones, quae minores sunt quam quadrupla, efficere eiusmodi *punctum* sectionis inter ϑ ϱ, omnes autem, quae maiores sunt quam quintupla, efficere sectionis punctum inter ϱ τ. Atque etiam lemma ad eiusmodi proportiones *discernendas* utile infra (*propos.* *1*) subiunxi.

Quoniam igitur demonstravimus sectionis punctum, velut φ, modo inter ϑ ϱ modo inter ϱ τ cadere, id quod ab illo propter eam quam diximus causam minime perspectum est, illud ante omnia considerandum est, ubicunque ille punctum φ sumit, sive infra ϱ sive supra, non esse $\sigma\vartheta : \vartheta\tau$ (id est $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma$) $= \tau\vartheta : \vartheta\varrho$ **). Quod igitur dicit: "fiat ut $\varkappa\vartheta$ ad $\vartheta\sigma$, ita $\vartheta\sigma$ ad $\vartheta\tau$, et $\tau\vartheta$ ad $\vartheta\varrho$" extemplo erroris convincitur, ut qui quaesitum pro concesso sumat. Productâ enim rectâ $\xi\varkappa$ eique factâ aequali $\varkappa\mu^{\alpha}$ et iunctâ $\mu^{\alpha}\vartheta$ et rectae $\varkappa\mu^{\alpha}$ parallelis per puncta σ τ ϱ ductis, factum erit id quod quae-

*) Pro $3\frac{3}{5}$ Graecus scriptor ex suae gentis usu dicit $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

1) In brevius scriptor conclusionem contraxit; demonstrat enim in hoc casu rectam $\vartheta\varphi$ maiorem esse quam $\vartheta\varrho$; at vero eadem $\vartheta\varphi$ minor est quam $\vartheta\tau$, quoniam ex hypothesi est $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \vartheta\tau : \vartheta\varphi$; ergo punctum φ inter ϱ τ cadit.

**) In promptu erat et hic et statim posthac pro $\vartheta\varrho$ coniicere $\vartheta\varphi$; at ex proximis: "erit enim $\varkappa\mu^{\alpha} : \sigma\mu^{\beta}$" etc. apparet $\vartheta\varrho$ utroque loco recte se habere. Manet utique quaedam obscuritas, quia plena expositio scriptoris, cui Pappus adversatur, periit.

καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν KM^{α} τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΚΡ τῇ ΔΒ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΚΘ, ὥστε καὶ τὴν ΔΓ ἴσην εἶναι τῇ PM^{δ} καὶ ηὑρῆσθαι δύο τῶν ΔΓ ΒΔ, τουτέστιν δύο τῶν KM^{α} PM^{δ}, δύο μέσας ἀνάλογον τὰς ΣM^{β} TM^{γ}, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. εὐθείας γὰρ οὔσης τῆς ΘΚ καὶ σημείου ἐπ' αὐτῆς τοῦ Ρ, ἀδύνατόν ἐστι δι' ἐπιπέδου θεωρίας λαβεῖν μεταξὺ τῶν Ρ Κ δύο σημεῖα ὡς τὰ Τ Σ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως τὴν ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ τὴν ΤΘ πρὸς τὴν ΘΡ. ὥστε, κἂν τὸ Ζ λάβῃ ἀντὶ τοῦ Σ, καὶ οὕτως ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα· στερεὸν γάρ ἐστιν τῇ φύσει.

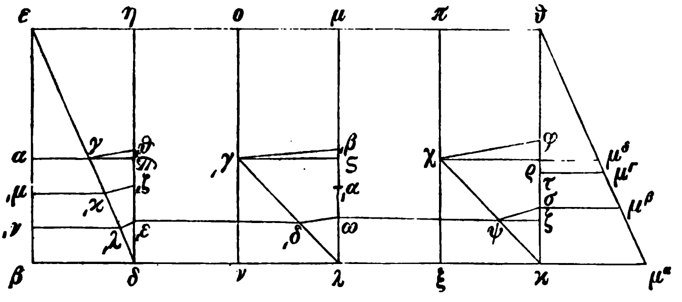
8 *διὰ τοῦτο δέ, οἶμαι, καὶ αὐτὸς εἰδὼς ὅτι τὸ ζητούμενον ὁμολογούμενον λαμβάνεται, οὐκ ἐτόλμησεν εἰπεῖν "τὸ ἕτερον πέρας τῆς ἐλαχίστης εὐθείας ἔστω τὸ Ρ," ἀνωτέρω δέ, τουτέστι μεταξὺ τῶν Ρ Θ, λαβὼν αὐτὸ κατὰ τὸ Φ, ἀποπληροῖ τὰ λοιπὰ τῆς κατασκευῆς ὡς βούλεται καὶ οὐδὲν ἧττον εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς ἄπορον ἐμπίπτει λανθανόμενος. οὐ γὰρ ἑκὼν ψευδογραφεῖ διὰ πλειόνων εἰς ἀπάτην τῶν ἐντυγχανόντων, ἀλλ' ἑαυτὸν παραλογιζόμενος, ὡς δείξω πρότερον κατὰ τὸν ὑγιῆ τρόπον ἐφοδεύσας τὸ προκείμενον [καὶ ὕστερον ἐλέγχων αὐτοῦ τὴν ὑπόθεσιν μὴ ὑγιῶς εἰλημμένην].*

9 *Ἐπεὶ τοίνυν δοθείς ἐστιν ὁ τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ λόγος καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΘΚ (τοῦτο γὰρ ὑποκεῖσθαι δεῖ), δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΡ καὶ λοιπὴ ἡ ΡΚ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΣΡ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΡΚ· ἦν δὲ καὶ ἡ ΡΘ δοθεῖσα· καὶ ὅλη*

---

1. 2. exspectaveris *ἡ δὲ ΚΡ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΒΕ*; sed in progressu demonstrationis scriptor ordinem invertit, ut ex proximis apparet *ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΚΘ Hu* auctore *Co*, *ἡ δὲ* $\overline{ΔΕ}$ *τῆι* $\overline{ΚΘ}$ AB¹S, *ἡ δὲ* $\overline{αε}$ *τῇ* $\overline{ρθ}$ B³V² 2. $P\overset{\alpha}{M}$ AB¹S, corr. B³V², item vs. 3 *ἡρυσθαι* (sine acc.) A (B¹), *ηὑρήσθαι* B⁴, corr. S 4. *τὰς σ*$\overset{\beta}{\mu}$ B³V², *τοὺς* | $\overset{\beta}{M}$ AB¹, *τὰς* $\overset{\beta}{\mu}$ S 6. 7. *τῶν* $\overline{ΡΚ}$ — *τὰ* $\overline{ΤΣ}$ A 8. *καὶ τὴν* $\overline{ΤΘ}$ AB³, *καὶ τὴν* $\overline{θτ}$ B¹S 11. *δὲ οἶμαι* V² pro *δέομαι* 12. *ὡς* ante *ὁμολ.* add. *Hu* 13. *ἔστω*] *esse Co*; voluit igitur *εἶναι* 14. *τῶν* $\overline{ΡΘ}$ A 16. *ἧττον* V² pro *πλέον* 17. *ἑκὼν ψευδογραφεῖ Hu* pro *ἐκ τῶν ψευδογραφεῖν* 20. *καὶ ὕστερον — εἰλημμένην*, manifestum interpretamentum, del. *Hu* *μη* A 22. *επιτοινυν δοθείσης ἐστιν* AB, corr. S

ritur, idque manifesta ratione. Erit enim $\varkappa\mu^{\alpha} : \sigma\mu^{\beta} = \sigma\mu^{\beta} : \tau\mu^{\Gamma} = \tau\mu^{\Gamma} : \varrho\mu^{\delta}$ (*elem. 6, 4*). Et est $\varkappa\mu^{\alpha} = \beta\delta$, et $\varkappa\varrho = \beta\alpha$, et $\varkappa\vartheta = \beta\varepsilon$, ita ut etiam sit $\alpha\gamma = \varrho\mu^{\delta}$ et inventae sint duarum $\alpha\gamma$ $\beta\delta$, sive $\varkappa\mu^{\alpha}$ $\varrho\mu^{\delta}$, duae mediae proportionales $\sigma\mu^{\beta}$ $\tau\mu^{\Gamma}$, id quod fieri nequit. Nam cum recta sit $\vartheta\varkappa$ in eaque punctum ϱ, nequaquam per planae figurae rationem inter ϱ $\varkappa$ duo puncta, velut τ σ, ita sumi possunt, ut sit $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \vartheta\sigma : \vartheta\tau = \tau\vartheta : \vartheta\varrho$. Quodsi forte ζ sumpserit ille pro σ, non magis poterit solvi problema, quippe quod natura solidum sit. Quapropter, opinor, ipse quoque sciens quaesitum se sumere pro concesso, dicere non ausus est alterum minimae rectae terminum esse ϱ, sed postquam supra ϱ, id est inter ϱ ϑ, eum *terminum* sumpsit in puncto φ, reliquam constructionem arbitrio suo complet; nihilo tamen minus in priorem difficultatem sensim relabitur. Neque enim sponte neque, ut legentes decipiat, falsa tradit longiore expositione, sed ipse se in errorem inducit, id quod equidem demonstrabo, postquam sana ratione propositum persecutus ero.



Quoniam igitur data est et proportio $\varkappa\vartheta : \vartheta\varrho$ et recta $\vartheta\varkappa$ (utrumque enim supponatur necesse est — *conf. supra p. 35*), data est etiam recta $\vartheta\varrho$ (*dat. 2*), itemque reliqua $\varkappa\varrho$ (*dat. 4*). Sed etiam $\sigma\varrho$ *data,* quia est dimidia $\varrho\varkappa$ (*dat. 7*); atque etiam $\vartheta\varrho$ data erat; ergo tota $\vartheta\sigma$ data est (*dat. 3*); itaque etiam *ἄρα ἡ ΘΣ δοθεῖσά ἐστιν, ὥστε καὶ ὁ λόγος τῆς ΚΘ πρὸς ΘΣ δοθείς ἐστιν· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ δοθεῖσα δέδεικται ἡ ΘΣ, δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΤΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΦ δοθεῖσα ἔσται, ὥστε καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ΘΡ ΘΦ εὐθειῶν δοθεῖσά ἐστιν. εὑρήσθω οὖν τὸ Φ μεταξὺ τῶν Θ Ρ, ὡς καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ δέδοται ἡ ΦΡ διαφορὰ καὶ ἡ τὰ Ρ Χ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἴση οὖσα τῇ ΞΚ, δοθὲν ἄρα τὸ ΦΧΡ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει. δοθεῖσα ἄρα ἡ ὑπὸ ΡΦΧ γωνία, καὶ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΚΣΨ ἐκτὸς γωνίᾳ· ἐκβληθείσης ἄρα καὶ τῆς ΩΨ ἐπὶ τὸ Ζ, δοθὲν ἔσται τὸ ΣΖΨ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἴδει.* ἀλλὰ καὶ τῷ μεγέθει *[οὕτως· ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΡΚ ΡΧ, δοθεῖσα ἔσται καὶ ἡ ΧΚ. καὶ λόγος ἐστὶν δοθεὶς τῆς ΧΚ πρὸς τὴν ΚΨ (ὁ αὐτὸς γάρ ἐστιν τῷ τῆς ΦΚ πρὸς τὴν ΚΣ λόγῳ δοθέντι)· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΨΚ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΨΣ δοθεῖσά ἐστιν, ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ ΦΚ πρὸς τὴν ΚΣ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΨΣ· καὶ δοθεῖσα δέδεικται ἡ ΦΧ· δοθεῖσα οὖν ἐστιν καὶ ἡ ΨΣ. ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΨΣΚ γωνία δοθεῖσα, ὥστε καὶ τὸ ΨΣΖ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ἔσται]. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΨΖ, παράλληλος οὖσα τῇ ΞΚ καὶ ἐπ' εὐθείας τῇ ΨΩ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΩΛ ἴση οὖσα τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΜΛ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΩΛ τῆς ΣΚ (ἴση γὰρ ἡ ΩΛ τῇ ΚΖ), καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως ἡ ΣΘ πρὸς τὴν ΘΤ καὶ ἡ ΤΘ πρὸς τὴν ΘΦ, ὡς δὲ ἡ ΛΜ πρὸς ΜΩ,*

---

1. 2. πρὸς $\overline{ΘΣ}$ δοθεῖσα AB^1, corr. B^3S 4. ἄρα add. *Hu* auctore *Co* 6. τῶν $\overline{ΘΡ}$ A, distinx. BS 7. καὶ ἐπιδέδοται A, corr. BS ἥ τε ΦΡ coni. *Hu* 8. τὰ Ρ Χ *Hu* pro $\overline{ΤΑ}$ $\overline{ΡΧ}$; errorem iam indicaverat B^4 lineola ducta sub τα 10. $\overline{ΡΦ}$ γωνία AB^1, corr. B^4S $\overline{ΚCΦ}$ ἐκτὸς AB^1, corr. B^4 *Co*, φ et ψ per dittographiam habet S 12. ἀλλὰ καὶ τῷ μεγέθει add. *Hu* (καὶ μεγέθει pro οὕτως coni. *Co*) 13. οὕτως — 21. δεδομένον ἔσται interpolatori tribuit *Hu*: vide adnot. ad Latina 15. αὐτὸς γάρ ἐστιν add. A^2 in rasura (BS) 21. post μεγέθει add. η (sic) A, ἡ B^1S, del. B^3V^2 22. ξκ B^4, $\overline{ΗΚ}$ B^1S, βκ V^2

proportio $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma$ (*dat. 1*). Et *ex hypothesi* est $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \vartheta\sigma : \vartheta\tau$; et demonstravimus datam esse $\vartheta\sigma$; ergo etiam $\vartheta\tau$ data erit. Eadem ratione etiam $\vartheta\varphi$ data erit, ita ut etiam differentia $\vartheta\varrho - \vartheta\varphi$ data sit. Iam inveniatur punctum φ inter $\vartheta\ \varrho$, sicut iam per numeros demonstratum est. Et quoniam data est differentia $\vartheta\varrho - \vartheta\varphi = \varphi\varrho$, itemque recta puncta $\varrho\ \chi$ iungens, quae aequalis est rectae $\xi\varkappa$, triangulum igitur orthogonium $\varphi\chi\varrho$ specie et magnitudine datum est (*dat. 41. 52*). Datus igitur est angulus $\varrho\varphi\chi$, isque *propter parallelas* $\chi\varphi\ \psi\sigma$ aequalis exteriori angulo $\varkappa\sigma\psi$; productâ igitur rectâ $\omega\psi$ ad ζ, triangulum $\sigma\zeta\psi$ specie datum erit (*dat. 40*). Sed idem etiam magnitudine[1]). Ergo etiam recta $\psi\zeta$ data est, quae rectae $\xi\varkappa$ parallela est et cum $\omega\psi$ unam rectam efficit; data est igitur etiam recta $\omega\lambda$, quae rectae $\zeta\varkappa$ aequalis est[2]). Et quia est $\vartheta\varkappa = \mu\lambda$, et $\sigma\varkappa > \omega\lambda$ (erat enim $\omega\lambda = \zeta\varkappa$) *ideoque* $\vartheta\sigma < \mu\omega$*), et $\varkappa\vartheta : \vartheta\sigma = \sigma\vartheta : \vartheta\tau = \tau\vartheta : \vartheta\varphi$, et $\lambda\mu : \mu\omega = \omega\mu : \mu_{,}\alpha = {}_{,}\alpha\mu : \mu_{,}\beta$, erit igitur

1) Graeca verba *οὕτως* usque ad *τῷ μεγέθει δεδομένον ἔσται* ab interpolatore addita esse facile inde apparet, quod illud quod Pappus modo demonstravit, triangulum $\sigma\zeta\psi$ specie datum esse, in his, quae spuria esse dicimus, plane neglegitur. Ac praeterea alia occurrunt, in quibus iure offendas, velut languida illa repetitio *δοθεῖσα οὖν ἐστιν καὶ ἡ ΨΣ*, et lacuna in demonstratione, cum primum triangulum $\psi\sigma\varkappa$, tum denique triangulum $\psi\sigma\zeta$ specie et magnitudine datum esse demonstrandum fuerit. Ne multa, equidem existimo huius interpolatoris culpa genuina Pappi verba, quae olim fuerunt, *ἀλλὰ καὶ τῷ μεγέθει* excidisse; id ipsum autem, triangulum $\sigma\zeta\psi$ etiam magnitudine datum esse, tanquam facile intellectu non disertis verbis a Pappo demonstratum esse (scilicet eadem ratione plurimas alias demonstrationes a scriptore omissas esse singulae paene huius editionis paginae docent). Iam vero id quod vetus scriptor praetermisit, sine negotio a nobis suppletur. Cum enim constet triangulum $\sigma\zeta\psi$ specie datum esse, restat ut demonstretur unum eius latus magnitudine datum esse (dat. 52). Et est data recta $\psi\sigma$, quoniam (id quod etiam interpolator vidit) est $\varphi\varkappa : \varkappa\sigma = \chi\varphi : \psi\sigma$, dataque est proportio $\varphi\varkappa : \varkappa\sigma$ ac data recta $\chi\varphi$ (triangulum enim $\varphi\chi\varrho$ specie et magnitudine datum).

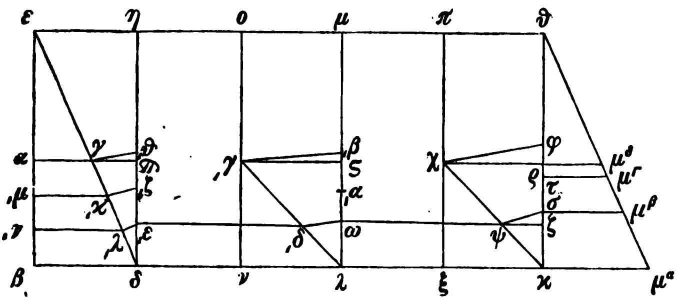
2) His verbis scriptor primum significat figuram $\omega\zeta\varkappa\lambda$ esse parallelogrammum orthogonium, ideoque specie datum; sed idem etiam magnitudine, quia ex data recta $\varkappa\zeta$ descriptum sit (dat. 52); ergo rectam $\omega\lambda$ magnitudine datam esse.

*) Haec "*ideoque* $\vartheta\sigma < \mu\omega$" in interpretatione addidi neque tamen propterea in Graecis *τουτέστιν ἡ ΜΩ μείζων τῆς ΘΣ* excidisse existimo; nam talia tacite suppleri voluit scriptor. Sed his saltem additis vide-

ἡ ΜΩ πρὸς τὴν ΜΔ καὶ ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΒ, ἔσται ἄρα μείζων ἡ ΜΒ τῆς ΘΦ (καὶ τοῦτο γὰρ ἑξῆς δειχθήσεται)· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΦΚ ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν πάλιν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΩΔ [ἐδείχθη ἴση γὰρ τῇ ΖΚ δοθείσῃ], δοθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΔΜ (ὅτι καὶ ἡ ΚΘ), καὶ λόγος ἄρα τῆς ΔΜ πρὸς ΜΩ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΩ, καὶ ἡ ΩΜ πρὸς τὴν ΜΔ, καὶ δοθεῖσα ἡ ΩΜ· δοθεῖσα
10 ἄρα καὶ ἡ ΜΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΒ δοθεῖσά ἐστιν, ὥστε καὶ τὸ Β σημεῖον δοθέν ἐστιν, ὅπερ ἔστω ὑποκείμενον, ὅπου βούλεται, ἤτοι μεταξὺ τῶν Ϛ Μ, ὡς νῦν ἐστιν, ἢ μεταξὺ τῶν Ϛ Δ, τῆς ϚΔ ἴσης ὑποκειμένης ἑκατέρᾳ τῶν ΚΡ ΔΒ ***. εἰ γὰρ λέγει τὸ Β πίπτειν κατὰ τὸ Ϛ, τὸ ζητούμενον οὐδὲν ἧττον ὡς ὁμολογούμενον λαμβάνει. φαίνεται γὰρ πάλιν ἐπὶ θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς ΜΔ, καὶ σημείου τινὸς ἐν αὐτῇ δοθέντος τοῦ Ϛ, λαβὼν μεταξὺ δύο σημεῖα τὰ Ω Δ καὶ ποιήσας ὡς τὴν ΔΜ πρὸς ΜΩ, τὴν ΩΜ πρὸς τὴν ΜΔ καὶ τὴν ΜΔ πρὸς τὴν ΜϚ, ὅπερ οὐδεὶς αὐτῷ συγχωρεῖ. τοῦτο γὰρ καὶ οἱ παλαιοὶ ζητοῦντες ἠπόρησαν διὰ τῶν ἐπιπέδων εὑρεῖν, ὡς καὶ αὐτὸς δείξω παραθέμενος τὰς ἐκείνων φωνάς. καὶ αὐτὸς δὲ οὐδὲν ἔχει λέγειν ἀνασκευαστικόν, ἐὰν λέγωμεν αὐτῷ "εἰ τὸ Ϛ ἐξ

1. ἡ ΜΩ πρὸς τὴν ΩΔ AB[1]S, corr. B[3]V[2] ἡ ΔΜ πρὸς τὴν Μ῍Β ABS, lineola sub Δ addita erat in B, sed nunc erasa est 2. ἡ Μ῍Β ABS 3. ἡ ΒΔ ABS, lineolam add. *Hu* 4. ἐδείχθη — δοθείσῃ del. *Hu* ἐδείχθη ἴση γὰρ AB[1]S, ἐδείχθη γὰρ ἴση B[3], ἴση γάρ, deleto ἐδείχθη, V[2] 5. post καὶ ἡ ΚΘ add. δοθεῖσα ἔσται καὶ ἡ μω V[2] 8. ἡ Μ῍Β ABS 9. ῍Β σημεῖον ABS ὅπερ ἔστω cet. non vacant corruptelae suspicione; certe ὅπου ἂν βούληται legenda esse videntur 10. τῶν ϚΜ AS, distinx. B 11. ἢ *Hu* auctore *Co* pro ἡ τῶν ϛά A, τῶν ϛᾳ BS, corr. V[2] ἑκατέρας AS, corr. B secundum Waitzii collationem 11. 12. τῶν ΚΡ ΔΒ *** *Hu*, τῶν ΚΡ ΔΒ ΧΞ ΤΝ AB[1], τῶν κραβ χξτν S, τῶν κρ αβ χξ ͵γν B[3]V[2] *Co*, τῶν κρ αβ καὶ χξ ͵γν B[4], in lacuna excidisse verba ἀδύνατόν ἐστιν τὸ πρόβλημα coniicias collata pag. 40, 10, vel εἰς ἄπορον δηλονότι ἐμπίπτει coll. p. 40, 16 12. τὸ ῍Β ABS 16. τὰ Ω Δ° A 17. τὴν ΜΔ° καὶ τὴν ΜΔ A 19. αὐτοδείξω A, αὐτὸ δείξω B, corr. S 21. τὸ ϛ] fallitur *Co* pro ϛ coniiciens Ƀ

$\vartheta\varphi < \mu_{,}\beta$ (nam hoc quoque infra *propos.* 2 demonstrabitur); ergo etiam $\varkappa\vartheta - \vartheta\varphi > \lambda\mu - \mu_{,}\beta$, *id est* $_{,}\beta\lambda < \varphi\varkappa$. Rursus quia data est $\omega\lambda$ (*sicut statim demonstravimus*) dataque



$\lambda\mu$ (quoniam aequalis est datae $\varkappa\vartheta$), ergo etiam *recta* $\mu\omega$ (*dat.* 4), *ideoque* proportio $\lambda\mu : \mu\omega$ data est. Et *ex hypothesi* est $\lambda\mu : \mu\omega = \omega\mu : \mu_{,}\alpha$, et data est $\omega\mu$; ergo etiam $\mu_{,}\alpha$ data est. Eadem ratione etiam rectam $\mu_{,}\beta$ datam esse *demonstratur* (*erat enim ex hypothesi* $\omega\mu : \mu_{,}\alpha = \mu_{,}\alpha : \mu_{,}\beta$), ideoque etiam punctum $_{,}\beta$ datum est (*dat.* 27), quod quidem, ubicunque ille vult, supponatur, sive inter puncta $\varsigma\ \mu$, ut nunc est, sive inter $\varsigma\ _{,}\alpha$ (siquidem supponatur $\varsigma\lambda = \varkappa\varrho = \alpha\beta$), *manifestus est error*. Quodsi, *id quod unum praeterea relinquitur,* punctum $_{,}\beta$ in ipsum ς cadere dicit, nihilo secius quaesitum sumit pro concesso. Nam rursus in recta $\mu\lambda$ positione data, in qua punctum ς datum sit, apparet eum inter $\varsigma\ \lambda$ duo puncta sumere et facere $\lambda\mu : \mu\omega = \omega\mu : \mu_{,}\alpha = \mu_{,}\alpha : \mu\varsigma$, quod quidem nemo ei concedit. Hoc enim iam veteres per plana inveniri posse desperaverunt, sicut ipse appositis illorum sententiis demonstrabo (*infra propos.* 5). Neque ille quidquam, quo nos refellat, afferre potest, si ei dicamus "si ς necessario est sectionis punctum tertiae pro-

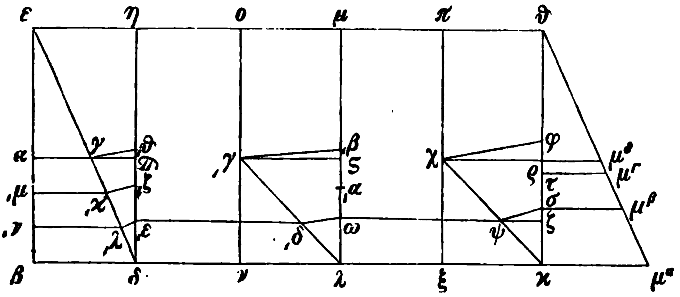
mus propositionem huius libri secundam, quam verbis καὶ τοῦτο γὰρ ἑξῆς δειχθήσεται scriptor significat, recte citari; quem ad finem etiam ordinem membrorum supra in Graecis paulo turbatum restitui.

ἀνάγκης τὸ τῆς τομῆς σημεῖον τοῦ τρίτου λόγου, δεῖξον ὅτι οὔτε μεταξὺ τῶν Ϛ Α δύναται πίπτειν οὔτε μεταξὺ τῶν Μ Ϛ." ἡμεῖς γὰρ ἀπεδείξαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἄνω τοῦ Ρ καὶ κάτω τὸ σημεῖον [πίπτει γὰρ παρὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ
11 *λόγου]. ὁμοίως οὖν τῆς ἀναλύσεως προχωρούσης ἐκ τοῦ δεδόσθαι τὸ ϚΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει, κἂν τὸ Β τῆς τομῆς σημεῖον μεταξὺ ᾖ τῶν Ϛ Α, δεδομένου δὲ καὶ τοῦ ΔΩΛ τριγώνου, ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον καὶ τῆς ΔΕ δεδομένης, ἔσται δοθεὶς καὶ ὁ τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν ὁ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ οὐδαμῶς πάλιν ὁ τῆς ΔΗ πρὸς τὴν Ηϡ, ἴσης ὑποκειμένης καὶ νῦν τῇ ΚΡ, τουτέστιν τῇ ΑΒ, τῆς Δϡ, κἂν τὸ Θ μεταξὺ βούληται πίπτειν τῶν Ζ ϡ. οὐδὲν γὰρ ἕξει καὶ ὧδε λέγειν ἀνασκευαστικόν, ἀκούων παρ' ἡμῶν "δεῖξον ὅτι μήτε μεταξὺ τῶν ϡ Η μήτε μεταξὺ τῶν*
12 *ϡ Ζ πίπτει." εἰ δὲ κατὰ συγχώρησιν ἁπλῶς τὸ τῆς τοιαύτης τομῆς σημεῖον εἶναι κατὰ τὸ ϡ βούλεται, τὸ ζητούμενον καὶ νῦν ὡς ὁμολογούμενον ἔλαβεν. μὴ διδομένου δ' αὐτῷ τὴν τομὴν εἶναι κατὰ τὸ ϡ σημεῖον (ἐπεὶ μηδὲ κατὰ τὸ Ρ συνεχωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΚΘ ποιούμενοι τὴν δεῖξιν), εἰ καὶ ἄλλο τι μεταξὺ τῶν Ε Η λαβεῖν ἐβούλετο, ὡς τὸ Ζ, αὐτὸς οὐκ οἶδά πως ἀπατηθεὶς τὸ Θ ἔλαβεν. ὡς βούλεται*

---

1. *δεῖξαν* B³ (voluit *δεῖξαι*) 2. *τῶν* Ϛ *Α'* A 3. *τῶν ΜϚ* AB⁸S, distinx. *Hu* 4. *πίπτει* — 5. *λόγου* del. *Hu* 6. *δεδόσθαι Hu* pro *δίδοσθαι* *τὸ* Ϛ*β͵γ* B³V², *τὸ* Ϛ *Φ' ι'* A, *τὸ* Ϛ*βι* B¹S 6. 7. *κἂν τὸ Β* A, *κἂν τὸ β* BS 7. *η* (sic) *τῶν* Ϛα A (BS) 8. *δὲ* add. *Hu* 9. *ΔΕ Hu* pro *ΔΕ* 10. *τουτέστιν ὁ τῆς ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ* om. S, unde *λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς ηε πρὸς ζη καὶ τῆς ζη πρὸς τὴν ηθ* coni. V² 11. *καὶ* ante *οὐδαμῶς*] *ἀλλ'* coni. *Hu* 11. 12. *πρὸς τὴν Ηϡ* *Hu* pro *ὁ πρὸς τὴν ΗΕ* 12. 13. *τῆς ΚΡ* — *τῆς ΑΒ τῆι Δϡ* ABS, corr. *Hu* 13. *τῆς Δϡ*] pro ϡ nota numerali A et hic et infra formam ϡ habet, quae in codicibus recentioribus aut in ipsum *τ* aut in formam simillimam abiit (etiam *Co* *τ* legit, Waitzius autem recte ϡ descripsit) *τῶν Ζϡ* AB, *τῶν ζ τ* S⁸ 15. *δεῖξον* A¹ ex *δεῖξων*, ut videtur, *δεῖξαν* B *τῶν ϡΗ* AB, *τῶν τη* S 15. 16. *τῶν ϡΖ* A, distinx. BS 16. *εἰ δὲ* S, *ηδε* (sine spir. et acc.) A, *ἤδε* B 18. *καὶ* ante *νῦν* add. B

portionis, demonstra id neque inter ϛ ͵α neque inter μ ϛ cadere posse." Nos enim initio (*cap. 5 sq.*) demonstravimus illud et supra ϱ et infra cadere posse. Similiter igitur resolutione procedente ex eo quod triangulum ϛ͵β͵γ specie et



magnitudine datum est (etiamsi ͵β sectionis punctum inter ϛ ͵α sit), datoque etiam triangulo ͵δωλ, denique, similiter ac supra demonstravimus, rectâ quoque δ͵ε datâ, erit etiam data proportio δη : η͵ε, id est ͵εη : η͵ζ, id est ͵ζη : η͵θ, minime autem proportio δη : ηϡ (hic quoque suppositâ δϡ = κϱ = βα), etiamsi ͵θ inter ϡ ͵ζ cadere velit. Etenim ne sic quidem habebit quod contra dicat, si a nobis audiat "demonstra punctum θ neque inter η ϡ neque inter ϡ ͵ζ cadere." At si simpliciter ex concessione illud sectionis punctum in ϡ esse velit, sic quoque quaesitum pro concesso sumpserit. Sin vero ei non concedatur sectionem esse in puncto ϡ (scilicet ne in ϱ quidem esse concedebamus, demonstrationem in recta κθ facientes), etsi aliud quod punctum inter ͵ε η, velut ͵ζ, sumere poterat, ipse quidem nescio quo pacto deceptus ͵θ sumpsit. Sed, quemadmodum

---

δεδομένον S 19. κατὰ alterum add. *Hu* 20. ποιούμενοι A¹ ex ποιουμένον (ποιεῖσθαι voluit *Co*) 20. 21. εἰ καὶ cet. aut lacunosa aut alioquin corrupta esse videntur; forsitan pro ἐβούλετο legendum sit ἐδύνατο 21. τῶν $\bar{E}$ H *Hu* auctore *Co*, τῶν $\overline{CK}$ AB, τῶν $\bar{\sigma}$ $\bar{\kappa}$ S τὸ $\bar{Z}$ ABS, lineolam add. *Hu* 22. ἔλαβεν *Hu*, λαβὼν ABS, *sumit Co*.

δέ, κείσθω χωρὶς τοῦ εἶναι κατὰ τὸ ΤΡ. καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΘΓ, καὶ παραλλήλους ἀγαγὼν τῇ μὲν ΓΘ τὰς ΖΚ ΕΛ, διὰ δὲ τῶν Κ Λ παραλλήλους τῇ ΑΓ τὰς ΚΜ ΛΝ, δῆλον ποιεῖ μὴ νενοηκέναι τὸ πρόβλημα. παραλλήλου γὰρ μὴ γενομένης τῇ ΕΗ τῆς ΘΓ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνία ἀμβλεῖα μέν ἐστι τοῦ Θ μεταξὺ τῶν Η ΤΡ πίπτοντος, ὀξεῖα δὲ τοῦ Θ μεταξὺ τῶν ΤΡ Ζ ὄντος· ἡ γὰρ πρὸς τῷ ΤΡ γωνία ὀρθή ἐστι, καθ' ἣν μόνως γίνεται τὸ πρόβλημα, ἐάν τις συγχωρήσῃ, καθὰ πολλάκις εἴπομεν, ἐπὶ θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς ΔΗ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ ΤΡ, λαβεῖν δύο σημεῖα ὡς Ε Ζ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὴν ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως τὴν
13 *ΗΕ πρὸς ΗΖ, καὶ τὴν ΗΖ πρὸς τὴν ΗΤΡ. μὴ διδομένου δὲ τούτου ἀδύνατον ἔσται τὸ προταθὲν ὑπ' αὐτοῦ διὰ τῶν ἐπιπέδων εὑρεθῆναι, ὡς καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει τοῖς βουλομένοις ἐξέσται πεισθῆναι, χρωμένοις τῷ Πτολεμαίου κανόνι περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν. ἀλλὰ τοῦτον μὲν ἀπορεῖν ὁμοίως τοῖς ἄλλοις βέλτιον ἦν ἤπερ οὕτως εὑρίσκειν, ἡμεῖς δὲ τὰ ὑπερτεθέντα νῦν δείξομεν.*

14 *β'. Ἔστω τις εὐθεῖα ἡ ΑΗ τετμημένη εἰς ἴσα κατὰ τὰ Β Γ Δ Ε Ζ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἡ ΒΓ πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ καὶ τὸ τρίτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ καὶ τὸ τέταρτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΓ καὶ τὸ πέμπτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ καὶ τὸ ἕκτον τῆς ΓΒ.*

*Ἔστι δὲ φανερὸν τῶν ἀριθμῶν παραληφθέντων *** καὶ ἀεὶ οὕτως, ὅτι ὡς ὁ δοθεὶς τῶν ἴσων εὐθειῶν ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸν μονάδι ἐλάσσονα, οὕτως ὁ μονάδι ἐλάσσων πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα καὶ τῆς ΓΒ μόριον ὁμώνυμον τῷ δοθέντι πλήθει τῶν ἴσων εὐθειῶν.*

---

1. *καὶ* A[1]B, *κὰν* A[2], ut videtur, unde *κἂν* S 2. 3. *τὰς* ΖΚ ΕΤΡ *διὰ δὲ τῶν* ΚΛ A, lineolas addidit et pro ΤΡ correxit Λ B[3] 3. *τῆι* ΑΓ *τὰ* ΚΜ ΛΝ A, *τὰς* corr. B[3]S, lineolam sub Α del. *Hu*, lineolas sub Μ ΛΝ add. B 5. *ὑπὸ* ΓΘΗ AS, lineolam sub Θ add. B *ἀμβλεῖα* B[3]V[2], /////// A, om. B[1]S 6. *τῶν* ΗΤΡ AB, sed cum Η in A litterae

vult, positum sit punctum extra ϙ. Tum ille iunctâ $\vartheta\gamma$, eique parallelis ductis $\zeta\varkappa$ $\varepsilon\lambda$, ac per puncta $\varkappa$ λ rectae $\alpha\gamma$ parallelis *ductis* $\varkappa\mu$ $\lambda\nu$, manifesto ostendit problema se non intellexisse. Nam cum $\vartheta\gamma$ rectae $\varepsilon\eta$ non parallela sit, angulus $\gamma\vartheta\eta$, si ϑ inter η ϙ cadit, obtusus est, sin autem inter ϙ ζ, acutus. Angulus enim ad ϙ rectus est, secundum quem problema hac una ratione efficitur, si quis, ut saepius iam diximus, concesserit in recta $\delta\eta$ positione data, datoque puncto ϙ, duo puncta velut ε ζ ita sumi posse, ut sit $\delta\eta : \eta\varepsilon = \varepsilon\eta : \eta\zeta = \zeta\eta : \eta$ϙ. Verum si hoc non concedatur, fieri non poterit ut id quod ab illo propositum est per plana inveniatur, idque etiam per ipsos numeros, convenienter cum *hac quam nos instituimus* resolutione, omnibus persuasum erit, si Ptolemaei tabulam de rectis in circulo lineis[1]) adhibebunt. At vero istum perinde ac reliquos de resolutione dubitare satius erat, quam ista ratione invenire. Nos autem ea quae supra (*cap. 6. 9. 10*) dilata sunt iam ostendamus.

II. Sit quaedam recta $\alpha\eta$, in partes aequales divisa in punctis β γ δ ε ζ; dico esse $\alpha\gamma : \gamma\beta = \gamma\beta : \frac{1}{2}\gamma\beta$, et $\alpha\delta : \delta\beta = \delta\beta : (\delta\gamma + \frac{1}{3}\gamma\beta)$, et $\alpha\varepsilon : \varepsilon\beta = \varepsilon\beta : (\varepsilon\gamma + \frac{1}{4}\gamma\beta)$, et $\alpha\zeta : \zeta\beta = \zeta\beta : (\zeta\gamma + \frac{1}{5}\gamma\beta)$, et $\alpha\eta : \eta\beta = \eta\beta : (\eta\gamma + \frac{1}{6}\gamma\beta)$. Prop. 1

Numeris *1*, *2*, *3* et sic porro adsumptis apparet, ut datum aequalium rectarum numerum inde a puncto α ad numerum unitate minorem, ita esse numerum unitate minorem ad proximum *numerum* unitate minorem unâ cum ea particula rectae $\gamma\beta$, quae datae multitudini aequalium rectarum respondeat (*vel, si una aequalis pars dicatur a, datus autem partium numerus sit x, esse* $\frac{ax}{a(x-1)} = \frac{a(x-1)}{a(x-2) + \frac{1}{x}a}$).

1) *Almageste ou astronomie de Ptolemée par Halma*, vol. I p. 38—45.

N simillimum sit, in S immigravit τῶν ν ϙ πίπτοντος B⁴ pro πίπτει 7. τῶν ϙZ A, distinx. BS ὄντος vel γινομένου add. *Hu* 10. $\overline{\varDelta H}$ *Hu* auctore *Co* pro $\overline{\varDelta K}$ 11. ὡς $\overline{EZ}$ A, distinx. BS 19. β' add. S ἡ $\overline{\varDelta N}$ A, corr. BS 20. τὰ $\overline{ABΓ}$ $\overline{\varDelta EZ}$ A, distinx. BS, et α erasum in B 22. τὸ τρίτον τῆς βγ S 23. τῆς ΓΒ *Hu* pro τῆς $\overline{BΓ}$ 23. 24. ἡ $\overline{αζ}$ πρὸς τὴν $\overline{βζ}$ S 25. τῆς ΓΒ *Hu* pro τῆς $\overline{BΓ}$ 27. παραλειφθέντων S post παραληφθέντων lacunam indicavit et οἷον τῶν α' β' γ' coni. *Hu* 28. ὅτι ὡς *Hu*, ὡς AS, om. B 29. οὕτως V² *Sca* pro ὅτι ὡς 30. τῆς $\overline{βγ}$ S

15 γʹ. Ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ Α Β, μείζων δὲ ἡ ΓΔ τῆς Ν [ἐλάσσων οὖσα ἑκατέρας τῶν Α Β], καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Ν, ἡ Ν πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ· λέγω ὅτι ἡ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς Ν, κείσθω τῇ Ν ἴση ἡ ΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ Β πρὸς τὴν Ν. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, γεγενήσθω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΕΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Β πρὸς Ν, ἡ Ν πρὸς Π, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α τῇ Β, ἡ δὲ ΓΚ τῇ Ν· δι᾽ ἴσου ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΕΛ, ἡ Β πρὸς τὴν Π· ἴση ἄρα ἡ ΕΛ τῇ Π. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΗΘ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΕΛ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΗΘ. ἔστω πρὸς τὴν ΗΜ· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΕΛ, ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΗΜ, ὡς δὲ ἡ Ν πρὸς τὴν Π, οὕτως ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ Ν, ἡ δὲ ΕΛ τῇ Π, ἴση ἄρα καὶ ἡ Ρ τῇ ΗΜ· ἐλάσσων ἄρα ἡ Ρ τῆς ΗΘ.

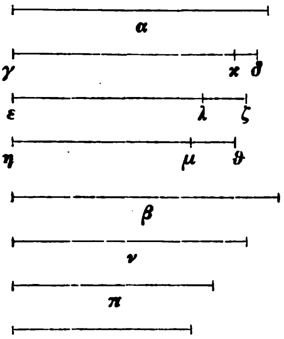
Ἄλλως τὸ αὐτό.

16 δʹ. Ἔστω ἴση ἡ Α τῇ Ε, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ζ, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Β πρὸς Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ, ὡς δὲ ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Η πρὸς τὴν Θ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ Δ τῆς Θ.

Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Β τῆς Ζ, ἴση δὲ ἡ Α τῇ Ε, ἡ Β ἄρα πρὸς τὴν Α μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ πρὸς τὴν Ε. ἀνάπαλιν ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ε πρὸς Ζ. ὡς δὲ ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Β πρὸς Γ· καὶ ἡ Β ἄρα πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ε πρὸς Ζ. ὡς δὲ

1. γʹ add. S αἱ $\overline{AB}$ et 2. τῶν $\overline{AB}$ A, distinx. BS 2. ἐλάσσων — τῶν Α Β interpolatori tribuit *Hu* 9. ὡς ἡ $\overline{α}$ B[3]S, ὡς $\overline{Δ}$ AB[1] 10. 11. ἐστὶν ἡ μὲν Α τῇ Β, ἡ δὲ] ἐστὶν ////////// δὲ A, om. B[1], ἐστὶν ἡ μὲν . τῇ . ἡ δὲ S, corr. B[3] *Sca* 11. $\overline{ΓΚ}$ τῆς $\overline{Ν}$ A, corr. BS 12. ἡ $\overline{β}$ πρὸς τὴν $\overline{π}$ B *Sca*, ////////// A, ἡ . . . . S 13. οὕτως ἡ ΕΖ] οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΕΖ voluit *Co* 21. $\overline{Δ}$ A[1] in marg. (S), om. B 25. ἡ Β ἄρα — p. 52, 2. ὡς δὲ ἡ Β] pro his nihil nisi

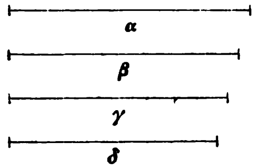
III. Sint aequales rectae α β, et recta $\gamma\delta$ maior quam ν [eademque minor quam α sive β], et fiat $\frac{\alpha}{\gamma\delta} = \frac{\gamma\delta}{\varepsilon\zeta} = \frac{\varepsilon\zeta}{\eta\vartheta}$, atque $\frac{\beta}{\nu} = \frac{\nu}{\pi} = \frac{\pi}{\varrho}$; dico esse $\varrho < \eta\vartheta$. Prop. 2



Quoniam enim est $\gamma\delta > \nu$, ponatur $\gamma\varkappa = \nu$; est igitur $\alpha : \gamma\varkappa = \beta : \nu$. Et quia est $\alpha : \gamma\delta = \gamma\delta : \varepsilon\zeta$, fiat $\alpha : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \varepsilon\lambda$. Sed est etiam $\beta : \nu = \nu : \pi$, et $\alpha = \beta$; ex aequali igitur est $\alpha : \varepsilon\lambda = \beta : \pi$ (*elem.* 5, 22); ergo $\varepsilon\lambda = \pi$. Eadem ratione, quia est $\alpha : \gamma\delta = \varepsilon\zeta : \eta\vartheta$, erit igitur ut $\alpha : \gamma\varkappa$, sive $\gamma\varkappa : \varepsilon\lambda$, ita $\varepsilon\lambda$ ad *aliam quandam* minorem quam $\eta\vartheta$. Sit ad $\eta\mu$; ac quoniam est $\gamma\varkappa : \varepsilon\lambda = \varepsilon\lambda : \eta\mu$, et $\nu : \pi = \pi : \varrho$, et $\gamma\varkappa = \nu$, et $\varepsilon\lambda = \pi$, est igitur etiam $\eta\mu = \varrho$; ergo $\varrho < \eta\vartheta$.

ALITER IDEM[1]).

IV. Sit recta $\alpha = \varepsilon$, et $\beta > \zeta$, et fiat $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$, atque $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{\eta}{\vartheta}$; dico esse $\delta > \vartheta$.



Quoniam est $\beta > \zeta$ et $\alpha = \varepsilon$, est igitur $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\zeta}{\varepsilon}$, et e contrario $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$. Sed est $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$; ergo etiam $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$. Sed $\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta}$;

1) Ubicunque in hac mathematica collectione unam demonstrationem sequitur altera sub Ἄλλως, in medio relinquitur, utrum hanc ipse Pappus ex amplissimo suo operum mathematicorum apparatu, an alius quidam scriptor posterioris aetatis adiecerit. Omnino modo hoc, modo illud factum esse videtur; et hoc quidem loco prior demonstrationis forma sine dubio est antiquior; altera multo tersior et expeditior, sed duobus aliis lemmatis (propos. 3 et 4) innititur, cum prior demonstratio per se stet.

haec habet S: ἡ $\overline{\beta}$ ἄρα πρὸς τὴν $\overline{\alpha}$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ζ πρὸς $\overline{\eta}$. ὡς δὲ ἡ $\overline{\beta}$; quae sic emendare conatus est *Sca*: ἡ α ἄρα πρὸς τὴν $\overline{\beta}$ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $\overline{\varepsilon}$ πρὸς $\overline{\zeta}$. καὶ ἡ $\overline{\beta}$ πρὸς $\overline{\gamma}$ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $\overline{\zeta}$ πρὸς η. ὡς δὲ ἡ $\overline{\beta}$ cet. 27. ἤπερ ἡ *E*] ἤπερ ἡ $\overline{H}$ $\overline{E}$ A, ἤπερ ἡ * $\overline{\varepsilon}$ B 28. ὡς δὲ ἡ *A* — 29. ἤπερ ἡ *E* πρὸς *Z* add. *Hu* *ἡ Ε πρὸς Ζ, οὕτως ἡ Ζ πρὸς Η· καὶ ἡ Β ἄρα πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ πρὸς Η. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς Γ, οὕτως ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ πρὸς Η. ὡς δὲ ἡ Ζ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς Θ· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η πρὸς Θ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ε πρὸς Ζ, ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ πρὸς Η, ἡ δὲ Γ πρὸς Δ ἐλάσσονα ἤπερ ἡ Η πρὸς Θ, δι' ἴσου ἄρα ἡ Α πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ε πρὸς Θ διὰ τὸ ἑξῆς. καὶ ἔστιν ἴση ἡ Α τῇ Ε· μείζων ἄρα ἡ Δ τῆς Θ, ὅπερ: ~*

17 *ε'. Ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Γ πρὸς Δ· ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β πρὸς τὴν Δ.*

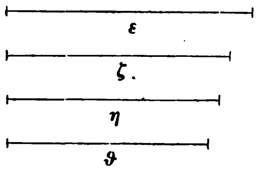
Πεποιήσθω ὡς ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς Ε· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῆς Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς Ε, ἐναλλὰξ ἄρα *ὡς ἡ Α πρὸς Γ, οὕτως ἡ Β πρὸς Ε. ἡ δὲ Β πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β πρὸς Δ· καὶ ἡ Α* ἄρα *πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β πρὸς Δ.*

18 *ϛ'. Τούτου δειχθέντος ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ε, ἐχέτω δὲ καὶ ἡ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἤπερ ἡ Ε πρὸς Ζ· ὅτι καὶ δι' ἴσου ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ.*

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ε, ἐναλλὰξ ἡ Α πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Β πρὸς Ε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ Β πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α πρὸς Δ πολλῷ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς Ζ, *ἐναλλὰξ ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ πρὸς Ζ, ὅπερ: ~*

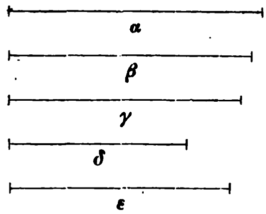
19 *ζ'. Ἃ μὲν οὖν ἔδει με προειπεῖν ἐστιν ταῦτα, παρεὶς*

5. *ἡ* $\overline{\Gamma\Delta}$ *ἄρα* AS, *ἡ* $\overline{\gamma}$ * *ἄρα* B, corr. etiam *Sca* 6. *ἡ* ante *H* om. AB³S (plura om. B¹), add. *Sca* 10. *ἴση ἡ* $\overline{\alpha}$ B³ ($\overline{\alpha}$ in rasura) *Sca*, *ἡ* $\overline{\Delta}$ AS 11. *ὅπερ* nulla sequente nota compendii A, *ὅπερ*: ~ B, *ὅπερ ἔδει* · ~ · S 12. $\overline{E}$ A¹ in marg. (S), om. B 17. *ἄρα* add. *Hu*, item vs. 19 21. $\overline{ϛ}$ A¹ in marg., om. BS 28. *ἐπεὶ οὖν* — 29. *ἡ Γ*



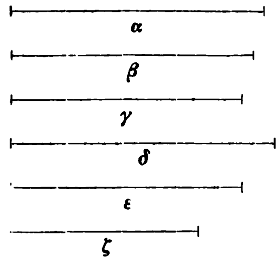
ergo etiam $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\zeta}{\eta}$. Sed $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$; ergo etiam $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\zeta}{\eta}$. Sed $\frac{\zeta}{\eta} = \frac{\eta}{\vartheta}$; ergo etiam $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\eta}{\vartheta}$. Iam quia est $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$, et $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\zeta}{\eta}$, et $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\eta}{\vartheta}$, ex aequali igitur est $\frac{\alpha}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\vartheta}$ propter *id quod* deinceps *demonstrabitur*. Et est $\alpha = \varepsilon$; ergo $\delta > \vartheta$ (*elem. 5, 10*), q. e. d.

V. Sit $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}$; dico etiam vicissim esse $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}$*). Prop. 3



Fiat $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$; est igitur $\frac{\gamma}{\varepsilon} < \frac{\gamma}{\delta}$ *ideoque* (*elem. 5, 10*) $\varepsilon > \delta$. Iam quia est $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$, vicissim igitur est $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\varepsilon}$. Sed est $\frac{\beta}{\varepsilon} < \frac{\beta}{\delta}$ (*elem. 5, 8*); ergo etiam $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}$.

VI. Hoc demonstrato sit $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\delta}{\varepsilon}$, et $\frac{\beta}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$; dico ex Prop. 4 aequali esse $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\delta}{\zeta}$.



Quoniam enim est $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\delta}{\varepsilon}$, *propter superius lemma* vicissim est $\frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\varepsilon}$. Eadem ratione est etiam $\frac{\beta}{\varepsilon} < \frac{\gamma}{\zeta}$. Iam quia est $\frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\varepsilon} < \frac{\gamma}{\zeta}$, vicissim igitur est $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\delta}{\zeta}$, q. e. d.

VII. Haec igitur sunt, quae me praefari necesse erat;

*) Idem paulo aliter demonstratur infra VII propos. 5.

πρὸς Ζ add. *Hu* partim auctore *Sca*, qui πολλῷ ἄρα μᾶλλον ἢ $\overline{α}$ πρὸς δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ $\overline{γ}$ πρὸς ζ coniecerat 31. $\overline{Z}$ A[1] in marg. (S), om. B *δὲ κρίνειν σοί τε καὶ τοῖς ἐν γεωμετρίᾳ γεγυμνασμένοις τὰ ὑπ' ἐκείνου προγραφέντα περὶ τῆς κατασκευῆς καὶ τὰ ὑφ' ἡμῶν ἐπενεχθέντα, καλῶς ἔχειν ἡγοῦμαι καὶ τὰ δόξαντα τοῖς ἀρχαίοις περὶ τοῦ προειρημένου προβλήματος ἐκθέσθαι καὶ πρῶτον εἰπεῖν ὀλίγα περὶ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων, ἀρχὴν λαβὼν ἐντεῦθεν.*

20 *Τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων οἱ παλαιοὶ τρία γένη φασὶν εἶναι, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτο ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι' ὧν λύεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ προβλήματα λύεται παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ πλειόνων, ταῦτα στερεὰ κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν ἀναγκαῖόν ἐστι χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς. τρίτον δ' ἔτι καταλείπεται γένος ὃ καλεῖται γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἕτεραι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν καὶ βεβιασμένην ἔχουσαι τὴν γένεσιν, ὁποῖαι τυγχάνουσιν αἱ* ἕλικες *καὶ τετραγωνίζουσαι καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσοειδεῖς, πολλὰ καὶ παράδοξα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι*
21 *συμπτώματα. τοιαύτης δὴ τῆς διαφορᾶς τῶν προβλημάτων οὔσης οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι τὸ προειρημένον ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον οὐχ οἷοί τ' ἦσαν κατασκευάζειν τῷ γεωμετρικῷ λόγῳ κατακολουθοῦντες, ἐπεὶ μηδὲ τὰς τοῦ κώνου τομὰς ῥᾴδιον ἐν ἐπιπέδῳ γράφειν ἦν [ὡς δεῖ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ], τοῖς δὲ ὀργάνοις μεταλαβόντες αὐτὸ θαυμασίως εἰς χειρουργίαν καὶ κατασκευὴν ἐπιτήδειον ἤγαγον, ὡς ἔστιν ἰδεῖν [ἀπὸ τῶν φερομένων αὐτοῖς συνταγμάτων, λέγω δ'] ἐν τῷ Ἐρατοσθένους μεσο-*

---

1. *τὰ*] *τά τε* coni. *Hu* 18. *εἰς τὴν γένεσιν* ABS, *εἰς τὴν κατασκευὴν* *Co*, corr. *Hu* 19. *βεβιασμένην* AS, sed litterae *βεβι* vix perspicuae in A, *μεταπλασμένην* B, *κατασκευασμένην* cod. Paris. 2369, *transmutabilem Co* 20. *τυγχά* ||||||||||||||| *καὶ* A *τυγ*........... *καὶ* B[1], *τυγχάνουσιν αἱ* ,.... *καὶ* B[3], *τυγχάνουσι* ......, *καὶ* S, *ἕλικες* add. *Co* *κοχλοει-*

sed tibi aliisque qui in geometria versati sunt et ea quae ille de constructione in medium protulit, et quae a nobis obiecta sunt, diiudicanda permitto, ac satius duco et veterum de hoc problemate sententias explicare et pauca de geometricis problematis in universum praemittere, cuius disputationis hinc iam initium faciam.

Geometricorum problematum veteres tria genera esse statuerunt, eorumque alia vocari plana, alia solida, alia linearia [1]). Quae igitur per rectas lineas et circuli circumferentias solvi possunt, ea merito plana dicantur, quoniam lineae, per quas eiusmodi problemata solvuntur, in plano originem habent. Quorum autem problematum resolutio adsumptis una pluribusve coni sectionibus invenitur, haec solida appellata sunt; nam ad eorum constructionem solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis, uti necesse est. Tertium autem relinquitur genus quod lineare vocatur; nam praeter eas quas statim descripsi lineas aliae variam et contortiorem originem habentes ad constructionem adhibentur, quales sunt helices *sive spirales*, tetragonizusae *sive quadratrices*, conchoides *sive conchiformes*, cissoides *sive hederae similes*, quae omnes multas et insignes proprietates (symptomata *Graeci vocant*) in se habent. Sic igitur cum problemata inter se differant, veteres geometrae illud quod supra positum est problema de duabus rectis *mediis proportionalibus*, quippe quod natura solidum esset, secundum geometricam rationem construere non potuerunt, quoniam coni sectiones in plano describere non facile erat; instrumentis autem adhibitis mirifice ad manuum operationem aptamque constructionem id perduxerunt [2]), sicut ex Eratosthenis mesolabo et Philonis

1) Eadem latius tractantur infra IV cap. 57 sq.
2) Conf. infra VIII cap. 25.

δεῖς A¹, *γ* superscr. A², unde *κογχλοειδεῖς* B¹, *κογχοειδεῖς* B⁴S 21. *αὐτὰς* AB¹S, corr. B³ 27. *ὡς δεῖ* — 28. *ἀναλογίᾳ* del. *Co* 30. *ἀπὸ τῶν* — 31. *λέγω δ'* et p. 56, 1. *ἢ καταπαλτικοῖς* interpolatori tribuit *Hu*; ceterum pro *αὐτοῖς συνταγμάτων* ille *ἐν τοῖς αὐτῶν συντάγμασι* voluisse videtur

λάβῳ καὶ τοῖς Φίλωνος καὶ Ἥρωνος μηχανικοῖς [ἢ καταπαλτικοῖς]. οὗτοι γὰρ ὁμολογοῦντες στερεὸν εἶναι τὸ πρόβλημα τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ μόνον ὀργανικῶς πεποίηνται [συμφώνως Ἀπολλωνίῳ τῷ Περγαίῳ, ὃς καὶ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ πεποίηται διὰ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ ἄλλοι διὰ τῶν Ἀρισταίου τόπων στερεῶν, οὐδεὶς δὲ διὰ τῶν ἰδίως ἐπιπέδων καλουμένων], Νικομήδης δὲ λέλυκε διὰ κοχλοει-
22 *δοῦς γραμμῆς, δι' ἧς καὶ τὴν γωνίαν ἐτριχοτόμησεν. ἐκθησόμεθα οὖν τέσσαρας αὐτοῦ κατασκευὰς μετά τινος ἐμῆς ἐπεξεργασίας, ὧν πρώτην μὲν τὴν Ἐρατοσθένειον, δευτέραν δὲ τὴν τῶν περὶ Νικομήδη, τρίτην δὲ τὴν τῶν περὶ Ἥρωνα μάλιστα πρὸς τὰς χειρουργίας ἁρμόζουσαν τοῖς ἀρχιτεκτονεῖν βουλομένοις, καὶ τελευταίαν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἀνευρημένην. [στερεοῦ γὰρ παντὸς ἕτερον στερεόν, ὅμοιον τῷ δοθέντι, κατασκευάζεται πρὸς τὸν δοθέντα λόγον, ἐὰν δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς Ἥρων ἐν μηχανικοῖς καὶ καταπαλτικοῖς.]*

23 *Ἔστω οὖν πλινθίον πεπηγὸς τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα τὰ ΑΕΘ ΜΖΚ ΝΗΛ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Ε Ζ Η γωνίας, καὶ τὸ μὲν ΑΕΘ προσπεπηγὸς μενέτω, τὸ δὲ ΜΖΚ τὴν κίνησιν ἐχέτω ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ κανόνων οὕτως ὥστε τὴν μὲν ΜΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒ κανόνος φέρεσθαι ἔχοντος σωλῆνα δι' ὅλου, τὴν δὲ κορυφὴν τὴν Κ*

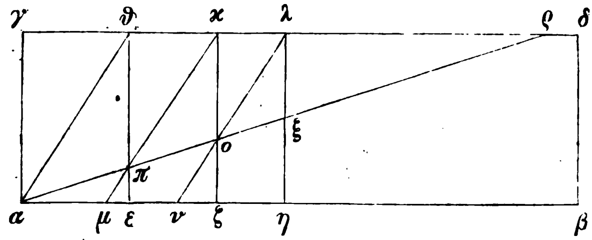
---

4. *συμφώνως* — 7. *καλουμένων* interpolatori tribuit *Hu* 7. *λέλυκε Hu* pro *καὶ λόγωι* *κοχλοειδοῦς* A[1] ante rasuram, *κογχλοειδοῦς* B[1], *κογχοειδοῦς* A[2]B[3]S 8. *γραμμῆς* B et S correctus (incertum an a Scaligero), *γραμμικῆς* AS[1] 10. *τὴν* ante *Ἐρατ.* om. AB, add. S 11. *τὴν περὶ τὸν νικομήδη* S 14. *στερεοῦ* — 17. *καταπαλτικοῖς*] nec falsum est hoc theorema nec suspecta Heronis, qui citatur, auctoritas; tamen haec interpretamenti loco ab aliena manu addita esse apparet 14. *στερεοῦ παντὸς* interpolator ex *ἕτερον* suspensa esse voluit (*στερεοῦ γὰρ δοθέντος* coniecerat *Hu*, *στερεοῦ γὰρ παντὸς δεδομένου Co*) 15. *τῶν* del. *Hu* 18. *τὸ ΑΒ ΓΔ* A, coniunx. BS 19. *ἴσα* A[2] ex *ἴ*α* *μζκ νηλ* B[3]V[2], *ΜΖ ΚΜΗΛ* A, *μζκ μηδ* S, *μζκ μηλ* B[1] 20. *τὰ πρὸς* AB[1], corr. B[3]S 21. *ἐπὶ* om. AB[1]S, add. B[4]V[2] *Co* 23. *σωλῆνα Sca*, *σωληνίσκον Hu*, octo fere litterae evanidae in A, lacuna in BS

Heronisque mechanicis cognoscere licet. Hi enim, de solida problematis natura consentientes, constructionem eius nulla alia ratione nisi per instrumenta effecerunt [convenienter Apollonio Pergaeo, qui resolutionem eius etiam per coni sectiones invenit, aliique per Aristaei locos solidos, nemo autem per plana quae proprie dicuntur]; Nicomedes autem per lineam conchoidem solvit, per quam etiam angulum tripartito divisit. Ita fit, ut, addito meo quodam supplemento, iam quattuor problematis constructiones exponendae sint, primum Eratosthenica, tum ea quam Nicomedis schola amplectitur, tertium illa quae Heronianis probatur, maxime ad manuum operationem iis qui architecturae student accommodata, postremo ea quae a nobis inventa est. [Nam ad quidvis *datum* solidum alterum solidum, dato simile, iuxta datam proportionem construitur, si duabus datis rectis duae mediae in continua proportione sumantur, ut Hero docet in mechanicis et catapulticis.]

Duabus datis rectis duae mediae in continua proportione inveniantur. Prop. 5

Sit igitur, *inquit Eratosthenes* [1], margo compactus, forma rectanguli oblongi, $\alpha\beta\gamma\delta$, in eoque triangula orthogonia



aequalia $\alpha\varepsilon\vartheta$ $\mu\zeta\varkappa$ $\nu\eta\lambda$, rectos angulos ad puncta ε ζ η habentia, et triangulum $\alpha\varepsilon\vartheta$ fixum maneat, triangulum autem $\mu\zeta\varkappa$ moveatur in regulis $\alpha\beta$ $\gamma\delta$*), ita ut latus $\mu\zeta$ in regula $\alpha\beta$ feratur canalem per totam longitudinem habente, vertex

1) Multum differunt ea quae Eutocius in Archimedis de sphaera et cylindro libr. II (p. 145 sq. ed. Torell.) ab Eratosthene ad Ptolemaeum regem scripta esse tradit.

*) "Ex epistola Eratosthenis, quae legitur in commentariis Eutocii in secundum librum Archimedis de sphaera et cylindro (p. 145) apparet ipsum voluisse medium parallelogrammum seu triangulum affixum esse et manere, non primum. Sed res in idem recidit; nam etiam si ultimum maneat et alia duo moveantur, idem plane continget." *Co.*

διὰ τοῦ ΓΔ κανόνος καὶ αὐτοῦ δι' ὅλου τοῦ μήκους σεσωληνισμένου, παραπλησίως δὲ καὶ τὸ ΝΗΛ τρίγωνον ἐχέτω τὴν κίνησιν ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ κανόνων κατὰ τοὺς προειρημένους ὀχετούς. τούτων δὴ οὕτως ὑποκειμένων, ὅτε βούλοιτό τις κύβον κύβου διπλασίονα ποιῆσαι, διπλασίαν ἀπολαμβάνων τὴν ΑΓ τῆς ΑΞ καὶ διιστὰς τὰ ΜΖΚ ΝΗΛ τρίγωνα, μέχρις ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ Α Ξ σημεῖα ταῖς τῶν τριγώνων τομαῖς ταῖς Π Ο, ἐπιζεύξει τὴν ΑΠΟΞ συμπίπτουσαν τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ρ (τοῦτο γὰρ κατ' ἀνάγκην ὀφείλει ἐπακολουθεῖν), καὶ οὕτως τὸ προκείμενον αὐτῷ συμβαίνει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΠΘ, οὕτως ἡ ΑΡ πρὸς ΠΡ, καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΠΚ, καὶ ἡ ΘΡ πρὸς ΡΚ, καὶ ἡ ΠΘ πρὸς ΟΚ, καὶ ἡ ΠΡ πρὸς ΡΟ, καὶ ἡ ΠΚ πρὸς ΟΛ, καὶ ἡ ΚΡ πρὸς ΡΛ, καὶ ἡ ΟΚ πρὸς ΛΞ, τῶν ΑΓ ΛΞ ἄρα δύο μέσαι εἰσὶν αἱ ΠΘ ΟΚ κατὰ συνεχῆ ἀναλογίαν. καὶ ἔστι διπλασία ἡ ΑΓ τῆς ΛΞ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΓ κύβος τοῦ ἀπὸ τῆς ΠΘ κύβου. εἰ δ' ἄλλον τινὰ λόγον ἔχει ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον, ἐκεῖνον τὸν λόγον ἔδει ἔχειν καὶ τὴν ΑΓ πρὸς ΛΞ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως κατασκευάζειν. [καὶ ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τὸ προκείμενον διὰ τῶν ἐπιπέδων λύεσθαι.]

24 *η'. Κατὰ δὲ Νικομήδη δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ ΔΑ δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς λαμβάνονται τρόπῳ τοιῷδε.*

Συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς Δ Ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΔ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΒ

---

1. *γδ κανόνος* Sca et *καὶ αὐτοῦ* Hu, ////////////| *του* A, post lacunam *του* B, *τοῦ* S 2. *νηλ* B[3] in rasura, *ΝΛΜ* AS, *νλη* V[2] Sca 3. *κατὰ* Sca, per Co, *καὶ* ABS 4. *ὅταν βούληταί* — 5. *ποιῆσαι, ἡμίσειαν ἀπολαμβάνων τῆς ΑΓ τὴν ΛΞ* coni. Hu 6. *ΜΖ ΚΝΗΛ* A, corr. BS 7. *τὰ ΛΞ* et 8. *ταῖς ΠΟ* A, distinx. BS 13. *πρὸς ΠΚ*] *πρὸς ΚΗ* AS, *πρὸς κπ* B, corr. V[2] Sca 14. *πρὸς ΟΚ*] *πρὸς ΘΚ* AB[1]S, corr. B[3]V[2] Sca *πρὸς ΡΟ*] *πρὸς ΡC* ABS, corr. B[3]V[2] Sca 16. *αἱ ΠΘ ΟΚ*] *αἱ ΗΘ ΕΚ* AS, *αἱ πθ εκ* B[1], corr. B[3]V[2] Sca 19. *ἔχοι ὁ κύβος* Hu

autem $\varkappa$ in regula $\gamma\delta$ ipsa quoque per totam longitudinem canalis instar excavata, ac similiter triangulum $\nu\eta\lambda$ in regulis $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ per eosdem canales moveatur. Quae cum ita praeparata sint, si quis cubum cubi duplum facere velit, rectam $\lambda\xi$ dimidiam rectae $\lambda\eta$, *id est* $\gamma\alpha$, abscindat, tum triangula $\mu\zeta\varkappa$ $\nu\eta\lambda$ distrahat, donec puncta α ξ in eadem recta, in qua triangulorum sectiones π o, posita sint, denique rectam $\alpha\pi o\xi$ iungat, quae rectae $\gamma\delta$ in puncto ϱ occurrat (hoc enim fieri necesse est), et sic illud quod ei propositum est contingit.

Nam cum sit

$$\frac{\alpha\gamma}{\pi\vartheta} = \frac{\alpha\varrho}{\pi\varrho} = \frac{\alpha\vartheta}{\pi\varkappa} = \frac{\vartheta\varrho}{\varkappa\varrho} = \frac{\pi\vartheta}{o\varkappa} = \frac{\pi\varrho}{o\varrho} = \frac{\pi\varkappa}{o\lambda} = \frac{\varkappa\varrho}{\lambda\varrho} = \frac{o\varkappa}{\xi\lambda},$$

rectarum igitur $\alpha\gamma$ $\xi\lambda$ duae mediae in continua proportione sunt $\pi\vartheta$ $o\varkappa$. Et est $\alpha\gamma$ duplo maior[1]) quam $\xi\lambda$; ergo etiam cubus ex $\alpha\gamma$ duplo maior est quam cubus ex $\pi\vartheta$*). Si autem aliam quandam proportionem alter cubus ad alterum habeat, eandem quoque recta $\alpha\gamma$ ad $\xi\lambda$ habeat necesse est, quo facto reliqua eodem modo construuntur. [Atque ex his apparet propositum per plana solvi non posse.]

VIII. Nicomede autem auctore, datis duabus rectis $\gamma\delta$ $\delta\alpha$, duae mediae continuo *proportionales* sumuntur hoc modo[2]).

Compleatur $\alpha\beta\gamma\delta$ parallelogrammum, et rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ in punctis λ ε bifariam secentur, et iuncta $\delta\lambda$ producatur rectae-

1) Duplo maior cum latine pro Graeco διπλάσιος sive διπλασίων dicimus, ac similiter triplo maior pro τριπλάσιος etc., ablativi *duplo*, *triplo* non differentiam, sed proportionem significant, velut si dixeris *dupla proportione maior* etc.

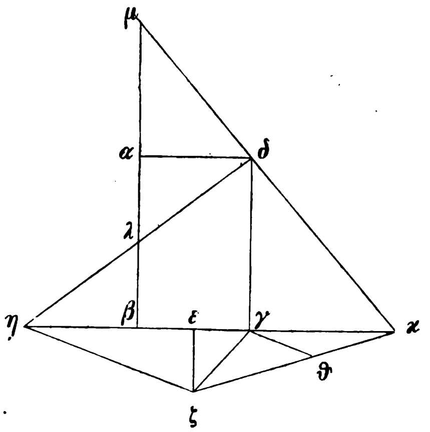
*) Conf. elem. 5 def. 11; 8, 12; 11, 33; Bretschneider, *die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Lipsiae 1870, p. 98 sq. 141 sq. Copiosius de eo argumento expositum est a nobis in Fleckeiseni annalibus (*Neue Jahrbücher für Philologie und Paedagogik*, vol. 107, Lipsiae a. 1873 p. 493—501).

2) Eadem demonstratio, paucis admodum mutatis, infra redit IV propos. 24, congruens illa quidem cum Eutocii commentariis in Archimedem.

---

21. *καὶ ἐκ* — 22. *λύεσθαι* interpolatori tribuit *Hu*   23. $\overline{H}$ A[1] in marg. (S), om. B   27. *τοῖς* $\overline{ΔΕ}$ A, distinx. BS   28. *η ΔΔ*] *η Δ Δ Hu*

ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ ἴση οὖσα τῇ ΑΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ, καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν ΚΓΘ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ζ διήχθω ἡ ΖΘΚ ποιοῦσα ἴσην τὴν ΘΚ τῇ ΑΛ ἢ τῇ ΓΖ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς), καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ καὶ ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ τέτμηται δίχα τῷ Ε καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΓΚ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΚ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΕΖ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ. καὶ ἔστιν τῆς μὲν ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΛ, τῆς δὲ ΒΓ διπλῆ ἡ ΓΗ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ διὰ τὰς παραλλήλους

1. ante τῇ ΒΓ, ut plurimis aliis locis, cogitatione addendum est ἤχθω, quod ne forte in contextum inserendum esse putes, conf. etiam infra IV propos. 24 3. ἡ ante ΓΘ om. A[1], add. A[2]BS 8. τῇ ΑΛ η τῇ ΓΖ] pro η coni. τουτέστιν Hu 10. ἐδείχθη] demonstratum hoc esse a Nicomede, non a se ipso, Pappus dicere voluit; aliter autem idem ἐδείχθη infra sonat IV cap. 43 11. κοχλοειδοῦς A[1], κογχλο-

que $\gamma\beta$ productae occurrat in puncto η, et rectae $\beta\gamma$ perpendicularis *ducatur* $\varepsilon\zeta$, *cuius punctum* ζ *ita sumatur, ut* iuncta $\gamma\zeta$ aequalis sit rectae $\alpha\lambda$ *), et iungatur $\zeta\eta$ eique parallela *ducatur* $\gamma\vartheta$, et *productâ* $\beta\gamma$ *ad punctum* $\varkappa$ (*adhuc definiendum*), cum *datus* sit angulus $\varkappa\gamma\vartheta$ **), a dato puncto ζ recta $\zeta\vartheta\varkappa$ ita ducatur, ut $\vartheta\varkappa$ aequalis sit rectae $\alpha\lambda$ sive $\gamma\zeta$ — hoc enim fieri posse demonstratum est per conchoidem lineam [1]) — et iuncta $\varkappa\delta$ producatur occurratque rectae $\beta\alpha$ productae in puncto μ; dico esse $\delta\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\delta$.

Quoniam enim $\beta\gamma$ bifariam secta est in puncto ε eique *in eâdem rectâ* addita est $\gamma\varkappa$, est igitur *propter elem. 2, 6*

$\beta\varkappa\cdot\varkappa\gamma + \gamma\varepsilon^2 = \varepsilon\varkappa^2$. Commune addatur $\varepsilon\zeta^2$; est igitur

$\beta\varkappa\cdot\varkappa\gamma + \gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2 = \varepsilon\varkappa^2 + \varepsilon\zeta^2$, id est

$\beta\varkappa\cdot\varkappa\gamma + \gamma\zeta^2 = \varkappa\zeta^2$. Et quoniam *propter parallelas* $\alpha\delta$ $\beta\varkappa$ est

$\mu\alpha : \alpha\beta = \mu\delta : \delta\varkappa$, et *propter parallelas* $\mu\beta$ $\delta\gamma$

$\mu\delta : \delta\varkappa = \beta\gamma : \gamma\varkappa$, est igitur etiam

$\mu\alpha : \alpha\beta = \beta\gamma : \gamma\varkappa$. Et est $\alpha\beta = 2\,\alpha\lambda$, et $\beta\gamma = \frac{1}{2}\,\eta\gamma$ (*quia* $\eta\beta = \alpha\delta = \beta\gamma$); ergo erit etiam [2])

$\mu\alpha : \alpha\lambda = \eta\gamma : \gamma\varkappa$. Sed propter parallelas $\eta\zeta$ $\gamma\vartheta$ est $\eta\gamma : \gamma\varkappa = \zeta\vartheta : \vartheta\varkappa$; ergo etiam componendo

*) "Oportet ex duabus datis $\overline{\gamma\delta}$ $\overline{\delta\alpha}$ maiorem esse $\tau\grave{\eta}\nu$ $\overline{\delta\gamma}$. aliter enim $\overline{\gamma\zeta}$ aequalis $\overline{\alpha\lambda}$ non subtenderet angulum rectum $\overline{\gamma\varepsilon\zeta}$" V[2].

**) Datum esse angulum $\varkappa\gamma\vartheta$ ex iis demum sequitur quae libro IV propos. 24 ab initio supponuntur.

1) Vide infra IV propos. 23 sq. et conf. adnot. ad Graeca p. 60, 10.

2) Hic adnotat V[2] "quia id quod fit ex $\overline{\alpha\beta}$ $\overline{\beta\gamma}$ est aequale ei quod fit ex $\overline{\alpha\lambda}$ $\overline{\eta\gamma}$", idem igitur per formulam multiplicationis significat, quod Pappus per proportionem tacite supplevit, si sit $a : b = c : d$, esse etiam $a : \frac{1}{2}b = 2c : d$.

ειδοῦς B[1], κογχοειδοῦς A[2]B[3]S 14. καὶ συμπιπτέτω BV[2] (conf. supra p. 58, 28 et infra IV cap. 43), tot fere litterae partim evanidae partim charta agglutinata inductae in A, om. S, ἕως ἂν συμπίπτῃ *Sca* 18. ὡς ἡ $\overline{\Delta\Gamma}$ πρὸς $\overline{\Gamma K}$] /// //////|$\overline{K}$ A, ὡς * $\overline{\gamma\delta}$ πρὸ* *$\overline{\varkappa}$ B[1], ὡς ἡ $\overline{\gamma\delta}$ πρὸς $\overline{\gamma\varkappa}$ B[3], ... ἡ $\overline{\beta\varkappa}$ S, ὡς ἡ $\overline{\mu\beta}$ πρὸς $\overline{\beta\varkappa}$ V[1], corr. V[2] *Sca* (praeter necessitatem insuper οὕτως add. *Sca* 21. ἡ $\overline{\gamma\varkappa}$ B[3]V[2] *Sca*, ἡ $\overline{\Pi K}$ AB[1]S τὰς ΗΖ ΓΘ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΔ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ ΔΔ τῇ ΘΚ [ἐπεὶ καὶ τῇ ΓΖ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΔ]· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΖΚ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΜΔ τῷ ἀπὸ ΖΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ ΜΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΜΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΔ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ὧν τὸ ἀπὸ ΔΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΖ (ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΔ τῇ ΓΖ)· ἴσον ἄρα καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΒΜΔ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΒΚΓ· ὡς ἄρα ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΜΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΔΜ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΚΓ πρὸς ΔΜ καὶ ἡ ΜΔ πρὸς ΔΔ.

25 θ'. Κατὰ δὲ τοὺς περὶ τὸν Ἥρωνα, πῶς ἐστιν δυνατὸν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ὀργανικῶς, δείξομεν, ἐπειδήπερ ἐστὶν τὸ πρόβλημα τοῦτο, καθά φησιν καὶ ὁ Ἥρων, στερεόν. "ἐκθησόμεθα δέ" φησιν "τῶν δείξεων τὴν μάλιστα πρὸς τὴν χειρουργίαν εὔθετον."

26 Ἔστωσαν γὰρ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κείμεναι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΔΓ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΓΑ, καὶ παρακείσθω κανόνιον πρὸς τῷ Β σημείῳ καὶ κινείσθω

---

2. ἐπεὶ καὶ — 3. ἡ ΔΔ interpolata esse putat *Hu*, quamvis eadem infra IV cap. 43 et apud Eutocium redeant 3. ἡ ΔΔ] ἡ $\overline{\text{ΔΔ}}$ AS, corr. B *Sca* 7. 8. τὸ ἀπὸ $\overline{\text{ΔΔ}}$ | A[1], tum post exitum versus Ϛ' (i. e. ἴσον) τῶι et ante initium proximi versus ἀπὸ $\overline{\text{ΓΖ}}$. ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ $\overline{\text{ΔΔ}}$ adscripsit A[2], porro τῆι $\overline{\text{ΓΖ}}$ ἴσον ἄρα καὶ cet. A[1] 14. $\overline{\text{Θ}}$ A[1] in marg. (S), om. B 17. ὃ ante ἐκθησόμεθα add. ABS, del. *Hu* 20. ἀλλήλαις B[3]S, ἀλλήλας A, om. B[1] 21. τὸ $\overline{\text{ΑΒ}}$ $\overline{\text{ΓΔ}}$ A, coniunx. BS 22. ἐπεζεύχθωσαν BS, in A manus secunda (an alia recentior?) in particula membranarum antiquae scripturae superducta scripsit ἐπεζεύχθω, tum initio proximi versus sequitur σαν pr. m. exaratum 22. αἱ $\overline{\text{ΔΒ}}$ $\overline{\text{ΓΔ}}$ A, corr. BS 23. Β σημείῳ] octo decemve litterarum spatium inductum in A, $\bar{\beta}$ .... B *Sca*, $\bar{\beta}$ σημειω B[4], om. S

$\mu\lambda : \alpha\lambda = \zeta\varkappa : \vartheta\varkappa$. Sed ex hypothesi est $\alpha\lambda = \vartheta\varkappa$; ergo etiam $\mu\lambda = \zeta\varkappa$, et

$\mu\lambda^2 = \varkappa\zeta^2$. Et *propter elem. 2, 6* est

$\mu\lambda^2 = \beta\mu \cdot \mu\alpha + \alpha\lambda^2$, et *supra* demonstratum est

$\varkappa\zeta^2 = \beta\varkappa \cdot \varkappa\gamma + \gamma\zeta^2$. Iam in his est $\alpha\lambda^2 = \gamma\zeta^2$ (nam ex hypothesi est $\alpha\lambda = \gamma\zeta$); ergo etiam subtrahendo

$\beta\mu \cdot \mu\alpha = \beta\varkappa \cdot \varkappa\gamma$, id est *proportione facta* (*elem. 6, 16*)

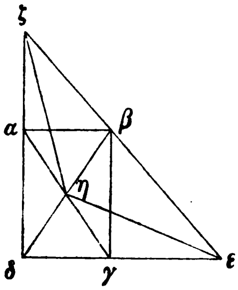
$\mu\beta : \beta\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha$. Sed *propter parallelas $\mu\beta$ $\delta\gamma$* est $\mu\beta : \beta\varkappa = \delta\gamma : \gamma\varkappa$; ergo etiam

$\delta\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha$. Sed *propter parallelas $\beta\varkappa$ $\alpha\delta$* est $\mu\beta : \beta\varkappa = \mu\alpha : \alpha\delta$, *ideoque*

$\gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\delta$; ergo etiam

$\delta\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\delta$.

IX. Quomodo autem secundum Heronem[1]) eiusque sectatores duabus datis rectis duae mediae proportionales inveniri possint instrumento adhibito, iam demonstraturi sumus, quoniam hoc problema, sicut etiam ipse Hero dicit, solidum est. "Exponemus autem" inquit "demonstrationem omnium maxime ad manuum operam accomodatam" [2]).



Sint enim datae rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ ad rectos angulos inter se positae, quarum duae mediae proportionales inveniendae sunt.

Compleatur $\alpha\beta\gamma\delta$ parallelogrammum, et producantur $\delta\gamma$ $\delta\alpha$ *ad puncta* (*nondum definita*) ε ζ *), iunganturque *$\delta\beta$ $\gamma\alpha$ secantes sese in puncto η*, et apponatur regula *versatilis* in puncto β

1) Conf. supra cap. 21, infra VIII cap. 25.

2) Similis demonstratio exstat in Heronis quae feruntur belopoeicis (veterum mathem. op. ed. Thevenot p. 143 sq.), quam passim mutatam sub titulo ὡς Ἥρων ἐν μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς καὶ ἐν τοῖς βελοποιικοῖς repetivit Eutocius in commentariis ad Archim. de sphaera et cylindro p. 136. Sed in utroque libro ipsa Heronis scriptura minus accurate servata esse videtur quam in hac Pappi collectione.

*) Neque hoc loco in Graecis ἐπὶ τὰ Ε Ζ nec paulo post τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Η addenda esse existimem; namque haec ipse Pappus brevitatis causa omisisse videtur.

τέμνον τὰς ΓΕ ΑΖ, ἄχρις οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἀχθεῖσα ἐπὶ τὴν τῆς ΓΕ τομὴν ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν τῆς ΑΖ τομήν. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ μὲν τοῦ κανονίου θέσις ἡ ΕΒΖ, ἴσαι δὲ αἱ ΕΗ ΗΖ· λέγω οὖν ὅτι αἱ ΑΖ ΓΕ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ.

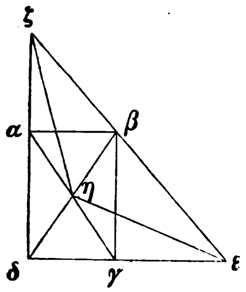
Ἐπεὶ γὰρ ὀρθογώνιόν ἐστιν τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΔΗ ΗΑ ΗΒ ΗΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΗ τῇ ΑΗ, καὶ διῆκται ἡ ΗΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΕ. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ΗΕ ΗΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΗ τῷ ὑπὸ ΔΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ. ὧν τὸ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΖΑ· ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΖΑ πρὸς ΓΕ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἥ τε ΒΑ πρὸς ΑΖ καὶ ἡ ΕΓ πρὸς ΓΒ, ὥστε ἔσται καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ, ἥ τε ΖΑ πρὸς ΓΕ καὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΓΒ· τῶν ἄρα ΑΒ ΒΓ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΖ ΓΕ.

27 *ι'. Κύβος δὲ κύβου διπλάσιος οὐ μόνον εὑρίσκεται διὰ τοῦ ὑποκειμένου ὀργάνου καὶ καθ' ἡμᾶς, ἀλλὰ καὶ καθόλου λόγον ἔχων τὸν ἐπιταχθέντα.*

---

1. *Η ἀχθεῖσα ἐπὶ τὴν*] tot fere litterae inductae in A, *η ἐπὶ τὴν* B *Sca*, om. S, *ἀχθεῖσα* add. *Hu* 4. *ἴσαι δὲ αἱ ΕΗ ΗΖ* abundant, ideoque suspecta videantur; sed similis pleonasmus infra cap. 97 redit 6. *τὸ ΑΒ ΓΔ* A, coniunx. BS 8. *τῇ αη* BS, *τῆι ΑΝ* A 10. *δὴ* BS. *ΔΗ* A 12. *τοῦ ἀπὸ αη* B^3V^2 *Sca*, *τοῦ ἀπὸ ΓΗ* AB^1S 13. *τοῦ ἀπὸ γη* B^3V^2 *Sca*, *τοῦ ἀπὸ ΓΕ* AB^1S *τῷ ἀπὸ ηα* B^3 *Sca*, *τῶι ἀπὸ ΗΕ* AB^1S 16—18. *ἥτε ΒΑ πρὸς ΑΖ* **** ** *** | *πρὸς ΓΕ καὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΓΒ. ὥστε ἔσται καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ ἥ τε* | *ΖΑ πρὸς ΓΕ καὶ η ΓΕ πρὸς ΓΒ* A^1 erasis novem fere litteris ab A^2; post *ἥτε ΒΑ πρὸς ΑΖ* add. A^2: *καὶ ἡ ΕΓ πρὸς* | *ΓΒ· ὥστε ἔσται καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ ἥ τε ΖΑ*; tum sequuntur, ut modo significatum est, pr. m. scripta *πρὸς ΓΕ καὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΓΒ*; denique ea quae porro A^1 habet, *ὥστε* usque ad *πρὸς ΓΒ*, del. A^2 19. *ι'* om. ABS 19—21. aut negligentissime haec scripta sunt a Pappo aut corrupta a librariis et hunc fere in modum restituenda: *καθ' ἡμᾶς δὲ διὰ τοῦ ὑποκειμένου ὀργάνου οὐ μόνον εὑρίσκεται κύβος κύβου διπλάσιος, ἀλλὰ καὶ καθόλου λόγον ἔχων τὸν ἐπιταχθέντα*

moveaturque secans rectas $\gamma\varepsilon$ $\alpha\zeta$, donec recta ab η ad sectionis punctum rectae $\gamma\varepsilon$ ducta aequalis facta sit rectae quae ab η ad sectionis punctum rectae $\alpha\zeta$ ducatur. Factum iam sit, ac regulae positio sit $\varepsilon\beta\zeta$, et $\varepsilon\eta = \eta\zeta$; dico igitur rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ medias proportionales esse $\alpha\zeta$ $\gamma\varepsilon$.



Quoniam enim parallelogrammum $\alpha\beta\gamma\delta$ rectangulum est, quattuor rectae $\delta\eta$ $\eta\alpha$ $\eta\beta$ $\eta\gamma$ inter se aequales sunt. Iam quia *a vertice* trianguli aequicruris *$\alpha\delta\eta$ ad productam basim* ducta est $\eta\zeta$*), est igitur

$\delta\zeta \cdot \zeta\alpha + \alpha\eta^2 = \eta\zeta^2$. Eadem ratione est

$\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma + \gamma\eta^2 = \eta\varepsilon^2$. Et *ex hypothesi* aequales sunt $\eta\varepsilon$ $\eta\zeta$; ergo etiam

$\delta\zeta \cdot \zeta\alpha + \alpha\eta^2 = \delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma + \gamma\eta^2$. Ex quibus est $\alpha\eta^2 = \gamma\eta^2$; ergo subtrahendo

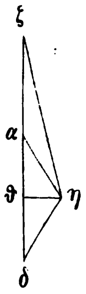
$\delta\zeta \cdot \zeta\alpha = \delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma$, ideoque *proportione facta*

$\varepsilon\delta : \delta\zeta = \zeta\alpha : \varepsilon\gamma$. Sed *propter parallelas $\alpha\beta$ $\delta\varepsilon$ et $\gamma\beta$ $\delta\zeta$* est

$\varepsilon\delta : \delta\zeta = \beta\alpha : \alpha\zeta = \varepsilon\gamma : \gamma\beta$; ergo etiam

$\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$.

X. Nostra autem ratione per id quod supponitur instrumentum non solum cubus, qui duplo maior sit quam cubus, sed etiam omnino, qui datam proportionem habeat, invenitur [1].



*) Graeca verba, quibus Hero brevissime, ut solet, theorema quoddam auxiliare significavit, ita transtulimus, ut, quid scriptor sensisset, statim intellegi posset. Demonstratio autem, quam supplevit Commandinus, sic se habet: Ductâ perpendiculari $\eta\vartheta$, propter elem. 2, 6 est $\delta\zeta \cdot \zeta\alpha + \alpha\vartheta^2 = \zeta\vartheta^2$. Commune apponatur $\eta\vartheta^2$; itaque est $\alpha\vartheta^2 + \eta\vartheta^2 = \alpha\eta^2$, et $\zeta\vartheta^2 + \eta\vartheta^2 = \zeta\eta^2$; ergo $\delta\zeta \cdot \zeta\alpha + \alpha\eta^2 = \eta\zeta^2$.

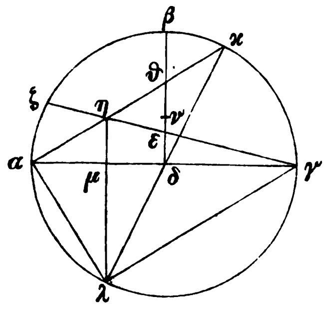
1) Haec problematis solutio infra redit VIII propos. 11, eandemque e Pappo κατὰ λέξιν, ut ait, repetit et cum Dioclis problemate comparat Eutocius in Archim. p. 139 sq.

Κατεσκευάσθω γὰρ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω ἡ ΔΒ, καὶ κινείσθω κανόνιόν τι περὶ τὸ Α σημεῖον οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἓν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ Α σημεῖον ἑστῶτι, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινεῖσθαι μεταξὺ τῶν Β Γ. τούτων δὴ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους δοθέντα. καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν Β Γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ΖΕ ΕΒ εὐθειῶν ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς ΒΕ εὐθείας καὶ τῆς ΒΚΓ περιφερείας· τοῦτο γὰρ πειράζοντες αἰεὶ καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον ῥᾳδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δή, καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ΑΗΘΚ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΗΘ ΘΚ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστιν τὸν τῆς ΔΒ πρὸς ΔΕ.

Νοείσθω γὰρ ὁ κύκλος προσαναπεπληρωμένος καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΚΘ τῇ ΘΗ, τὴν δὲ ΚΔ τῇ ΔΛ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ ἥ τε ΑΛ καὶ ἡ ΛΓ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ ἐν ἡμικυκλίῳ καὶ κάθετος ἡ ΛΜ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ (καὶ γὰρ ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΜΑ, οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΜΗ, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ, καὶ ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ). κοινὸς προσκείσθω λόγος ὁ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ. ὁ ἄρα συγκείμενος ἔκ τε τοῦ

2. ἡ ΔΒ *Hu* pro ἡ $\overline{ΒΔ}$ collato VIII, 26 et Eutocio 6. τῶν $\overline{ΒΓ}$ A, distinx. BS, item vs. 10 10. ἕως οὗ τὸ in A paene evanuerunt 11. 12. τὸ μεταξὺ A, corr. BSV[2] 19. ἐπι|ζεύχθω A, corr. BS 21. 22. ἐπεζεύχθω δὴ Pappus infra VIII cap. 26 et Eutocius 23. post ἐν ἡμικυκλίῳ add. γὰρ B[3], οὖσα *Hu* 25. καὶ γὰρ ὡς — 28. ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ om. Pappus VIII cap. 26 et Eutocius 29. ὁ ante λόγος additum in ABS del. *Hu* τοῦ add. B[3]

Construatur enim semicirculus $\alpha\beta\gamma$, cuius a centro δ erigatur perpendicularis $\delta\beta$, et regula quaedam circa punctum



α ita moveatur, ut alter eius terminus detineatur clavulo in puncto α infixo, reliqua autem pars circa clavulum tamquam centrum inter puncta $\beta\,\gamma$ moveatur. His igitur constructis propositum sit duos invenire cubos, qui datam inter se proportionem habeant. Ac *datae* quidem proportioni aequalis fiat proportio $\beta\delta : \delta\varepsilon$, et iuncta $\gamma\varepsilon$ producatur ad ζ *punctum circumferentiae.* Iam regula inter puncta $\beta\ \gamma$ circumagatur, donec eius segmentum, quod inter rectas $\zeta\varepsilon\ \varepsilon\beta$ abscinditur, aequale factum sit segmento, quod est inter rectam $\beta\varepsilon$ et circumferentiam $\beta\varkappa\gamma$; hoc enim temptantes semper et regulam circumagentes facile efficiemus. Factum igitur sit, ac regula positionem habeat $\alpha\eta\vartheta\varkappa$, ita ut sit $\eta\vartheta = \vartheta\varkappa$; dico cubum a $\beta\delta$ ad cubum a $\delta\vartheta$ datam proportionem habere, id est $\beta\delta : \delta\varepsilon$.

Fingatur enim circulus completus, et iuncta $\varkappa\delta$ producatur ad λ *punctum circumferentiae*, et iungatur $\lambda\eta$; haec igitur parallela est rectae $\beta\delta$ (*propter elem. 6, 2*, quia *ex constructione* est $\varkappa\vartheta = \vartheta\eta$, et $\varkappa\delta = \delta\lambda$). Iam iungantur rectae $\alpha\lambda\ \lambda\gamma$. Quoniam igitur angulus $\eta\alpha\lambda$, *ut* in semicirculo, rectus, et *in triangulo* $\lambda\eta\alpha$ perpendicularis est $\alpha\mu$, est igitur

$\lambda\mu^2 : \mu\alpha^2 = \alpha\mu^2 : \mu\eta^2$, id est

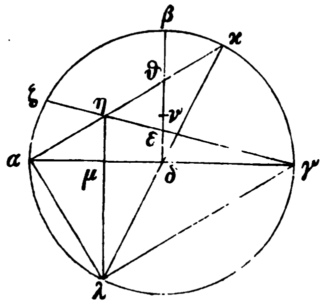
$\gamma\mu : \mu\alpha = \alpha\mu^2 : \mu\eta^2$ (namque *propter elem. 6, 8 coroll.* est $\lambda\mu : \mu\alpha = \alpha\mu : \mu\eta$, ita ut sit etiam $\lambda\mu^2 : \mu\alpha^2 = \alpha\mu^2 : \mu\eta^2$, et, *quia in triangulo semicirculari* $\gamma\alpha\lambda$, *perpendiculari ductā* $\lambda\mu$, *est* $\gamma\mu : \mu\lambda = \lambda\mu : \mu\alpha$, *propter elem. 6, 20 coroll. 2* est $\gamma\mu : \mu\alpha = \gamma\mu^2 : \mu\lambda^2 = \lambda\mu^2 : \mu\alpha^2$). Harum proportionum utraque multiplicetur cum $\alpha\mu : \mu\eta$; est igitur per formulam compositae proportionis *τῆς ΓΜ πρὸς ΜΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ὁ τῆς ΓΜ πρὸς ΜΗ, λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΗ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ. ὁ δὲ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ ὁ αὐτός ἐστιν τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ κύβον· καὶ ὁ τῆς ΓΜ ἄρα πρὸς τὴν ΜΗ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΜ πρὸς ΜΗ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον. ἐὰν οὖν ποιήσωμεν καὶ ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως τὴν ΔΘ πρὸς ἄλλην τινά, οἷον τὴν ΔΝ, ἔσονται τῶν ΒΔ ΔΕ δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ ΔΘ ΔΝ.*

28 *ια'. Τὸ δὲ δεύτερον τῶν προβλημάτων ἦν τόδε.*

Ἐν ἡμικυκλίῳ τὰς τρεῖς μεσότητας λαβεῖν ἄλλος τις ἔφασκεν, καὶ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐκθέμενος, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ λαβὼν τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγὼν τῇ ΕΓ τὴν ΔΒ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΕΒ, καὶ αὐτῇ κάθετον ἀγαγὼν ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΖ, τὰς τρεῖς μεσότητας ἔλεγεν ἁπλῶς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐκτεθεῖσθαι, τὴν μὲν ΕΓ μέσην ἀριθμητικήν, τὴν δὲ ΔΒ μέσην γεωμετρικήν, τὴν δὲ ΒΖ ἁρμονικήν.

Ὅτι μὲν οὖν ἡ ΒΔ μέση ἐστὶ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ἡ δὲ ΕΓ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι, φανερόν. ἔστι γὰρ ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΔΒ πρὸς ΔΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς ἑαυτήν, οὕτως ἡ τῶν ΑΔ ΑΕ ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ τῶν ΑΔ ΕΓ, πρὸς τὴν τῶν ΕΓ ΓΔ. πῶς δὲ καὶ ἡ ΖΒ μέση ἐστὶν τῆς ἁρμονικῆς

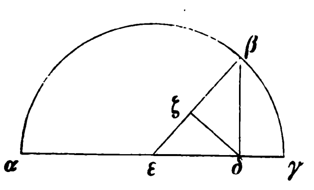
1. τοῦ ante τῆς ΑΜ et 3. ante ἀπὸ τῆς ΑΜ add. *Hu* 4. τοῦ ante τοῦ ἀπὸ add. B[3] 7. ἄρα πρὸς τὴν B[3] *Sca*, ἄρα πρὸς τῆι A(S), omisit et haec et alia B[1] 14. ἐὰν οὖν et cetera om. Pappus l. c. et Eutocius 15. τὴν $\overline{\delta\nu}$ B[3] V[2] pro τὴν $\overline{AM}$ (*ad DX Co*) 16. τῶν $\overline{B\Delta}$ $\overline{AM}$ AB[1]S, corr. B[3] *Sca Co* αἱ $\overline{\Delta\Theta}$ $\overline{\Delta H}$ AB[1]S, corr. B[3] 17. $\overline{I\Delta}$



$\frac{\gamma\mu}{\mu\alpha} \cdot \frac{\alpha\mu}{\mu\eta} = \frac{\alpha\mu^2}{\mu\eta^2} \cdot \frac{\alpha\mu}{\mu\eta}$, id est $\frac{\gamma\mu}{\mu\eta} = \frac{\alpha\mu^3}{\mu\eta^3}$. Sed est $\frac{\gamma\mu}{\mu\eta} = \frac{\gamma\delta}{\delta\varepsilon} = \frac{\beta\delta}{\delta\varepsilon}$, et $\frac{\alpha\mu}{\mu\eta} = \frac{\alpha\delta}{\delta\vartheta} = \frac{\beta\delta}{\delta\vartheta}$; ergo etiam $\frac{\beta\delta}{\delta\varepsilon} = \frac{\beta\delta^3}{\delta\vartheta^3}$; est autem $\beta\delta : \delta\varepsilon$ data proportio. Si igitur fecerimus ut $\beta\delta$ ad $\delta\vartheta$, ita $\delta\vartheta$ ad aliam quandam velut $\delta\nu$, erunt rectarum $\beta\delta$ $\delta\varepsilon$ duae mediae proportionales $\delta\vartheta$ $\delta\nu$*).

XI. Secundum problema [1]) hoc erat.

In semicirculo tres medietates sumendas esse alius quidam proposuit, ac postquam semicirculum $\alpha\beta\gamma$, cuius centrum erat ε, descripsit, et in recta $\alpha\gamma$ quodvis punctum δ sumpsit, et inde rectae $\varepsilon\gamma$ perpendicularem erexit $\delta\beta$, et rectam $\varepsilon\beta$ iunxit, eique perpendicularem a puncto δ rectam $\delta\zeta$ duxit, tres medietates in semicirculo simpliciter expositas esse contendebat; nam $\varepsilon\gamma$ esse mediam arithmeticam, tum $\delta\beta$ mediam geometricam, denique $\beta\zeta$ harmonicam.



Iam vero $\beta\delta$ mediam esse rectarum $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ in geometrica analogia, et $\varepsilon\gamma$ rectarum $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ in arithmetica medietate manifestum est. Namque est $\alpha\delta : \delta\beta = \delta\beta : \delta\gamma$, et (*quo arithmetica medietas demonstretur*) $\frac{\alpha\delta}{\alpha\delta} = \frac{\alpha\delta - \alpha\varepsilon}{\varepsilon\gamma - \gamma\delta} = \frac{\alpha\delta - \varepsilon\gamma}{\varepsilon\gamma - \gamma\delta}$. Sed quomodo etiam $\beta\zeta$ media in harmonica medietate, vel qualium

*) Nam quia est $\beta\delta^3 : \delta\vartheta^3 = \beta\delta : \delta\varepsilon$, propter elem. 11, 33 cum coroll. est $\beta\delta : \delta\vartheta = \delta\vartheta : x = x : \delta\varepsilon$, et est x, sive ut Pappus ait, $\delta\nu$ data, quoniam data est et proportio $\beta\delta : \delta\vartheta$ et ipsa $\delta\vartheta$ (dat. 2).

1) Conf. supra p. 31 adnot. 1.

A[1] in marg. (S), om. B 19. 20. κέντρον τὸ $\overline{B}$ AB[1]S, corr. B[3] 24. τὴν μὲν $\overline{E\Delta}$ ABS, corr. *Co* 27. η δὲ $\overline{\Delta E}$ ABS, corr. *Co* 28. ἡ ante $A\Delta$ add. S *μεσότητος, ἢ ποίων εὐθειῶν, οὐκ εἶπεν, μόνον δὲ ὅτι τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν τῶν ΕΒ ΒΔ, ἀγνοῶν ὅτι ἀπὸ τῶν ΕΒ ΒΔ ΒΖ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ οὐσῶν πλάσσεται ἡ ἁρμονικὴ μεσότης. δειχθήσεται γὰρ ὑφ' ἡμῶν ὕστερον ὅτι δύο αἱ ΕΒ καὶ τρεῖς αἱ ΔΒ καὶ μία ἡ ΒΖ ὡς μία συντεθεῖσαι ποιοῦσι τὴν μείζονα ἄκραν τῆς ἁρμονικῆς μεσότητος, δύο δὲ αἱ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν μέσην, μία δὲ ἡ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν ἐλαχίστην.*

29 *Πρότερον δὲ διαληπτέον περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων [καὶ μετὰ ταῦτα περὶ τῶν ἐν ἡμικυκλίῳ], εἶτα περὶ τῶν ἀντικειμένων αὐταῖς ἄλλων τριῶν κατὰ τοὺς παλαιούς, καὶ ὕστερον περὶ τῶν παρὰ τοῖς νεωτέροις τεσσάρων ἀκολούθως ταῖς γνώμαις αὐτῶν, καὶ ὡς δυνατόν ἐστιν ἑκάστην τῶν δέκα μεσοτήτων διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας εὑρίσκειν, ἵνα καὶ τὸν προκείμενον ἔλεγχον διὰ πλειόνων συστησώμεθα.*

Περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων.

30 *ιβ'. Διαφέρει τοίνυν μεσότης ἀναλογίας τῷδε ὅτι εἰ μέν τί ἐστιν ἀναλογία, τοῦτο καὶ μεσότης, οὐ μὴν καὶ ἀνάπαλιν. μεσότητες γάρ εἰσι τρεῖς, ὧν ἡ μὲν ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρική, ἡ δὲ ἁρμονική.*

Ἀριθμητικὴ μὲν οὖν λέγεται μεσότης, ὅταν τριῶν ὄντων ὅρων ὁ μέσος τῷ ἴσῳ ἑνὸς μὲν τῶν ἄκρων ὑπερέχῃ, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ ϛ' πρὸς τὸν θ' καὶ τὸν γ' ἀριθμόν), ἢ ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αὐτόν, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν. [πρῶτα δὲ ἀκούειν δεῖ τὰ ὑπερέχοντα.]

Γεωμετρικὴ δὲ λέγεται μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως, ὅταν ᾖ ὡς ὁ μέσος ὅρος πρὸς ἕνα τῶν ἄκρων, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν μέσον (ὡς ἔχει ὁ ϛ' ἀριθμὸς πρός τε τὸν ιβ' καὶ τὸν γ'), καὶ ἄλλως· ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν.

---

1. *δὲ ὅτι Hu* pro *διότι* 2. *τῶν* $\overline{EB\Delta}$ ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 5. *καὶ τρεῖς Hu* pro *καὶ αἱ τρεῖς* 7. *μία δὲ Hu* auctore *Co* pro *μίαν δὲ* 10. *καὶ μετὰ — ἡμικυκλίῳ* del. *Hu* 17. $\overline{IB}$ A[1] in marg. (S),

rectarum media esset, non dixit; sed tantummodo hanc esse tertiam proportionalem rectarum $\varepsilon\beta$ $\beta\delta$ *significavit,* ab ipsis $\varepsilon\beta$ $\beta\delta$ $\beta\zeta$, quae in geometrica sunt proportione, harmonicam medietatem formari nesciens. Infra enim (*propos.* 20) a nobis demonstrabitur in harmonica medietate esse

maiorem extremitatem $= 2\varepsilon\beta + 3\delta\beta + \beta\zeta$
medium terminum $= 2\delta\beta + \beta\zeta$
minimum terminum $= \delta\beta + \beta\zeta$.

Primum autem de *his ipsis* tribus medietatibus, tum de aliis tribus, quae apud veteres his opponuntur, disserendum est; denique de quattuor illis, quae sunt apud recentiores, secundum ipsorum sententias *dicemus,* et, quomodo unaquaeque e decem medietatibus per geometricam analogiam inveniri possit, *exponemus,* quo copiosius hanc quam ingressi sumus demonstrationem persequamur.

DE TRIBUS MEDIETATIBUS.

XII. Differt igitur medietas ab analogia eo, quod quidem omnis analogia medietas est, minime autem contra. Etenim medietates tres sunt: arithmetica, geometrica, harmonica.

Arithmetica medietas dicitur, si, tribus positis terminis, aequalis differentia est inter medium terminum unumque extremum atque inter alterum extremum mediumque (velut 6 eodem differt a 9 et a 3), vel si primus terminus ad se ipsum eadem proportione est ac prima differentia ad secundam.

Geometrica medietas dicitur, si medius terminus ad unum extremum eadem proportione est atque alter ad medium (velut 6 : 12 = 3 : 6), et aliter: si primus terminus ad secundum eadem proportione est ac prima differentia ad secundam.

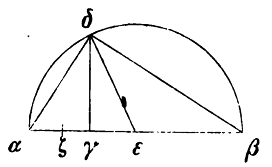
---

om. B   εἰ A² in rasura   24. $\bar{\gamma}$ S, τρία AB   ἢ ὡς ὁ B (ἢ ὡς B³ in rasura), //// A, ἢ ὡς (sine ὁ) S   αὐτὸν ABS, corr. *Hu* auctore *Co*   25. 26. πρῶτα — ὑπερέχοντα interpolatori tribuit *Hu* (vide p. 87 adnot. 1)   28. ὁ ante μέσος om. S   30. τὸν δωδεκα (sine acc.) καὶ τὸν τρία A(B), numerales notas restituit S

Ἁρμονικὴ δέ ἐστι μεσότης, ὅταν ὁ μέσος ὅρος τῷ αὐτῷ μέρει ὑπερέχῃ μὲν ἑνὸς τῶν ἄκρων, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ γʹ ἀριθμὸς πρός τε τὸν βʹ καὶ τὸν ϛʹ), ἢ ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν.

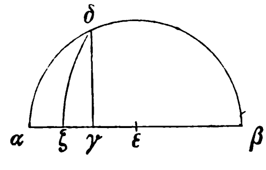
Τούτων ὑποκειμένων εὑρήσομεν ὁμοῦ τὰς τρεῖς μεσότητας ἐν ἐλαχίσταις εὐθείαις πέντε τὸν ἀριθμὸν προγραφέντων τῶνδε.

31 *Ἔστω δὴ πρῶτον δοθεισῶν τῶν ΑΒ ΒΓ μέσην εὑρεῖν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.*



Ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΑΒ τῷ Ε, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ε διὰ τοῦ Β περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ Δ, καὶ τῇ τὰ Β Δ ἐπιζευγνυούσῃ ἴση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΖ, καὶ γίνεται ἡ ζητουμένη μέση ἡ ΒΖ. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΔΑ ὀρθὴν περιέχει γωνίαν μετὰ τῆς ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι ἑκατέραν τῶν ΒΕ ΕΑ τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὰ Δ Ε. ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ὀρθή. καὶ ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ περὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Β πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΒ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΓ, καὶ μέση τῶν ΑΒ ΒΓ ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΒΖ.

32 *ιγʹ. Ἔστω δὲ δοθεισῶν τῶν ΑΒ ΒΖ τὴν ἐλάσσονα ἄκραν λαβεῖν.*



Τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ τῷ Ε, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ε διὰ τοῦ Β περιφέρεια γεγράφθω, καὶ αὕτη τετμήσθω ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ Ζ περὶ κέντρον τὸ Β γραφομένης περιφερείας κατὰ τὸ Δ, καὶ κάθετος ἤχθω

3. ϛ B³ pro Δ̄ (idem tacite corr. *Co*) 15. *τὰ ΒΔ* AS, distinx. B 19. *τὰ ΔΕ* ABS, distinx. *Hu* 22. *πλευραὶ* B³ pro *πλευρὰν* (idem tacite corr. *Co*) 24. *ιγʹ* add. *Hu* *ἐλάττονα* AB, corr. S 28. *αὕτη* B, *αυτη* sine spir. et acc. A, *αὐτὴ* S 29. *διὰ* B³ *Sca*, *α* A, *ἅ* S, *δ*** B¹

Harmonica est medietas, si medius terminus eadem parte superat unum extremum ac superatur ab altero extremo (velut 3 superat 2 dimidiâ huius parte et superatur a 6 dimidiâ numeri 6 parte), vel si primus terminus ad tertium eadem proportione est ac prima differentia ad secundam [1].

His definitis tres simul medietates inveniemus in minimis quinque rectis lineis (*propos. 15*), postquam haec praemiserimus.

Primum igitur propositum sit, datis rectis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, mediam in geometrica analogia invenire. Prop. 6

Ducatur perpendicularis $\gamma\delta$, et bifariam secetur $\alpha\beta$ in puncto ε, et circa centrum ε circumferentia per β descripta secet perpendicularem in δ, et rectae puncta β δ iungenti aequalis abscindatur $\beta\zeta$; iam fit media quam quaerimus $\beta\zeta$. Nam iunctâ $\delta\alpha$ angulus $\alpha\delta\beta$ rectus est, quoniam est $\beta\varepsilon = \varepsilon\alpha = \delta\varepsilon$*). Sed etiam angulus $\beta\gamma\delta$ rectus est; ergo triangulum $\alpha\beta\delta$ simile triangulo $\delta\beta\gamma$, ideoque latera circa communem eorum angulum β proportionalia sunt, id est $\alpha\beta : \delta\beta = \delta\beta : \beta\gamma$, sive rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ media *proportionalis* est $\beta\delta$, quae aequalis est ipsi $\beta\zeta$.

XIII. Propositum autem sit datis rectis $\alpha\beta$ $\beta\zeta$ minorem extremam *in geometrica analogia* sumere. Prop. 7

Bifariam secetur $\alpha\beta$ in puncto ε, et circa centrum ε per punctum β circumferentia describatur, et hanc circumferentia per punctum ζ circa centrum β descripta secet in puncto δ, et ducatur $\delta\gamma$ perpendicularis *ad* $\alpha\beta$; iam rectarum

1) Formulas igitur hasce proponit Pappus: primum in progressione quae descendere sive ad minus vergere dicitur, positis ternis membris a b c, notationes esse

$$\left.\begin{array}{lll} \text{arithmeticae medietatis} & a : a \\ \text{geometricae} \quad » \quad » & a : b \\ \text{harmonicae} \quad » \quad » & a : c \end{array}\right\} = \frac{a-b}{b-c};$$

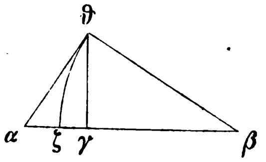
at in crescente progressione similes esse formulas membris differentiarum vicissim positis.

*) Hoc voluit dicere: quoniam ex constructione punctum δ est in circumferentia semicirculi, cuius diametrus est $\alpha\beta$ et centrum ε.

ἡ ΔΓ, καὶ γίνεται τῶν ΑΒ ΒΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΓ. δείκνυται γὰρ ὁμοίως [κατὰ τὰ αὐτὰ] τοῖς προειρημένοις ἐπὶ τῆς μέσης.

[Καὶ φανερὸν ὅτι, ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς τῆς ἀναλογίας λόγος ᾖ διπλάσιος, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ τετραπλασίαν εἶναι, ἡ ἴση τῇ ΑΒ τιθεμένη διχοτομία ἐστὶν τῆς ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΕΒ ἐστίν, ἐὰν δὲ μείζων ἢ διπλάσιος ὁ λόγος ᾖ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἡμισείας, ἐὰν δὲ ἐλάσσων ᾖ τοῦ διπλασίου, μείζων ἐστὶν τῆς ΕΒ ἡμισείας.]

33 *Ἔστω δὲ νῦν δοθεισῶν τῶν ΖΒ ΒΓ τὴν μείζονα ἄκραν εὑρεῖν.*



Ἤχθω δὴ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΘ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Β διὰ τοῦ Ζ γραφομένη περιφέρεια τεμνέτω αὐτὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἐπιζευχθείσῃ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΘ· γίνεται δὴ ἡ ΑΒ τρίτη ἀνάλογον τῶν ΓΒ ΒΖ. καὶ γὰρ τοῦτο φανερὸν ἐκ τῶν προδεδειγμένων.

34 *ιδʹ. Πάλιν ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἡ ΔΑΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΔ τῇ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ ΕΓΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ ἡ ΖΗ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ τῶν ΑΒ ΒΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ ΒΗ ὑπεροχήν.*

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, ἡ ΔΑ πρὸς ΖΗ, τουτέστιν ἡ ΑΕ πρὸς ΖΗ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ), καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΖΗ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΖΗ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ διὰ τὸ ἰσο-

---

1. ἡ $\overline{\beta\gamma}$ B[3] *Sca Co*, ἡ $\overline{B\Delta}$ AB[1]S 2. *κατὰ τὰ αὐτὰ* del. *Hu* 4—9. haec alienum a Pappo stilum produnt 4. initio notam *ιγʹ* add. S 6. *ἴσηι* A, corr. BS *τῇ* om. AB[1]S, add. B[4] *Sca* *πρὸς διχοτομίᾳ* B[4] 7. *ῆ* ante *διπλ.*] *ἠι* A[1], *ῆι* A[2] 12. ἡ $\overline{\gamma\delta}$ B[3] 14. *αὐτῆς* A, corr. BS 15. *κατὰ τὸ* $\overline{\delta}$ *καὶ τῇ* $\overline{\beta\delta}$ B[3] 16. ἡ $\overline{\alpha\delta}$ B[3] 20. $\overline{I\Delta}$ A[1] in marg., om. BS 22. $\overline{\varepsilon\gamma\zeta}$ B[3] pro $\overline{\Gamma Z}$ (idem tacite corr. *Co*) 23. *λέγω* ante *ὅτι* add. B[4] 27. 28. *ἀλλ' ὡς ἡ* $\overline{AE}$ *πρὸς* $\overline{ZH}$ A[2] in marg. BS, om. A[1]

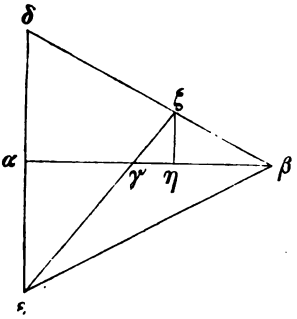
$\alpha\beta$ $\beta\zeta$ tertia proportionalis fit $\beta\gamma$. Demonstratio enim similis est superiori de media *proportionali.*

[Et manifestum est, si data analogiae proportio dupla sit, ita ut $\alpha\beta$ sit quadrupla $\beta\gamma$, rectam quae aequalis rectae $\beta\delta$ ponitur dimidiam esse $\alpha\beta$, videlicet ipsam $\varepsilon\beta$; si autem maior quam dupla proportio sit, eandem esse minorem quam dimidiam; denique, si proportio minor quam dupla sit, eandem maiorem esse quam dimidiam.]

Iam propositum sit datis rectis $\beta\zeta$ $\beta\gamma$ maiorem extremam *in geometrica analogia* invenire. Prop. 8

Ducatur perpendicularis $\gamma\vartheta$, et hanc circumferentia circa centrum β per ζ descripta secet in puncto ϑ, et iunctae $\beta\vartheta$ perpendicularis ducatur $\alpha\vartheta$; fit igitur $\alpha\beta$ tertia proportionalis rectarum $\beta\gamma$ $\beta\zeta$. Nam hoc quoque manifestum est ex iis quae supra demonstravimus.

XIV. *Datis. rectis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ minor extrema in harmonica medietate inveniatur*[1]. Prop. 9



Rursus sint *datae* duae rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, et ipsi $\alpha\beta$ perpendicularis *ducatur* recta $\delta\alpha\varepsilon$, ita ut sit $\delta\alpha = \alpha\varepsilon$, et iungantur rectae $\beta\delta$ $\varepsilon\gamma\zeta$, et a puncto ζ perpendicularis ad $\gamma\beta$ ducatur $\zeta\eta$; dico esse $\frac{\alpha\beta}{\beta\eta} = \frac{\alpha\beta-\beta\gamma}{\gamma\beta-\beta\eta}$.

Quoniam enim *propter parallelas* $\delta\alpha$ $\zeta\eta$ est

$\alpha\beta : \beta\eta = \delta\alpha : \zeta\eta = \alpha\varepsilon : \zeta\eta$ (est enim $\delta\alpha = \alpha\varepsilon$), et propter similitudinem triangulorum $\alpha\gamma\varepsilon$ $\gamma\eta\zeta$

$\alpha\varepsilon : \zeta\eta = \alpha\gamma : \gamma\eta$, est igitur etiam

1) Hinc usque ad propositionem 15, quid quoque loco propositum sit, in Graecis non legitur; addidit Commandinus, cuius verba nos paucis mutatis repetivimus.

γώνια εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ ΓΖΗ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΑΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΓ ὑπεροχὴ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἡ δὲ ΓΗ ὑπεροχὴ τῶν ΓΒ ΒΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ τῶν ΑΒ ΒΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ ΒΗ ὑπεροχήν. [τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα χρήσιμόν ἐστιν εἰς τὴν ἁρμονικὴν μεσότητα· πρώτη γάρ ἐστιν ἡ ΑΒ, δευτέρα ἡ ΒΓ, τρίτη ἡ ΒΗ.]

35 *Ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ ΒΗ δοθῶσιν ἄκραι, ζητῶμεν δὲ τὴν μέσην, ἐπιζεύξαντες τὴν ΒΔ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄξαντες ἀπὸ τοῦ Η τὴν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Ε ἐπιζεύξαντες τὴν ΖΓΕ, ἕξομεν τὴν ΓΒ μέσην τῶν ΑΒ ΒΗ. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.*

36 *ιε΄. Δοθεισῶν δὲ τῶν ΕΒ ΒΓ τὴν μείζονα ἄκραν εὑρήσομεν ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἄξαντες τὴν ΔΕΖ καὶ ἴσας θέντες τὰς ΔΕ ΕΖ, καὶ τὰς ΒΖ ΔΓ ἐπιζεύξαντες καὶ ἐκβαλόντες ἐπὶ τὸ Η. ἡ γὰρ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἀγομένη ΗΘ ἴσην ἀποτέμνει τῇ ζητουμένῃ τὴν ΘΒ. [συμπεσοῦνται γὰρ αἱ ΓΔ ΒΖ ὡς ἐπὶ τὸ Η ἡγμέναι· δεῖ γὰρ ὑποτίθεσθαι τὴν ΒΕ μείζονα τῆς ΕΓ.]*

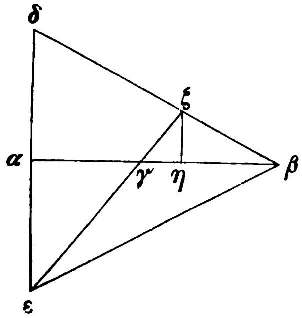
37 *ις΄. Δύο πάλιν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΒ, μέσην ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ εὑρήσομεν οὕτως. κείσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἡ ΔΑ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ τῇ ΕΒ ἴση κείσθω ἡ Ζ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ Ζ ἐστὶν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.*

---

5. *τοῦτο* — 7. *ἡ ΒΗ* interpolatori tribuit *Hu* 7. *ἡ ΑΒ Β΄ ΗΒΓ Γ΄ ἡ ΒΗ* A (item B, nisi quod hic distinxit *ἡ βγ*), *δευτέρα* et *τρίτη* restituit S 13. *ΙΕ* A^1 in marg., om. BS *τῶν ΕΒ ΒΓ Hu* pro *τῶν ΓΒ ΒΕ* 14. *ΔΕΖ Hu* pro *ΕΔΖ* 17. *ηθ* B^3 pro *ἡ Θ* 18. 19. *συμπεσοῦνται γὰρ* cet. scholii instar ab aliquo Pappi interprete addita idem diserte monent quod tacite Pappus supposuit 18. *συμπεσοῦνται* B, *convenient Co*; octo fere litterae obductae in A, quas excipit *αὗται* non satis perspicue scriptum; eandem scripturam post lacunam significat S 18. 19. *ἐπὶ τὸ Η ἡγμέναι Hu* pro *ἐπὶ τὰ Η μέρη* 19. *ὑποτίθεσθαι τὴν* B et codex Commandini, *ὑπὸ τί* ac deinde initio versus decem fere litteras obductas habet A, *ὑπο τί* .... S *ΒΕ* aegre agnoscitur in A, om. B^1S, *βγ* add. B^4 et codex Commandini *τῆς εγ Co*, *τῆς ΘΓ* AB^1S cod. Comm., *τῆς βε* B^4 20. *Ις* A^1 in marg.

$\alpha\beta : \beta\eta = \alpha\gamma : \gamma\eta$. Et est $\alpha\gamma = \alpha\beta - \beta\gamma$, et $\gamma\eta = \gamma\beta - \beta\eta$; ergo etiam

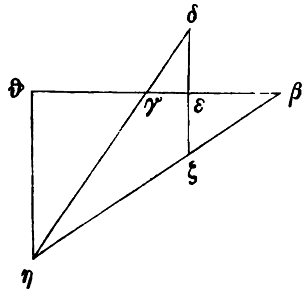
$$\alpha\beta : \beta\eta = \frac{\alpha\beta - \beta\gamma}{\gamma\beta - \beta\eta}.$$



Datis rectis $\alpha\beta$ $\beta\eta$ media in harmonica medietate inveniatur. Prop. 10

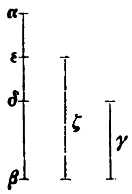
Si autem $\alpha\beta$ $\beta\eta$ extremae datae erunt et mediam nos quaeremus, iunctà $\beta\delta$ a puncto η *rectae* $\alpha\beta$ perpendicularem ducemus $\eta\zeta$, et a ζ ad ε iungemus rectam $\zeta\gamma\varepsilon$; sic habebimus ipsam $\gamma\beta$ mediam rectarum $\alpha\beta$ $\beta\eta$. Et manifesta est demonstratio.

XV. *Datis rectis $\varepsilon\beta$ $\beta\gamma$ maior extrema in harmonica medietate inveniatur.* Prop. 11



Datis autem $\varepsilon\beta$ $\beta\gamma$ maiorem extremam inveniemus, si a puncto ε *rectae* $\beta\gamma$ perpendicularem ducemus rectam $\delta\varepsilon\zeta$, ita ut sit $\delta\varepsilon = \varepsilon\zeta$, et iunctas $\beta\zeta$ $\delta\gamma$ producemus ad η. Nam perpendicularis $\eta\vartheta$, ab η ad $\beta\gamma$ protractam ducta, abscindit rectam $\vartheta\beta$ aequalem ei quam quaerimus. [Concurrent enim $\delta\gamma$ $\beta\zeta$ versus punctum η ductae; scilicet $\beta\varepsilon$ maior quam $\varepsilon\gamma$ supponenda est.]

XVI. *Datis rectis $\alpha\beta$ γ media in arithmetica medietate inveniatur.* Prop. 12



Rursus datis duabus $\alpha\beta$ γ, quarum maior $\alpha\beta$, mediam in aequali differentia sic inveniemus. Ponatur rectae γ aequalis $\beta\delta$, et $\delta\alpha$ bifariam secetur in ε, et rectae $\varepsilon\beta$ aequalis ponatur ζ. Et apparet ζ esse eam rectam quam quaerimus.

(S), om. B τῶν $\overline{ΑΒΓ}$ A, distinx. BS 22. ἡ $\overline{δβ}$ B3, ἡ $\overline{ΔΕ}$ AB¹S, ἡ βδ Co κατὰ add. Co τὸ ε Co, τῶι $\overline{ΕΚ}$ AB¹S, τῷ $\bar{ε}$ B3

38 Ὁμοίως δὲ κἂν αἱ Ζ Γ δοθῶσιν, τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν προσθέντες τῇ Ζ τὴν γενομένην ἕξομεν ἴσην τῇ ΑΒ.

39 Ἢ πάλιν ἐὰν αἱ ΑΒ Ζ δοθῶσιν, ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀπὸ τῆς Ζ ἀφαιρεθεῖσα ποιεῖ τὴν Γ τρίτην.

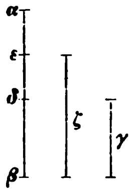
40 Ἔστω οὖν ἡ Ζ μέση τῶν ΑΒ Γ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· καὶ ἔσται ἀριθμητικὴ μεσότης τῶν ΑΒ Ζ Γ εὐθειῶν. γεγενήσθω δὲ καὶ ὡς ἡ Ζ πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς Η· καὶ ἔσται τῶν Ζ Γ Η εὐθειῶν γεωμετρικὴ μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως. κἂν διὰ τὸ προδειχθὲν δύο εὐθειῶν τῶν Γ Η, ὧν μείζων ἡ Γ, τὴν Θ ποιησώμεθα, ὥστ' εἶναι ὡς τὴν Γ πρὸς τὴν Θ, οὕτως τὴν τῶν Γ Η ὑπεροχὴν πρὸς τὴν τῶν Η Θ ὑπεροχήν, ἔσται ἄρα καὶ τῶν Γ Η Θ εὐθειῶν ἁρμονικὴ μεσότης. ὁ αὐτὸς δὲ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν Γ, καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Θ, τῶν ἄκρων ὅρων ἐπί τε τῆς ἀριθμητικῆς μεσότητος καὶ τῆς ἁρμονικῆς· ἔσονται οὖν πέντε τὸν ἀριθμὸν ἐλάχισται εὐθεῖαι περιέχουσαι τὰς τρεῖς μεσότητας [δυνάμεναι καὶ ἀσύμμετροι εἶναι πρὸς ἀλλήλας].

41 Ἅμα καὶ δι' ἀριθμῶν ἐλαχίστων πέντε συνίστασθαι κατά τε τοὺς πολλαπλασίους λεγομένους λόγους καὶ ἐπιμορίους καὶ τοὺς λοιπούς, ἀδιαιρέτου γοῦν τῆς μονάδος ὑποκειμένης. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ διπλασίου λόγου τῆς ΑΒ πρὸς τὴν Γ [ἐν διπλασίῳ λόγῳ δοθείσης] ὑποδείγματος

1. αἱ ΖΓ A, distinx. BS 3. αἱ add. *Hu* ΑΒΖ A, α β ζ BS, corr. *Co* 5. τῶν ΑΒΓ A, τῶν α β γ BS, corr. *Co* 6. τῶν ΑΒ ΖΓ ABS, distinx. *Co* 8. τῶν ΖΓΗ A, distinx. BS 9. 10. τῶν ΓΗ ὧν μείζων ΗΓ A, distinx. BS 10. ποιησώμεθα *Hu* pro ποφισώμεθα ὥστ' A, ὥστε B, ὡς S 11. τὴν τῶν γ η B[3], τὴν ΓΗ AS, τὴν γ η B[1] 12. ante τῶν ΗΘ add. Θ οὕτως ὁ (ὁ del. A[2], ἡ add. S) τὴν ΓΗ ὑπεροχὴν πρὸς τὴν AS, θ οὕτω τὴν add. B[1], del. B[4] (erratum igitur partim correxit B[1], partim B[4]) 12. τῶν ΗΘ A, distinx. BS ἄρα *Hu* pro μὲν τῶν ΓΗΘ A, distinx. BS 17. δυνάμεναι — ἀλλήλας] vera haec sunt; nec tamen ab ipso Pappo scripta, sed ab interprete addita esse videntur 18. Ἅμα καὶ etc.] haec usque ad cap. 42 extremum Pappi collectioni ab alio scriptore interserta esse videntur Ἅμα] Ἔστω δὲ coni. *Hu* πέντε S, Ε AB 20. γοῦν *Hu*, *nimirum Co*, οὖν ABS 22. ἐν — δοθείσης del. *Hu* auctore *Co* (alia est ratio loci qui sequitur p. 80, 12)

Datis rectis ζ γ *maior extrema in arithmetica medietate inveniatur.* Prop. 13.

Similiter autem, si ζ γ datae sint, differentiâ earum additâ rectae ζ habebimus rectam aequalem ipsi $\alpha\beta$ (*quae in superiore problemate maior extrema posita est*).

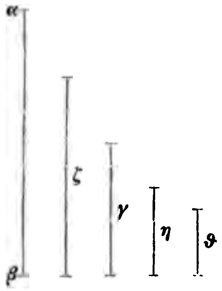


Datis rectis $\alpha\beta$ ζ *minor extrema in arithmetica medietate inveniatur.* Prop. 14

Rursus si $\alpha\beta$ ζ datae sint, differentia earum a ζ subtracta efficit γ tertiam.

Tres simul medietates in quinque minimis rectis inveniantur. Prop. 15

Sit igitur ζ media rectarum $\alpha\beta$ γ in aequali differentia; ergo erunt $\alpha\beta$ ζ γ in arithmetica medietate *sive progressione*. Sed fiat etiam $\zeta : \gamma = \gamma : \eta$; erunt igitur ζ γ η in geometrica medietate *sive progressione*, quae proprie analogia appellatur. Denique si secundum ea quae supra (*propos. 9*) demonstrata sunt duabus rectis γ η, quarum maior est γ, tertiam ϑ talem addiderimus, ut sit $\gamma : \vartheta = \gamma - \eta : \eta - \vartheta$, erunt igitur rectae γ η ϑ in harmonica medietate *sive progressione*. Est autem $\alpha\beta : \gamma = \gamma : \vartheta$*), et sunt $\alpha\beta$ γ extremi termini in arithmetica, γ ϑ in harmonica medietate; erunt igitur quinque minimae rectae, quae tres medietates continent [eaeque etiam inter se incommensurabiles esse possunt].



Verum etiam *propositum sit* in minimis quinque numeris *tres medietates* constituere, et in multiplicibus quae dicuntur et superparticularibus aliisque proportionibus, indivisibili nimirum unitate posita. Nam exempli gratia, in dupla proportione rectae $\alpha\beta$ ad γ, minimi numeri id quod propositum est

*) Vide append.

ἕνεκεν ἔσονται τὸ προκείμενον ποιοῦντες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι
ὅ τε ιβʹ καὶ ὁ ϑʹ καὶ ὁ ϛʹ καὶ ὁ δʹ καὶ ὁ γʹ, ἐπὶ δὲ τῆς
τριπλασίονος ἀναλογίας ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι γίνονται ὅ τε ιηʹ
καὶ ὁ ιβʹ καὶ ὁ ϛʹ καὶ ὁ γʹ καὶ ὁ βʹ. καὶ δῆλον ὡς δεῖ
καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων λόγων τοὺς ἐλαχίστους ἀριθμοὺς ἀνευ-
42 *ρίσκειν τῶν τριῶν μεσοτήτων. κἂν χωρὶς ἑκάστην τις ἐθέλῃ*
ἐκτίθεσθαι, διὰ τῶν προγεγραμμένων εὔδηλον, τῶν τριῶν
ὅρων ἐπὶ μὲν τῆς ἀριθμητικῆς μεσότητος ὄντων ἐν ἐλαχί-
στοις ἀριθμοῖς γʹ βʹ αʹ, ἐπὶ δὲ τῆς γεωμετρικῆς δʹ βʹ αʹ,
καὶ τῶν κατὰ τὸν διδόμενον λόγον πυθμένων εἰς τοὺς ἰσάκις
πολλαπλασίους καὶ τοὺς ἐπιμορίους μεταλαμβανομένων καὶ
τοὺς λοιπούς. οἷον ἐπὶ τοῦ διπλασίου λόγου, τῆς ΑΒ
πρὸς τὴν Γ λόγον *ἐχούσης ὃν ἔχει τὰ βʹ πρὸς τὸ αʹ, τάξο-*
μεν ἀντὶ μὲν τῶν βʹ τὰ δʹ, ἀντὶ δὲ τοῦ αʹ τὰ βʹ [ἐν ἴσῃ
ὑπεροχῇ τῷ βʹ]. καὶ ἐπεὶ δεῖ τὸν μέσον αὐτῶν τῷ ἴσῳ
ὑπερέχειν καὶ ὑπερέχεσθαι, γίνεται ἡ Ζ εὐθεῖα μονάδων
τριῶν [μέσον]. καὶ ὁ τῆς Ζ πρὸς τὴν Γ λόγος ἡμιόλιος,
ὡς γʹ πρὸς βʹ. ὁ αὐτὸς δὲ τούτῳ καὶ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν
Η γενόμενος οὐ ποιεῖ τὸ πρόβλημα τῆς μονάδος ἀδιαιρέτου
μενούσης. πάντα ἄρα τρίς· καὶ γίνεται ἀντὶ μὲν τοῦ δʹ
ὁ ιβʹ, ἀντὶ δὲ τοῦ γʹ ὁ ϑʹ ἀριθμός, καὶ ἀντὶ τοῦ βʹ ὁ ϛʹ.
καὶ γίνεται ἡ Η εὐθεῖα μονάδων δʹ καὶ ἡ Θ δηλονότι μο-
νάδων τριῶν καὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων ἀριθμοὶ ιβʹ ϑʹ ϛʹ δʹ γʹ.
43 *ιζʹ. Ταῦτα μὲν οὖν περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων κατὰ*
τοὺς παλαιούς, ὅτι δὲ καὶ ἐν ἡμικυκλίῳ δυνατόν ἐστιν

---

2. *ιβ* S, *δώδεκα* AB *καὶ ὁ ἐννέα καὶ ὁ ἕξ* B (sed deinde cum AS *καὶ ὁ δ καὶ ὁ γ*) 3. *τριπλασίονος* A² ex *τριπλασί*** (erasis litteris *ου*, ut videtur) 4. *καὶ ὁ ΙΒ* AB³, om. B¹, *καὶ ὁ ιδ* S *καὶ ἡ ϛ καὶ ἡ Γ καὶ ἡ Β* A, *καὶ οἱ ἕξ καὶ οἱ γ καὶ οἱ δύο* B¹, corr. B³S (nisi quod B³ intacta reliquit *ἕξ* et *δύο*) 7. *προγεγραμμένων* B, *προ//////|μένων* A (sed vestigia litterarum *γ.γρ...* etiam nunc agnoscuntur), *προλελεγμένων* S 8. *ἀριθμητικῆς μεσότητος* BS, *ἀρ//////////|μεσό//τος* A *ὄντων* *Hu*, *////ν* A, *....ν* B, *...ων* S 9. *α* (ante *ἐπὶ*) B³S, *Δ* A, om. B¹ *ἐπὶ δὲ* B¹ et *τῆς* B⁴, tot fere litterae evanuerunt in A, unde lacuna in S *δ β α* B⁴ *Co* pro *ϛ Γ Β* 10. *καὶ τῶν* — 12. *λοιπούς*] nonnulla desiderari videntur Commandino; ante *καὶ τῶν* add. *ἐπὶ δὲ τῆς ἁρμονικῆς ϛʹ γʹ βʹ* *Hu* 13. *λόγον ἐχούσης* *Hu* pro *οὔσης* 14. *μὲν τῶν* *Hu*

facientes erunt 12 9 6 4 3; in tripla autem proportione minimi numeri erunt 18 12 6 3 2. Et manifestum est, qua ratione etiam in aliis proportionibus minimi trium medietatum numeri inveniendi sint. Atque etiam, si quis separatim quamque medietatem exponere velit, id ex iis quae supra scripta sunt elucet; siquidem tres termini minimi in arithmetica medietate erunt 3 2 1, in geometrica 4 2 1, *in harmonica 6 3 2*, et numeri, qui iuxta datam proportionem fundamentales sunt, in aeque multiplices et superparticulares reliquosque transferentur[1]. Velut in dupla proportione, si est $\alpha\beta : \gamma = 2 : 1$, ponemus 4 pro 2, et 2 pro 1. Et quoniam necesse est medium numerum a primo aeque differre atque a medio extremum, fit recta ζ trium unitatum. Et rectae ζ ad γ proportio sesquialtera est (*scilicet* 3 : 2). Cui si aequalem facimus proportionem $\gamma : \eta$, non solvimus id quod propositum est, quoniam unitatem dividi noluimus. Omnia igitur ter *multiplicamus*, et fiunt 12 pro 4, 9 pro 3, 6 pro 2. Itaque fit recta η unitatum 4 et ϑ 3; ergo *data dupla proportione* trium medietatum minimi numeri sunt 12 9 6 4 3.

XVII. Haec igitur de tribus medietatibus secundum veteres; verum etiam fieri posse, ut

1) "Per πυθμένας intellige numeros in qualibet proportione minimos, qui sunt veluti radices quaedam, a quibus reliqui gignuntur; Diophantus ὑποστάσεις appellat. Videtur autem docere quo pacto inveniantur minimi numeri, tres medietates continentes" *Co*, qui praeterea demonstrationem a Graeco scriptore omissam supplet. Quod autem Diophanti ὑποστάσεις comparat, quae in illius arithmeticis passim occurrunt, in errore, ut opinor, versatur.

---

pro *μὲν τοῦ* 14. 15. *ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ τῷ β'* del. *Hu* (interpolator significavisse videtur differentiam inter 4 et 2 aequalem esse numero 2, quod ab h. l. alienissimum est; Pappus scripsisset *ἐν ἴσῃ ἀναλογίᾳ*, nisi id ipsum tacite intellegi maluisset) 15. *ἐπεὶ* B³S, *ἐπι* (sine acc.) A et, ut videtur, B¹ 16. *γίγνεται* A, corr. BS 17. *μέσον* del. *Hu* 20. *τρὶς* *Co* pro *τρεῖς* 21. *ὁ ιβ' Hu*, *οἱ* $\overline{B}$ AS, *οἱ δύο* B *ὁ* $\overline{\varsigma}$ B³S, *η* $\overline{C}$ A, *ἡ* $\overline{\varsigma}$ B¹ 24. *ιζ'* add. S αὐτὰς συστήσασθαι ἐν ἐλαχίσταις ϛ′ εὐθείαις τὸν ἀριθμόν, δῆλον ἐντεῦθεν.

Ἐκκείσθω γὰρ τὸ ἡμικύκλιον ἔχον τὴν ΒΔ κάθετον καὶ τὴν ΕΒ ἐκ κέντρου, καὶ τὴν ΔΖ κάθετον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΘΗ καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΕΓΗ κείσθω τῇ ΒΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΚΘ· λέγω ὅτι ἐν τῇ ἁρμονικῇ μεσότητι ἡ ΕΚ μέση ἐστὶν τῶν ΒΕ ΕΖ, μεγίστης οὔσης τῆς ΒΕ καὶ ἐλαχίστης τῆς ΕΖ.

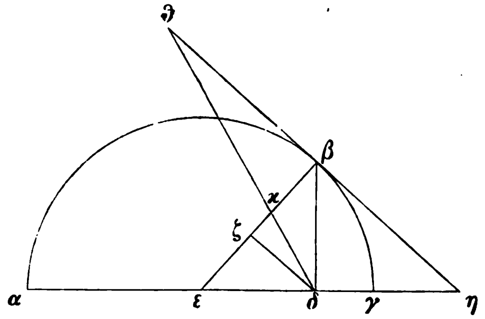
Ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Β Ζ γωνίαι [παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΘΗ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΒΗ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΘΚ τρίγωνον τῷ ΖΚΔ τριγώνῳ], ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΗΒ πρὸς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ ΒΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΒΘ πρὸς ΔΖ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΖ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΚ ὑπεροχὴ τῶν ΒΕ ΕΚ εὐθειῶν, ἡ δὲ ΚΖ ὑπεροχὴ τῶν ΚΕ ΕΖ εὐθειῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ τῶν ΒΕ ΕΚ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΚΕ ΕΖ ὑπεροχήν· ἁρμονικὴν ἄρα μεσότητα περιέχουσιν αἱ ΒΕ ΕΚ ΕΖ εὐθεῖαι, μέσης οὔσης τῆς ΕΚ καὶ μεγίστης τῆς ΒΕ καὶ ἐλαχίστης τῆς ΕΖ. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ μὲν ΑΔ ΕΓ ΓΔ τὴν ἀριθμητικήν, αἱ δὲ ΑΔ ΒΔ ΔΓ τὴν γεωμετρικήν· αἱ τρεῖς ἄρα μεσότητες ἐντεταγμέναι εἰσὶν καὶ ἐν ἡμικυκλίῳ.

1. αὐτὰς *Hu* pro αὐτὰ 3. κάθετον B[4]S *Co*, καθέκατον A, καθ᾽ ἕκαστον B[1] cod. *Co* 6. ἐπεζεύχθω A[1] ex ἐπιζεύχθω, ut videtur ἡ ΔΚΘ *Co*, ἡ ΚΘ AB[1]S, ἡ $\overline{\alpha\kappa\vartheta}$ B[4], ἡ $\overline{\delta\vartheta}$ *Sca* 9. τοῖς $\overline{ΒΖ}$ A, distinx. BS παράλληλος — 12. τριγώνῳ interpolatori tribuit *Hu* 11. 12. τῶι $\overline{ΕΖΔ}$ τριγώνωι ABS, corr. *Sca* (τῷ ΚΖΔ τριγώνῳ *Co*) 12. ἡ ante ΗΒ add. *Hu* 14. ἀλλ᾽ ὡς A[2] ex ἄλλως 20. τῆς $\overline{\epsilon\zeta}$ BS, evanuit scriptura in A ἐδείχθησαν B[4] (*ostensum est Co*), ////|θησαν A, ...θησαν B[1], ἐλείφθησαν S, ἐλήφθησαν *Sca* vel alius corrector in S 21. τὴν ἀριθμητικήν (scil. περιέχουσαι μεσότητα) *Hu* pro τῆς ἀριθμητικῆς αἱ δὲ ΑΔ ΒΔ ΔΓ τὴν γεωμετρικήν *Hu*, αἱ δὲ $\overline{\epsilon\eta}$ $\overline{\epsilon\gamma}$ $\overline{\epsilon\delta}$ τῆς γεωμε B[4] (*Co*) et τρικῆς B[1], in A quindecim fere litterae evanuerunt et tantum ετρικῆς manserunt, in S spatium relictum ante γεωμετρικῆς 23. ἡμικύκλω A, corr. BS

in semicirculo tres medietates in sex minimis rectis constituantur, Prop. 16

ex his manifestum est.

Exponatur enim semicirculus $\alpha\beta\gamma$, cuius a centro ε *ducatur* $\varepsilon\beta$ et *diametro* perpendicularis $\beta\delta$, et *rectae* $\varepsilon\beta$ per-



pendicularis $\delta\zeta$, et ducatur per β tangens circulum recta $\vartheta\eta$, et rectâ $\varepsilon\gamma$ productâ ad η ponatur $\beta\vartheta = \beta\eta$, et iungatur recta $\delta\varkappa\vartheta$; dico in harmonica medietate $\varepsilon\varkappa$ mediam esse rectarum $\beta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$, maximum autem *terminum* esse $\beta\varepsilon$, minimum $\varepsilon\zeta$.

Quoniam enim anguli ad β ζ recti sunt, est igitur $\beta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \beta\eta : \zeta\delta = \beta\vartheta : \zeta\delta$. Sed *propter similitudinem triangulorum* $\beta\vartheta\varkappa$ $\zeta\delta\varkappa$ est $\beta\vartheta : \zeta\delta = \beta\varkappa : \zeta\varkappa$, et est $\beta\varkappa = \beta\varepsilon - \varepsilon\varkappa$, et $\zeta\varkappa = \varkappa\varepsilon - \varepsilon\zeta$; est igitur $\beta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \beta\varepsilon - \varepsilon\varkappa : \varkappa\varepsilon - \varepsilon\zeta$. Ergo rectae $\beta\varepsilon$ $\varepsilon\varkappa$ $\varepsilon\zeta$ harmonicam medietatem continent, estque $\varepsilon\varkappa$ media, $\beta\varepsilon$ maxima, $\varepsilon\zeta$ minima. Verum etiam demonstravimus (*supra cap. 28 med.*) rectas $\alpha\delta$ $\varepsilon\gamma$ $\delta\gamma$ arithmeticam, et $\alpha\delta$ $\beta\delta$ $\delta\gamma$ geometricam *medietatem continere;* ergo tres medietates *in sex minimis rectis* $\beta\varepsilon$ (*sive* $\varepsilon\gamma$) $\varepsilon\varkappa$ $\varepsilon\zeta$ $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\beta\delta$*) ex ordine constitutae sunt in semicirculo.

*) Diserte haec addidimus quae cogitatione supplevit Graecus scriptor. Sunt autem utique necessaria atque efficiuntur ex nostra emendatione p. 82, 21, qua demum genuina demonstrationis elegantia restituta est.

44 *ιη'. Ἐπεὶ δὲ καὶ Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικὸς καὶ ἄλλοι τινὲς οὐ μόνον περὶ τῶν πρώτων τριῶν μεσοτήτων εἰρήκασιν, αἳ χρήσιμοι τυγχάνουσιν μάλιστα πρὸς τὰς τῶν παλαιῶν ἀναγνώσεις, ἀλλὰ καὶ περὶ ἄλλων τριῶν κατὰ τοὺς παλαιούς, καὶ ἔτι ταῖς ἐξ ταύταις ἄλλαι ὑπὸ τῶν νεωτέρων προσεύρηνται τέσσαρες, πειρασόμεθα καὶ περὶ τούτων εἰπεῖν ἐπιτονώτερον, ἀκολουθήσαντες μέντοι γε τοῖς πρότερον, οἵτινες ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος ὅρου ποιούμενοι τὴν μετάβασιν τρεῖς ἐξέθεντο τὰς προειρημένας *** [ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος μείζονα μετροῦντες ἄλλας τρεῖς διαφερούσας τῶν πρώτων].*

45 *Ὅταν μὲν γὰρ ᾖ ὡς ὁ τρίτος ὅρος πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ πρώτου ὅρου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, τὴν μεσότητα ὑπεναντίαν τῇ ἁρμονικῇ καλοῦσιν.*

Ὅταν δ' ᾖ ὡς ὁ τρίτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, ἡ μεσότης καλεῖται πέμπτη καὶ ὑπεναντία τῇ γεωμετρικῇ (τινὲς γὰρ αὐτὴν οὕτως ὀνομάζουσιν).

Ὅταν δὲ ὡς ὁ δεύτερος ὅρος ᾖ πρὸς τὸν πρῶτον, ἡ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, καλεῖται ἡ μεσότης ἕκτη, λέγεται δὲ καὶ αὐτὴ ὑπεναντία τῇ γεωμετρικῇ διὰ τὴν αὐτὴν τῶν λόγων ἀντακολουθίαν· ὡς εἶναι κατ' αὐτοὺς μεσότητας ἕξ.

46 *Ὑπὸ δὲ τῶν νεωτέρων, ὡς εἴπομεν, ἄλλαι τέσσαρες τὸν ἀριθμὸν εὑρέθησαν πῇ μὲν συμφερόμεναι, κέχρηνται δὲ καὶ ὅροις ἰδίοις οἱ ταύτας εὑρόντες [νεώτεροι]· καλοῦσι γὰρ τὴν μὲν τοῦ πρώτου ὅρου παρὰ τὸν δεύτερον ὑπεροχὴν πρώτην, τὴν δὲ τοῦ δευτέρου παρὰ τὸν τρίτον ὑπεροχὴν δευτέραν, τὴν δὲ τοῦ πρώτου παρὰ τὸν τρίτον ὑπεροχὴν*

---

1. *ΙΗ* A[1] in marg. (S), om. B 5. *ταῖς ἐξαυταῖς* A, *ταῖς ἐξ αὐταῖς* BS, corr. *Hu* 5. 6. *ἄλλας — προσευρῆσθαι τέσσαρας* AB, corr. *Hu* (nam *προσευρῆσθαι συμβαίνει τέσσαρας* alienum videtur a Pappi usu) 9—11. lacunam statuit et verba *ἀπὸ — πρώτων* interpolatori tribuit *Hu* (conf. p. 87 adnot. 1) 14. *τὴν* om. S 17. *πέμπτη Hu* auctore *Co* pro *πέμπτον* 21. *αὐτὴ* S, *αυτῆι* (sine spir.) A, *αὐτῇ* B[1], *αὕτη* (voluit *αὕτη*) B[3] 24. *τέσσαρες* BS, $\overline{\Delta}$ A 25. *πῇ* S, *πῆι* A,

XVIII. Quoniam autem Nicomachus Pythagoreus aliique [1]) nonnulli non solum de primis tribus medietatibus egerunt, quae omnium utilissimae sunt ad veterum scripta tractanda, sed etiam de aliis tribus quae sunt apud veteres, atque insuper a recentioribus praeter has sex aliae quattuor inventae sunt, etiam de his diligentius scribere conabimur, sequemur tamen vetustiores *scriptores* in eo, quod illi a maiore termino ordientes tres medietates, de quibus *primum* diximus, exposuerunt * * * [*sed* a minore *termino* maiora metientes alias tres diversas a primis].

Si enim sit ut tertius terminus ad primum, ita prima differentia ad secundam [2]), medietatem harmonicae contrariam appellant.

Si autem sit ut tertius terminus ad secundum, ita prima differentia ad secundam, medietas appellatur quinta et geometricae contraria (sunt enim qui sic eam appellent).

Si autem sit ut secundus terminus ad primum, ita prima differentia ad secundam, medietas sexta dicitur; a quibusdam vero haec quoque geometricae contraria vocatur, propterea quod item in consequentia proportionum contrarius ordo est.

Itaque secundum veteres sex *omnino* sunt medietates.

A recentioribus autem, ut diximus, aliae quattuor medietates inventae sunt, aliqua ex parte utiles, et suis quaeque definitionibus distinctae. Appellant enim [recentiores] primam differentiam eam qua primus terminus secundum superat, secundam differentiam eam qua secundus *terminus* tertium, denique tertiam differentiam qua primus tertium;

1) Conf. Procli comm. in Euclid. libr. I p. 67, 5 ed. Friedlein, Herm. Hankel, *Geschichte der Mathematik*, Lipsiae 1874, p. 182.

2) *Primam* et *secundam* differentiam, perinde atque ipse Pappus supra cap. 30, brevius diximus pro "differentia primi termini a secundo" et "secundi termini a tertio." Et conf. paulo infra cap. 46.

πῇ B   πῇ μὲν συμφερόμεναι] haec aut ab interpolatore addita, aut ex genuinis aliis ac fortasse aliquanto pluribus verbis corrupta esse videntur   26. νεώτεροι del. *Hu* *τρίτην, νοουμένου καὶ λεγομένου δηλονότι, καθὰ καὶ ἐν ἀρχῇ διεστειλάμεθα, τοῦ μὲν μεγίστου ὅρου πρώτου, τοῦ δὲ μέσου δευτέρου, τοῦ δὲ ἐλαχίστου τρίτου.*

Καὶ ὅταν ᾖ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν πρώτην, ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητα ἑβδόμην ἐκάλεσαν.

Μένοντος δὲ τοῦ αὐτοῦ λόγου τῶν ὑπεροχῶν, ὅταν γίνηται οὕτως ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, τὴν μεσότητα ὀγδόην ὀνομάζουσιν.

Ὅταν δὲ ᾖ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν πρώτην, ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητα ἐνάτην,

Ὅταν δὲ ᾖ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν, ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητα δεκάτην ὠνόμασαν.

47 *Τούτων δὴ τῶν ὅρων ὑποκειμένων τὰς γενέσεις τῶν δέκα μεσοτήτων ἐκθησόμεθα καὶ διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ὡς εἴπομεν. [ἀναλογία δὲ συνέστηκεν ἐκ λόγων. λόγου δὲ παντὸς ἰσότης ἀρχή.]*

Ἡ τοίνυν γεωμετρικὴ μεσότης ἐκ τῆς ἰσότητος τὴν πρώτην λαβοῦσα γένεσιν αὐτή τε αὑτὴν καὶ τὰς ἄλλας συστήσει μεσότητας, ἐνδεικνυμένη, καθά φησιν ὁ θειότατος Πλάτων, τὴν τῆς ἀναλογίας φύσιν αἰτίαν τῆς ἁρμονίας πᾶσι καὶ τῆς εὐλόγου καὶ τεταγμένης γενέσεως· λέγει γὰρ ἕνα δεσμὸν εἶναι

---

3. *τοῦ* ante *τρίτου* repetit A, corr. BS 5. *ἕβδομον* AB¹S, corr. B⁴ 7. 8. *ὅταν γίνηται οὕτως Hu*, in A octo fere litterae, chartae fragmento superducto, legi non possunt, quam lacunam sequuntur *κατ' αὐτοὺς ὁ πρῶτος* etc., unde lacuna et tum eadem scriptura repetita est in BS 8. *ὅρος* add. *Hu* 8. 9. *τὴν μεσότητα ὀγδόην*] *τὴν μ*, tum undecim fere litterae eo quo statim diximus modo deletae in A, *τὴν αὐτὴν μεσότητα ὀγδόην* B, *τὴν μεσότητα ὄγδοον* S 11. *εvατον* (sine spir. et acc.) A, corr. B (in quo ab alia manu *ἔννατον* scriptum erat, sed id rursus deletum), *ἔννατον* S 17. *ἀναλογία* — 18. *ἀρχή*, manifestum interpretamentum, quod ex Procli commentario in Platonis Timaeum p. 342 ed. Schneider. repetitum esse videtur, del. *Hu* 20. *αυτη τε αυτὴν* A, corr. B (*αὕτη τε αὐτὴν* S) *συνίσταται* coni. *Hu* (*constituit Co*) 23. *λέγει γὰρ* — p. 88, 2 *φύσις* priorum verborum paraphrasim continent fortasse ab interpolatore scriptam

atque in his ubique, sicut etiam initio exposuimus[1]), maximus terminus primus et intellegitur et appellatur, itemque medius *terminus* secundus, minimus tertius.

Et si sit ut tertia differentia ad primam, ita secundus terminus ad tertium, medietatem septimam dixerunt.

Si autem, manente differentiarum proportione, sit *ut tertia differentia ad primam*, ita primus terminus ad secundum, medietatem octavam vocant.

Sed si sit ut tertia differentia ad primam, ita primus terminus ad tertium, medietatem nonam; denique

Si sit ut tertia differentia ad secundam, ita secundus terminus ad tertium, medietatem decimam appellaverunt.

His igitur definitionibus praemissis, quomodo quaeque decem medietatum oriatur, etiam per geometricam analogiam, ut *supra* (*cap. 29*) professi sumus, explicabimus.

Geometrica igitur medietas, cum ex aequalitate primum ortum habeat, et se ipsam et alias medietates constituet ostendens, ut ait divinus Plato[2]), analogiae naturam omnium rerum harmoniae et rationalis ordinatique ortus procreatricem esse. Dicit enim omnium quaecunque procreata sunt

1) Graeca *καθὰ καὶ ἐν ἀρχῇ διεστειλάμεθα* quo referenda sint, non satis liquet. Nam supra cap. 44 talem quidem disquisitionem inchoavit scriptor et quasi praeteriens tetigit, neque tamen ad finem persecutus est. Et cum illo loco verba quae in codice exstant *ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος μείζονα μετροῦντες* cet. ineptius composita ac sanae continuaeque orationi prave inculcata esse videantur (namque etiam in quarta quinta sextaque medietate a maioribus terminis veteres inceperunt, id quod ex huius libri propos. 21—23 elucet), forsitan his eiectis post *προειρημένας* latior lacuna statuenda sit, in qua omnia interciderint, quaecunque verbis *καθὰ — διεστειλάμεθα* significat scriptor. Ceterum iam supra cap. 30 glossa *πρῶτα δὲ ἀκούειν δεῖ τὰ ὑπερέχοντα*, ab interpolatore quodam adiecta, simile quid monuit; nam *πρῶτα* ille esse voluit et *πρῶτον ὅρον* et *πρώτην ὑπεροχήν*, itaque progressionem ad minus descendentem intellexit. Sed nihil eius modo illo quidem loco Pappus in mentem induxit, cuius definitio, ut aiunt, generalis est valetque etiam de progressione augescente.

2) Non ipsa Platonis verba a scriptore citantur: sed haec sententia liberius composita est ex pluribus Timaei locis: vide p. 31, B. C; 32, A. C (similiter Locr. p. 95, B. C; 99 A. B); 41, E (*ὅτι γένεσις πρώτη μὲν ἔσοιτο τεταγμένη μία πᾶσιν*); 29, E (*γενέσεως καὶ κόσμου ἀρχήν*); 80, B (*διὰ τὴν τῆς θείας ἁρμονίας μίμησιν*). Conf. etiam nostram scriptionem supra p. 59 adnot. * citatam.

τῶν μαθημάτων ἁπάντων, αἰτία δὲ γενέσεως καὶ δεσμὸς πᾶσι τοῖς γενομένοις ἡ τῆς ἀναλογίας θεία φύσις. δειχθήσεται δὲ ἡ σύστασις τῶν δέκα μεσοτήτων διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας προθεωρηθέντος τοῦδε.

48 Τρεῖς ἀνάλογον ἔστωσαν ὅροι οἱ Α Β Γ καὶ συναμφοτέρῳ μὲν τῷ Α Γ μετὰ β΄ τῶν Β ἴσος ἐκκείσθω ὁ Δ, συναμφοτέρῳ δὲ τῷ Β Γ ὁ Ε, τῷ δὲ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Δ Ε Ζ ὅροι ἀνάλογόν εἰσιν.

Ἐπεὶ γάρ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἔσται καὶ συνθέντι ὡς συναμφότερος ὁ ΑΒ πρὸς τὸν Β, οὕτως συναμφότερος ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Γ· καὶ πάντες ἄρα οἱ ἡγούμενοι πρὸς πάντας τοὺς ἑπομένους εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὡς συναμφότερος ὁ Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ πρὸς συναμφότερον τὸν Β Γ, οὕτως συναμφότερος ὁ Β Γ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἔστιν συναμφοτέρῳ μὲν τῷ Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ ἴσος ὁ Δ, συναμφοτέρῳ δὲ τῷ Β Γ ἴσος ὁ Ε, καὶ τῷ Γ ὁ Ζ· καὶ οἱ Δ Ε Ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν [ἐν τῷ συναμφοτέρου τοῦ Α Β πρὸς τὸν Β λόγῳ].

49 Διόπερ ἴσων μὲν ὑποκειμένων τῶν Α Β Γ οἱ Δ Ε Ζ ἐν τῇ διπλασίᾳ γένοιντ' ἂν ἀναλογίᾳ· συναμφότερος γὰρ ὁ Α Γ μετὰ δύο τῶν Β διπλάσιος συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, συναμφότερος δὲ ὁ Β Γ τοῦ Γ διπλάσιος· τῶν δὲ Α Β Γ ἐν τῇ διπλασίᾳ ἀναλογίᾳ ὑποκειμένων, μεγίστου μὲν ὄντος ἐν αὐτοῖς τοῦ Α οἱ Δ Ε Ζ ἔσονται ἐν τῇ τριπλασίᾳ, ἐλαχί-

---

1. *μαθημάτων*] immo *γεννημάτων* *Hu* 4. *πρὸσ|θεωρήθεντος* A[1] ex *πρὸσ|θεωρήματος*, *πρὸς θεωρηθέντος* B[1], corr. B[3]S 5. *συναμφοτέρων* AB[1], corr. B[3]S 6. *τῶι* $\overline{A\Gamma}$ AS, distinx. B 7. *δὲ τῷ* $\overline{\beta}$ $\overline{\gamma}$ B, *δὲ τῶι* $\overline{B}$ AS 9. *ὡς ὁ* $\overline{A}$ *πρὸς τὸν* $\overline{\Gamma}$, omissis reliquis, AB[1]S, corr. B[4] *Co* 10. *ὡ συναμφότερος* A, corr. BS 11. *ὁ* $\overline{\beta\gamma}$ B[3] in rasura S, *τὸ* $\overline{B\Gamma}$ A 12. 13. *εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ* forsitan interpolator addiderit; conf. tamen infra cap. 53 13. *ὁ* ante *συναμφότερος* additum in ABS, del. *Hu* *ὁ* $\overline{AB}$ — *τοῦ* $\overline{B\Gamma}$ ABS, distinx. *Hu* (item posthac) 14. *τὸν* $\overline{\beta\gamma}$ (ante *οὕτως*) BS, *τοῦ* $\overline{B\Gamma}$ A 15. *τῶι* $\overline{AB}$ ABS (sed statim posthac recte A *τοῦ* $\overline{B}$ $\overline{\Gamma}$) 16. *δὲ τῶι* $\overline{B\Gamma}$ AS, distinx. B 18. *ἐν τῷ — λόγῳ* del. *Hu* *τοῦ* $\overline{AB}$ AS, distinx. B *λόγῳ* om. S 19. *Διόπερ ἴσον* etc.] De hoc cap. 49 idem iudicandum esse videtur quod supra

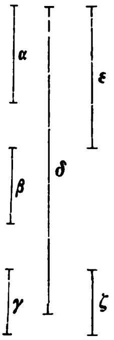
unum vinculum esse; causa autem procreationis et vinculum, quo omnia procreata continentur, est analogiae divina natura. Demonstrabitur autem decem medietatum per geometricam analogiam constitutio hoc praemisso theoremate.

Sint tres termini proportionales α β γ, et ponatur Prop. 17

$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma$, et

$\varepsilon = \beta + \gamma$, et

$\zeta = \gamma$;



dico terminos δ ε ζ proportionales esse.

Quoniam enim est $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, erit etiam componendo

$\alpha + \beta : \beta = \beta + \gamma : \gamma$, itaque summa antecedentium ad summam consequentium erit in eadem proportione (*elem.* 5, 12), *scilicet*

$$\alpha + 2\beta + \gamma : \beta + \gamma = \beta + \gamma : \gamma.$$

Et *ex hypothesi* est $\delta = \alpha + 2\beta + \gamma$, et $\varepsilon = \beta + \gamma$, et $\zeta = \gamma$; ergo etiam $\delta : \varepsilon = \varepsilon : \zeta$.

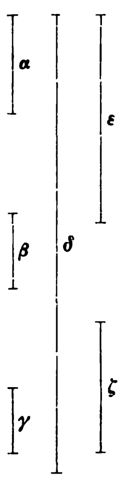
Itaque suppositis aequalibus α β γ, erunt δ ε ζ in dupla proportione; est enim $\alpha + 2\beta + \gamma = 2(\beta + \gamma)$, et $\beta + \gamma = 2\gamma$. Contra si α β γ in dupla proportione supponantur (*id est aut* $\alpha : \beta = \beta : \gamma = 2 : 1$, *aut* $\alpha : \beta = \beta : \gamma = 1 : 2$) et *in priore casu* α maximus terminus sit, erunt δ ε ζ in tripla *proportione*, contra si α minimus terminus Prop. 18*)

*) Hoc numerorum exemplum, quod omnino simile est superiori illi in propos. 15, singularis propositionis loco numerat Commandinus, praemisso titulo "Geometricas medietates per analogiam invenire." In Graecis non solum ea quae in versione Latina sequitur propositio 19, sed etiam alia nonnulla antea excidisse videntur, quorum loco interpolator hoc quod nunc exstat cap. 49 posuerit. Conf. append. ad propos. 24.

---

ad p. 78, 18 adnotatum est 20. *διπλασία γένοιτ' ἀναλογίαι* A(BS), corr. *Hu* *συναμφότεραι γὰρ* A, corr. BS 20. 21. *ὁ* $\overline{ΑΓ}$ AS, distinx. B 21. 22. *τοῦ* $\overline{ΒΓ}$ — *ὁ* $\overline{ΒΓ}$ AS, distinx. B 24. *ἔσονται* add. *Hu*, *fient Co* *ἐν τῇ τριπλασίᾳ* B[3] (*Co*), *ἐν τῆι|//πλασίαι* A, *ἐν τῇ διπλασίᾳ* B[1], lacuna ante *διπλασίᾳ* in S στον δὲ ἐν τῇ ἡμιολίᾳ· καὶ γὰρ συναμφότερος ὁ Α Β τοῦ Β τριπλάσιος μέν ἐστιν, εἰ διπλάσιος εἴη ὁ Α τοῦ Β, ἡμιόλιος δέ, εἰ ὁ Α τοῦ Β ἥμισυς εἴη. καὶ οὕτως ἀπὸ τῶν ἑξῆς λόγων οἱ ἀκόλουθοι πολλαπλάσιοί τε καὶ ἐπιμόριοι εὑρίσκονται. καὶ πάλιν, εἰ μονάδες εἶεν οἱ Α Β Γ, ἡ κατὰ τοὺς Δ Ε Ζ γεωμετρικὴ μεσότης ἐν ἐλαχίστοις λέγοιτ' ἂν ἀριθμοῖς τοῖς δʹ βʹ αʹ.

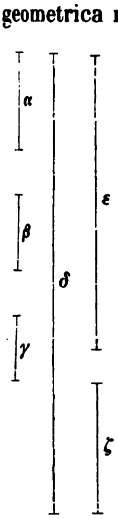
50 ιθʹ. Ἡ ἁρμονικὴ μεσότης διὰ ἀναλογίας οὕτως συνίσταται [καὶ τῆς ἰσότητος ἐν τῇ τάξει τῆς ἀναλογίας διαφόρως κἀνταῦθα κἂν τοῖς ἑξῆς παραλαμβανομένης]. ὑποκείσθωσαν ὅροι τρεῖς ἀνάλογον οἱ Α Β Γ, καὶ δύο μὲν τοῖς Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, δύο δὲ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ἑνὶ δὲ τῷ Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν ἁρμονικὴν ποιοῦσι μεσότητα.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α Β Γ, ἔσονται καὶ ὡς δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β, οὕτως δύο οἱ Β μετὰ τοῦ Γ πρὸς τὸν Γ, καὶ πάντες πρὸς πάντας δύο οἱ Α μετὰ τριῶν τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ πρὸς τοὺς Β Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β. καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α μετὰ τοῦ

1. συναμφότερος BS, συναμ| A reliquis obductis ὁ $\overline{AB}$ AS, ὁ $\bar{\beta}$ $\bar{\gamma}$ B 2. ὁ Α τοῦ Β *Co* pro ὁ $\overline{B}$ τοῦ $\overline{A}$ 3. δὲ η $\overline{\Theta A}$ τοῦ $\overline{B}$ A (et B[1], ut videtur), δὲ ὁ $\bar{\gamma}$ τοῦ $\bar{\beta}$ B[4], δὲ ὁ $\overline{\vartheta\alpha}$ τοῦ $\bar{\beta}$ S, corr. *Hu* auctore *Co* καὶ ὁμοίως ἀπὸ coni. *Hu* 5. εἶεν οἱ B[4]S, εἶναι A $\overline{\Delta}$ (ante Β Γ, ἡ κατὰ) A, corr. BS 7. τοῖς $\bar{\delta}$ $\bar{\beta}$ $\bar{\alpha}$ B[3] in rasura, τοῖς $\overline{\Delta B}$ $\overline{A\Gamma}$ AS 8. $\overline{I\Theta}$ A[1] in marg. (S), om. B δι' S 9. οὕτω hoc loco etiam A, sicut BS fere constanter ante consonas 9. καὶ τῆς — 11. παραλαμβανομένης interpolatori tribuit *Co* 10. κἂν *Hu* pro καὶ 11. παραλαμβανομένης AB[3], παραλαμβανομένοις B[1]S 12. οἱ $\overline{AB\Gamma}$ A, distinx. BS 13. τρισὶ τοῖς δύο AB[1] cod. *Co*, corr. B[3]S *Co* $\overline{\Gamma}$ (ante ἴσος) A[2] in rasura quattuor litterarum 14. δυσὶ δὲ τοῖς B 17. οἱ $\overline{AB}$ $\overline{\Gamma}$ A, distinx. BS 20. δύο οἱ $\bar{\alpha}$ B *Co*, δύο ὁ $\overline{IA}$ A (δύο ὁ $\overline{\varepsilon\alpha}$ cod. *Co*, δύο οἱ $\overline{\varepsilon\alpha}$ S) 23. μετὰ τοῦ — p. 92, 1 οἱ Α om. AB[1]S, add. B[4] in marg. (eadem in suo codice legisse videtur *Co*)

sit, in sesquialtera. Erit enim, si sit $\alpha = 2\beta$, $\alpha + \beta = 3\beta$, contra si sit $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, $\alpha + \beta = \frac{3\beta}{2}$. Et similiter ex reliquis proportionibus (*scilicet quadrupla, quintupla cet.*) numeri, qui hinc consequuntur, et multiplices et superparticulares inveniuntur. Et rursus, si unitates sint $\alpha\ \beta\ \gamma$, numerorum $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ geometrica medietas in minimis numeris 4 2 1 *constitui* dicatur.



Arithmetica medietas per analogiam sic constituitur. Prop. 19*)

Supponantur tres termini proportionales $\alpha\ \beta\ \gamma$, *et sit*

$$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \beta + \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ *arithmeticam medietatem constituere.*

Quoniam enim est $\delta : \delta = \alpha + \beta : \alpha + \beta$, *et ex hypothesi*

$\alpha + \beta = \delta - \varepsilon = \varepsilon - \zeta$, *est igitur* $\delta : \delta = \delta - \varepsilon : \varepsilon - \zeta$, *quae est arithmetica medietas* (*supra cap. 30*). *Et apparet, si* $\alpha\ \beta\ \gamma$ *unitates ponantur, hanc medietatem in minimis numeris 6 4 2 constitui.*

XIX. Harmonica medietas per analogiam sic constituitur. Prop. 20
Supponantur tres termini proportionales $\alpha\ \beta\ \gamma$, et sit

$$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \beta + \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ harmonicam medietatem efficere.

Quoniam enim proportionales sunt $\alpha\ \beta\ \gamma$, erit etiam *multiplicatione per 2 factâ et componendo*

$\frac{2\alpha + \beta}{\beta} = \frac{2\beta + \gamma}{\gamma}$, et summâ antecedentium consequentiumque factâ (*elem. 5, 12*)

$\frac{2\alpha + 3\beta + \gamma}{\beta + \gamma} = \frac{2\alpha + \beta}{\beta}$, id est (*ex hypothesi*)

*) Hanc propositionem in Graecis omissam addidimus auctore Commandino. Sed hic aliter et $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ definit et minimos numeros ponit 5 3 1. Conf. append. ad. propos. 24.

Β ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχουσι δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή, εἷς δὲ ὁ Β ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Ε Ζ ὑπεροχή. ὅταν δὲ ᾖ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχήν, ἡ μεσότης ἐστὶν ἁρμονική. καὶ δῆλον ὅτι λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, μονάδων ὑποτεθεισῶν ὁμοίως τῶν Α Β Γ, τοῖς ς' γ' β'.

51 κ'. Ἡ τῇ ἁρμονικῇ ὑπεναντία μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ὅρων ἀνάλογον ὑποκειμένων τῶν Α Β Γ δύο μὲν τοῖς Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, δύο δὲ τοῖς Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ἑνὶ δὲ τῷ Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν εἰρημένην ποιοῦσι μεσότητα.

Πάλιν γὰρ ὁμοίως τοῖς προδεδειγμένοις ἔσται ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β. καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α μετὰ τοῦ Β ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἑνὸς τοῦ Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Ε Ζ ὑπεροχή, εἷς δὲ ὁ Β ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχουσι δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν Α καὶ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή· ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχήν, ὅπερ ἐστὶ κατὰ τὴν μεσότητα τὴν τῇ ἁρμονικῇ ὑπεναντίαν. δῆλον δ' ὅτι καί, μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν Α Β Γ, εἴη ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἡ μεσότης τοῖς ς' ε' β'. [ἡ αὐτὴ καταγραφή.]

52 Ἡ πέμπτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθωσαν ἀνάλογον ὅροι τρεῖς οἱ Α Β Γ, καὶ ἑνὶ μὲν

---

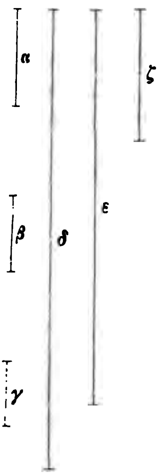
2. *τῶν* $\overline{\Delta E}$ A, distinx. BS 3. *ὑπεροχῆς ἐστιν* AB[1]S, corr. B[3] 4. *τοῦ* $\overline{B\Gamma}$ AS, *distinx. B *τῶν* $\overline{EZ}$ A, distinx. BS, item paulo post vs. 6 7. *λέγοιτα μὲν | ἐλαχίστοις* A, corr. BS 9. $\overline{K}$ A[1] in marg. (S), om. B 10. *οὕτω* ABS (conf. ad p. 90, 9) *ὅρων Hu* auctore *Co* pro *τῶν* 11. *δύο μὲν* B[1]S, *λυομεν* (sine acc.) A, *δυσὶ μὲν* B[3] 11. 12. *τῶι* $\overline{\Gamma}$ *ὁ* $\overline{E}$ *ἴσος* A, sed *ὁ* $\overline{E}$ del. prima m. 15—17. *ὡς ὁ* ||||||||||| *οἱ* $\overline{A}$ *μετὰ τοῦ* $\overline{B}$ *πρὸς τὸν Β καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α* |||||||||||

$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{2\alpha + \beta}{\beta}$. Et est $2\alpha + \beta = \delta - \varepsilon$, et

$\beta = \varepsilon - \zeta$.

Si vero sit $\delta : \zeta = \delta - \varepsilon : \varepsilon - \zeta$, harmonica est medietas (*supra cap. 30*). Et apparet, si unitates supponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$, *hanc medietatem* in minimis numeris 6 3 2 constitui.

XX. Harmonicae contraria medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 21



Suppositis terminis proportionalibus α β γ sit

$$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = 2\alpha + 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \beta + \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ medietatem harmonicae contrariam efficere.

Rursus enim similiter, ac modo demonstratum est, erit

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{2\alpha + \beta}{\beta}. \text{ Et est}$$
$$2\alpha + \beta = \varepsilon - \zeta, \text{ et}$$
$$\beta = \delta - \varepsilon; \text{ ergo}$$
$$\frac{\zeta}{\delta} = \frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon - \zeta},$$

id quod contingit secundum medietatem harmonicae contrariam (*supra cap. 45*). Et apparet, si unitates supponantur α β γ, hanc medietatem in minimis numeris 6 5 2 consistere.

Quinta medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 22

Exponantur tres termini proportionales α β γ, et sit

| *η ὑπερέχουσιν* A, *ὡς ὁ* $\overline{\delta}$ .... *οἱ* $\overline{\alpha}$ *μετὰ τοῦ* $\overline{\beta}$ *πρὸς τὸν* $\overline{\beta}$· *καὶ εἰσὶ δύο μὲν οἱ* $\overline{\alpha}$ .... *ἢ ὑπερέχουσι* B[1]S, lacunas explevit B[4] (*Co*) 19. *τῶν* $\overline{EZ}$ A, distinx. BS 19. 20. *εἷς δὲ — δύο οἱ* $\overline{\alpha}$ add. B[4] (*Co*) 21. *τῶν* $\overline{\Delta E}$ A, distinx. BS, item proximo versu 23. *τῶν E Z*] $\overline{EZ}$ AS, distinx. B, *τῶν* add. *Hu* 24. *ὑπεναντία* A, corr. BS 25. *τῶν* $\overline{AB\Gamma}$ A, distinx. BS *εἴη ἂν Hu*, *εἴτε* AB[1]S, *ἔσται* B[4] 26. *τοῖς* $\overline{\varsigma EB}$ A, distinx. BS *ἡ αὐτὴ καταγραφή* del. *Hu*

τῷ Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, ἑνὶ δὲ τῷ Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ἑνὶ δὲ τῷ Β *καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ κατὰ τὴν πέμπτην εἰσὶ μεσότητα.*

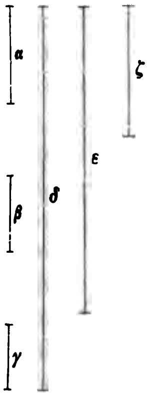
Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐστὶν ὡς ὁ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β μετὰ τοῦ Γ πρὸς τὸν Γ, ἔσται καὶ συναμφότερος ὁ ἡγούμενος ὁ Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ πρὸς τὸν ἑπόμενον συναμφότερον τὸν Β Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως συναμφότερος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β. *καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ὁ Α Β ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει εἷς ὁ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἑνὸς τοῦ Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Ε Ζ ὑπεροχή, ὁ δὲ Β ᾗ ὑπερέχει εἷς ὁ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἑνὸς τοῦ Α καὶ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή·* ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ *πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχήν, ὅπερ τῇ πέμπτῃ συμβέβηκεν μεσότητι. καὶ λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς εʹ δʹ βʹ, μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν Α Β Γ. [ἡ αὐτὴ δὲ καταγραφή.]*

53 *Ἡ ἕκτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθω ἡ αὐτὴ τῶν Α Β Γ ὅρων ἀναλογία, καὶ ἑνὶ μὲν τῷ Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ δύο τοῖς Γ ἴσος ὁ Δ, ἑνὶ δὲ τῷ Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ὁ δὲ Ζ ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν προκειμένην ποιοῦσι μεσότητα.*

Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐστὶν ὡς ὁ Α μετὰ δύο τῶν Β πρὸς συναμφότερον τὸν Α Β, οὕτως ὁ Β μετὰ δύο τῶν Γ πρὸς συναμφότερον τὸν Β Γ, καὶ πάντες οἱ ἡγού-

---

2. *καὶ δυσὶ* (*δύο Hu*) *τοῖς* $\overline{\beta}$ — *τῷ* $\overline{\beta}$ add. B[4] (*Co*) 3. *πέμπτην* S, $\overline{E}$ AB 5. ὁ $\overline{\alpha}$ B[2]S, ἡ $\overline{A}$ B[1]S 6. ὁ $\overline{B}$ (ante *μετὰ τοῦ Γ*) A[1] ex ὁ $\overline{A}$ 7—9. ὁ $\overline{AB}$ — *τοῦ* $\overline{B\Gamma}$ — *τὸν* $\overline{B\Gamma}$ etc. AS, distinx. B 7. 8. *συναμφοτέρου τοῦ Hu, τοῦ συναμφοτέρου* AB[1]S, *τοῦ συναμφοτέρου τοῦ* B[3] 10. *πρὸς τὸν* $\overline{\beta}$ add. B[4] 12. *τῶν Ε Ζ Co, τῶν* $\overline{\Delta E}$ A, *τῶν* $\overline{\delta}$ $\overline{\varepsilon}$ BS 12. *ὁ δὲ Β* — 14. *τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή* om. B[1] (add. B[3]) 12. ᾗ B[3], *ὡς* AS 13. *τρεῖς ὁ* $\overline{B}$ AS, *δύο οἱ* $\overline{\beta}$ B[3] 14. *τῶν* $\overline{\Delta E}$ (post *τουτέστιν ἡ*) A, distinx. S, *τῶν* $\overline{\varepsilon}$ $\overline{\zeta}$ B[3] cod. *Co* 15. *ὡς ἄρα — ὑπεροχὴ* add. *Co*, *ὡς ἄρα ὁ* $\overline{\varepsilon}$ *πρὸς τὸν* $\overline{\zeta}$. *οὕτως ἡ τῶν* $\overline{\delta}$ $\overline{\varepsilon}$ *ὑπεροχὴ* add. B[3] cod. *Co* 16. *τῶν* $\overline{EZ}$ et 17. *τοῖς* $\overline{E\Delta B}$ A, distinx. BS 18. *ἡ αὐτὴ*



$$\delta = \alpha + 3\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \beta + \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ in quinta medietate esse.

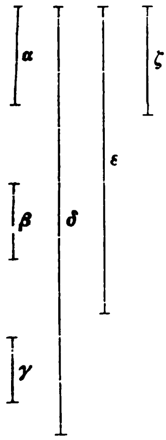
Quoniam enim propter analogiam *et componendo* est $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma}$, summâ antecedentium consequentiumque factâ (*elem.* 5, 12) erit etiam

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Et est

$$\alpha + \beta = \varepsilon - \zeta, \text{ et}$$
$$\beta = \delta - \varepsilon; \text{ ergo}$$

$\frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\delta-\varepsilon}{\varepsilon-\zeta}$, id quod in quinta medietate contingit (*supra cap.* 45). Atque, si unitates supponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$, *haec medietas* in minimis numeris 5 4 2 *constitui* dicatur.



Sexta medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 23

Exponatur eadem proportio $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, et sit

$$\delta = \alpha + 3\beta + 2\gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \alpha + \beta - \gamma;$$

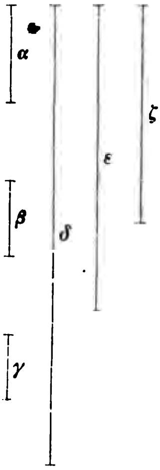
dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ sextam medietatem efficere.

Quoniam enim propter analogiam [1]) est $\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta+2\gamma}{\beta+\gamma}$, et summâ antecedentium consequentiumque factâ (*elem.* 5, 12)

1) Est enim ex hypothesi et componendo et e contrario $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$, atque $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$; ergo per additionem $\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta+2\gamma}{\beta+\gamma}$.

δὲ καταγρ. del. Hu 22. ἔστω Hu pro καὶ 24. ποιήσουσι S
26. τὸν $\overline{AB}$ AS, distinx. B (paulo post recte τὸν $\overline{B}\ \overline{\Gamma}$ et τοῦ $\overline{B}\ \overline{\Gamma}$ etiam A)

μενοι πρὸς πάντας τοὺς ἑπομένους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὡς ὁ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ δύο οἱ Γ πρὸς συναμφότερον τὸν Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Β μετὰ δύο τῶν Γ πρὸς συναμφότερον τὸν Β Γ, καὶ ἔστιν ὁ μὲν Β μετὰ δύο τῶν Γ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ Α μετὰ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει συναμφότερος ὁ Α Β τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Ε Ζ ὑπεροχή, συναμφότερος δὲ ὁ Β Γ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει ὁ Α μετὰ τριῶν τῶν Β καὶ δύο τῶν Γ ἑνὸς τοῦ Α καὶ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή, ὡς ἄρα Ε πρὸς Δ, οὕτως ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχήν, ὥστε οἱ Δ Ε Ζ τὴν ἕκτην ποιοῦσι μεσότητα. καὶ συνίσταται ὁμοίως ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς ϛ′ δ′ α′, μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν Α Β Γ. [ἡ αὐτὴ καταγραφή.]



* * *

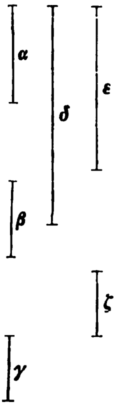
54 *κα′. Ἡ δὲ ὀγδόη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀνάλογον ὅροι οἱ Α Β Γ, καὶ δύο μὲν τοῖς Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ἴσος ὁ Δ, ἑνὶ δὲ τῷ Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ε, δύο δὲ τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ κατὰ τὴν ὀγδόην εἰσὶ μεσότητα.*

---

2. 3. *τὸν ΑΒ* AS, distinx. B 4—6. *οὕτως ὁ Β* ////////// *Γ πρὸς συναμφότερον τῶν ΒΓ καὶ ἔστιν ὁ μὲν Β μετὰ* | //////// *υπεροχὴ η ὑπερέχει ὁ Α μετὰ δύο τῶν Β* A, eaedemque lacunae in BS, quas explevit et *τὸν β γ, καὶ ἔστιν* corr. B[3] (*Co*) 6. *ἑνὸς* add. *Hu* *τῆς ὑπεροχῆς* AS, *ἡ ὑπεροχὴ* B[3] in rasura 7. *ὁ ΑΒ τοῦ Γ* AB[1]S (*Co*), *ὁ α β μετὰ τοῦ συναμφοτέρου β γ* B[4], *ὁ α β μετὰ τοῦ συναμφοτέρου τοῦ β γ* cod. *Co* *τῶν ΕΖ* A, distinx. BS 8. *ὁ ΒΓ* AS, distinx. B. 9. *τριῶν τῶν β* BS (*Co*), *τριῶν τῶν δύο* cod. *Co* 10. *τῶν ΔΕ* A, distinx. BS, item paulo post (sed mox *τῶν Ε Ζ — οἱ Δ Ε Ζ* etc. recte etiam A) 10. 11. *ὡς ἄρα — ὑπεροχὴ* add. A[2] in marg. (BS) 16. *ἡ αὐτὴ κα-*

$\frac{\beta + 2\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha + 3\beta + 2\gamma}{\alpha + 2\beta + \gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$, atque est $\beta + 2\gamma = \varepsilon - \zeta$, et $\beta + \gamma = \delta - \varepsilon$, ergo $\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\delta - \varepsilon}{\varepsilon - \zeta}$; itaque termini $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ sextam efficiunt medietatem (*supra cap. 45*). Et similiter, si unitates supponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$, *haec medietas* in minimis numeris 6 4 1 constituitur.

Septima medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 24*)



Exponantur tres termini proportionales $\alpha\ \beta\ \gamma$, et sit*

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \alpha + \beta, \text{ et}$$
$$\zeta = \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ septimam medietatem constituere.

Quoniam enim ex hypothesi est

$$\delta - \zeta = \alpha + \beta = \varepsilon, \text{ et}$$
$$\delta - \varepsilon = \gamma = \zeta, \text{ est igitur}$$

$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta - \zeta}{\delta - \varepsilon}$, *id quod in septima medietate contingit (supra cap. 46). Atque, si unitates ponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$, haec medietas in minimis numeris 3 2 1 constituitur.*

XXI. Octava medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 25

Exponantur tres termini proportionales $\alpha\ \beta\ \gamma$, et *sit*

$$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = 2\beta + \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ secundum octavam medietatem esse.

*) Vide append.

ταγραφή del. *Hu* 17. $\overline{KA}$ A[1] in marg., om. BS 18. *οὖτω* ABS (conf. ad p. 90, 9) 19. *τρεῖς Hu* pro *οἱ* *οἱ* $\overline{ABΓ}$ A, distinx. BS *καὶ δυσὶ* B[3], item posthac

Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ὡς δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς συναμφότερον τὸν Α Β, οὕτως δύο οἱ Β μετὰ τοῦ Γ πρὸς συναμφότερον τὸν *Β Γ, καὶ πάντες πρὸς πάντας, ὡς δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ πρὸς ἕνα τὸν Α καὶ δύο τοὺς Β καὶ ἕνα τὸν Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς συναμφότερον τὸν Α Β, καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α μετὰ τοῦ Β ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχή, συναμφότερος δὲ ὁ Α Β ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἑνὸς τοῦ Α καὶ δύο τῶν Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή, καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Δ Ε ὑπεροχήν, ὅπερ τὴν ὀγδόην συνίστησι μεσότητα. καὶ λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς ϛ' δ' γ', μονάδων νοουμένων τῶν Α Β Γ.*

55 *κβ'.* Ἡ *ἐνάτη μεσότης* δι' *ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. τῶν Α Β Γ ἀνάλογον ὑποκειμένων ἑνὶ μὲν τῷ Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, ἑνὶ δὲ τῷ Α καὶ ἑνὶ τῷ Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ* Ε, ἑνὶ δὲ τῷ Β καὶ ἑνὶ τῷ Γ ὁ *Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν ἐνάτην περιέχουσιν μεσότητα.*

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β, οὕτως συναμφότερος ὁ Β Γ πρὸς τὸν Γ, καὶ πάντες πρὸς πάντας, ὡς ὁ Α μετὰ δύο τῶν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς συναμφότερον τὸν Β Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως συναμφότερος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ συναμφότερος μὲν ὁ Α Β ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει εἷς ὁ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχή, ὁ δὲ Β ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει εἷς ὁ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἑνὸς τοῦ Α καὶ ἑνὸς τοῦ Β καὶ ἑνὸς τοῦ Γ,

2. *Α Β οὕτως* — 3. *συναμφότερον τὸν* om. AB[1]S, add. B[4] (*Co*) 6. *συναμφότερον τὸν* $\overline{ZE}$ AB[1]S cod. *Co*, corr. B[3] (*Co*) 9. *τῶν* $\overline{\Delta Z}$ A, distinx. BS 9. 10. ὁ $\overline{AB}$ AS, distinx. B 12. *τῶν* $\overline{\Delta E}$ A, distinx. BS 12. 13. *πρὸς τὸν* $\overline{Z}$ *ἡ τῶν* $\overline{\Delta E}$ *ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν* $\overline{\Delta Z}$ *ὑπεροχήν* AB[1] (item S cod. *Co*, nisi quod pro $\overline{\Delta Z}$ S habet $\bar{\delta}\ \bar{\varepsilon}\ \bar{\zeta}$ et cod. *Co* $\alpha\ \zeta$), corr. B[3] (*Co*) 15. *τοῖς* $\overline{H}\ \overline{\Lambda}\ \overline{\Gamma}$ AB[1]S cod. *Co*, corr. B[3] (*Co*) 16. $\overline{KB}$ A[1] in marg. (S), om. B *ενάτη* A(B[1]), *ἐννάτη* B[3]S *δι'* add.

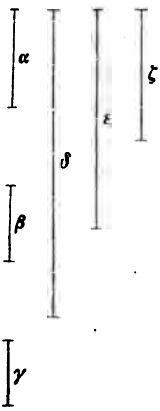
Quoniam enim propter analogiam [1]) est

$\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$, et summâ antecedentium consequentiumque factâ (*elem. 5, 12*)

$\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2\alpha+3\beta+\gamma}{\alpha+2\beta+\gamma} = \frac{\delta}{\varepsilon}$, atque est $2\alpha+\beta = \delta-\zeta$, et $\alpha+\beta = \delta-\varepsilon$, ergo

$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\delta-\zeta}{\delta-\varepsilon}$, id quod octavam medietatem constituit (*supra cap. 46*). Atque haec in minimis numeris 6 4 3 *consistere* dicatur, si unitates ponantur α β γ.

XXII. Nona medietas per analogiam sic constituitur. Prop. 26



Iisdem *terminis* α β γ suppositis sit

$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma$, et

$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma$, et

$\zeta = \beta + \gamma$;

dico terminos δ ε ζ nonam complecti medietatem.

Quoniam enim *propter analogiam et componendo* est

$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma}$, et summâ (*ut in superioribus*) factâ

$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\delta}{\zeta}$, atque est

$\alpha + \beta = \delta - \zeta$, et

$\beta = \delta - \varepsilon$, ergo

1) Est enim, quia ex hypothesi $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, e contrario et componendo et rursus e contrario $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}$, et $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$; ergo per additionem $\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$.

Hu (hoc enim facilius interciderit quam alterum, quod exspectamus, *ἐκ τῆς*) *οὕτω* ABS (conf. ad p. 90, 9) 17. *τῶν* $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{\Gamma}$ A[1]B, post *τῶν* add. *γὰρ* A rec. S, *τῶν αὐτῶν* vel *ὅρων τῶν* *Α Β Γ* coni. *Hu* *ἑνὶ μὲν* BS, *εἰ μὲν* A 17. 18. *δυσὶ τοῖς* B[3] 19. *Ε — τῷ Γ ὁ* om. AB[1]S, add. *Co* (similiter post *ἑνὶ δὲ τῷ* $\bar{\alpha}$ B[4] add. *καὶ ἑνὶ τῷ* $\bar{\beta}$ *καὶ ἑνὶ τῷ* $\bar{\gamma}$ *ὁ* $\bar{\varepsilon}$) 20. *ενάτην* A(B), *ἐννάτην* S 21. *ὡς συναμφοτέρους* A, corr. BS 21. 22. *ὁ* $\overline{AB}$ — *ὁ* $\overline{B\Gamma}$ AS, distinx. B, ac similiter posthac 27. *τῶν* $\overline{\Delta Z}$ A, distinx. BS, ac similiter posthac *τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ε ὑπεροχή, καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Δ Ε ὑπεροχήν, ὅπερ τῆς ἐνάτης μεσότητος ἴδιόν ἐστιν. καὶ περιέχουσιν αὐτὴν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ δ' γ' β', μονάδων ὑποκειμένων ὁμοίως τῶν Α Β Γ. [ἡ αὐτὴ καταγραφή.]*

56 *κγ'. Ἡ δεκάτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. πάλιν τριῶν ἀνάλογον ὄντων τῶν Α Β Γ τοῖς μὲν Α Β Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, τοῖς δὲ Β Γ ὁ Ε, τῷ δὲ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ κατὰ τὴν δεκάτην εἰσὶ μεσότητα.*

Ἐπεὶ γὰρ ὡς συναμφότερος ὁ Β Γ πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως συναμφότερος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β, καὶ ἔστιν συναμφότερος ὁ Α Β ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχουσιν οἱ Α Β Γ τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχή, ὁ δὲ Β, ᾗ ὑπερέχουσιν οἱ Β Γ τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Ε Ζ ὑπεροχή, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ἡ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχήν, ὃ τῇ δεκάτῃ συμβέβηκεν μεσότητι. καὶ ποιοῦσιν αὐτὴν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ γ' β' α', μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν Α Β Γ.

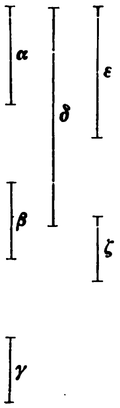
57 *Ἔκκεινται δὲ τοῦ προχείρου χάριν καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἑξῆς, καθ' οὓς ἕκαστος ὅρος τῆς ἀναλογίας πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ μεσότητα ἑκάστην, καὶ παράκεινται οἱ ἐλάχιστοι περιέχοντες αὐτάς. οἷον ἐπὶ τοῦ τῆς ἕκτης μεσότητος πλινθίου ὁ μὲν πρῶτος στίχος ὁ α' γ' β' σημαίνει τοῦθ' ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος τρὶς καὶ ὁ τρίτος δὶς συντεθέντες τὸν πρῶτον τῆς μεσότητος ὅρον ἀποπληροῦσιν. ὁ δὲ δεύτερος τοῦ πλινθίου στίχος ὁ α' β' α' σημαίνει ὅτι ὁ πρῶτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος δὶς καὶ ὁ τρίτος ἅπαξ τὸν δεύτερον ὅρον ἀποπληροῦσι τῆς μεσότητος. ὁ δὲ τρίτος τοῦ πλινθίου στίχος ἐπὶ μὲν*

---

3. *ενάτης* (sine spir.) A, *ἐνάτης* B, *ἐννάτης* S 5. *ἡ αὐτὴ καταγραφή* del. *Hu* 6. *κγ'* add. S *οὕτω* ABS (conf. ad p. 90, 9) 8. *τοῖς δὲ ΒΓ* A, distinx. BS (paulo ante *τῶν Α Β Γ* et *μὲν Α Β Γ* recte etiam A) 9. *οἱ ΔΕΖ* A, distinx. BS 10. *ὁ ΒΓ* AS, distinx. B, ac similiter posthac 13. *οἱ ΑΒΓ — τῶν ΔΖ* A, distinx. BS, ac similiter posthac 21. *μεσότητας* | A(S), corr. B 22. *οἷον Hu*, *ut Co* pro *ὁ τὸν* 23. *ὁ α γ β* B[3], *ὁ ΑΒΓ* AB[1]S 24. *τρὶς* S, *τρεῖς* AB

$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{\delta - \zeta}{\delta - \varepsilon}$, id quod nonae medietatis proprium est (*supra cap. 46*). Et hanc complectuntur minimi numeri 4 3 2, si perinde unitates supponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$.

XXIII. Decima medietas ex analogia sic constituitur. Prop. 27



Sint rursus tres *termini* proportionales $\alpha\ \beta\ \gamma$, et

$$\delta = \alpha + \beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\varepsilon = \beta + \gamma, \text{ et}$$
$$\zeta = \gamma;$$

dico terminos $\delta\ \varepsilon\ \zeta$ iuxta decimam medietatem esse.

Quoniam enim *componendo* est

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\zeta}, \text{ et}$$
$$\alpha + \beta = \delta - \zeta, \text{ et}$$
$$\beta = \varepsilon - \zeta, \text{ est igitur}$$

$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\delta - \zeta}{\varepsilon - \zeta}$, id quod in decima contingit medietate (*supra cap. 46*). Et hanc efficiunt minimi numeri 3 2 1, si unitates supponantur $\alpha\ \beta\ \gamma$.

Sed quo commodior sit *conspectus*, *a nobis* et numeri expositi sunt, cum quibus singuli termini proportionales multiplicati unamquamque medietatem, *sicut modo demonstravimus*, efficiunt, et appositi sunt minimi numeri qui medietates continent. Velut in tabula sextae medietatis primus versiculus $\alpha'\ \gamma'\ \beta'$ significat primo termino proportionali semel, et secundo ter, et tertio bis *sumptis et* horum summa facta prodire primum medietatis terminum. Secundus autem tabulae versiculus $\alpha'\ \beta'\ \alpha'$ significat primo termino proportionali semel, et secundo bis, et tertio semel *sumptis et* horum summa facta prodire secundum terminum medietatis. Tertii autem tabulae versiculi in reliquis medietatibus simpliciter, ut per-

---

25. συν|θέντες A(BS), corr. *Hu* auctore *Co* 26. ὁ $\overline{ABA}$ AB^sS, distinx. *Co* 27. ὅρος ἅπαξ B3, πρὸς ἅπαξ AS, προσάπαξ B1 29. μεσό-τητος *Hu* auctore *Co* pro ἀναλογίας

τῶν ἄλλων μεσοτήτων ἁπλῶς, ὡς γέγραπται, συντίθεται, ἰδίως δ' ἐπὶ ταύτης ὁ α' α' α', καθὸ προείρηται, σημαίνει γίνεσθαι τὸν τρίτον τῆς μεσότητος ὅρον ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἢ

*Μεσότητες**)	*Α*	*Β*	*Γ*	*Οἱ περιέχοντες τὰς μεσότητας τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοί*		
ἀριθμητική	β' α'	γ' β' α'	α' ***) α' α'	ς'	δ'	β'
γεωμετρική	α'	β' α'	α' α' α'	δ'	β'	α'
ἁρμονική	β'	γ' β' α'	α' α' α'	ς'	γ'	β'
ὑπεναντία	β' β'	γ' β' α'	α' α' α'	ς'	ε'	β'
ε'	α' α'	γ' β' α'	α' α' α'	ε'	δ'	β'
ς'	α' α' α'	γ' β' α'	β' α' α'	ς'	δ'	α'
ζ'	α'	α' α'	α' α' α' †)	γ'	β'	α'
η'	β' α'	γ' β' β'	α' α' α'	ς'	δ' ††)	γ'
ϑ'	α' α'	β' α' α'	α' α' α'	δ'	γ'	β'
ι' **)	α'	α' α'	α' α' α'	γ'	β'	α'

1. *συντίθεται Hu* pro *συντιθέμενος* 2. ὁ $\overline{A}$ $\overline{A}$ $\overline{A}$ AB, ὁ $\overline{\alpha\alpha\alpha}$ S

*) ad hanc tabulam varietas scripturae tantummodo ex S enotata est; sed cum Commandinus in sua descriptione eosdem errores ac S exhibeat, celeros codices fere consentire efficitur **) sequitur in S

scriptum est, componuntur; proprie autem in hac *sexta medietate* 'versiculus α' α' α', sicut supra (*propos.* 23) dictum est, significat tertium medietatis terminum effici ex differen-

Medietates	*Terminorum comparatio*	Terni minimi numeri qui medietates continent		
arithmetica	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma$ $\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\zeta = \beta + \gamma$	6	4	2
geometrica	$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\varepsilon = \beta + \gamma$ $\zeta = \gamma$	4	2	1
harmonica	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma$ $\varepsilon = 2\beta + \gamma$ $\zeta = \beta + \gamma$	6	3	2
contraria *harmonicae*	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma$ $\varepsilon = 2\alpha + 2\beta + \gamma$ $\zeta = \beta + \gamma$	6	5	2
quinta	$\delta = \alpha + 3\beta + \gamma$ $\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\zeta = \beta + \gamma$	5	4	2
sexta	$\delta = \alpha + 3\beta + 2\gamma$ $\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\zeta = \alpha + \beta - \gamma$	6	4	1
septima	$\delta = \alpha + \beta + \gamma$ $\varepsilon = \beta + \gamma$ $\zeta = \gamma$	3	2	1
octava	$\delta = 2\alpha + 3\beta + \gamma$ $\varepsilon = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\zeta = 2\beta + \gamma$	6	4	3
nona	$\delta = \alpha + 2\beta + \gamma$ $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma$ $\zeta = \beta + \gamma$	4	3	2
decima	$\delta = \alpha + \beta + \gamma$ $\varepsilon = \beta + \gamma$ $\zeta = \gamma$	3	2	1

undecimus ordo $\iota\alpha'$ cum una nota α: vide *Co* ***) numeri huius columnae variis rationibus in S turbati sunt, cuius corruptelae speciem exhibet Commandinus †) pro sex α' S *Co* nihil habent nisi ζ ἀττικός ††) pro δ' in S legitur α

ὁ πρῶτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος ἅπαξ συντεθέντες ὑπερέχουσιν ἅπαξ ληφθέντος τοῦ τρίτου. οἱ δ' ἐκ τῆς τρίτης *τοῦ πλινθίου ἀριθμοὶ οἱ ϛ' δ' α' τὴν μεσότητα περιέχουσιν αὐτήν. [ὡς γὰρ ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν πρῶτον, τουτέστιν ὡς αἱ τέσσαρες μονάδες πρὸς τὰς ἕξ, οὕτως ἡ ὑπεροχὴ τοῦ πρώτου παρὰ τὸν δεύτερον, τουτέστιν ἡ τῶν ἓξ μονάδων παρὰ τὰς τέσσαρας ὑπεροχή, αἵπερ εἰσὶ μονάδες δύο, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου ὅρου παρὰ τὸν τρίτον, τουτέστι τῶν τεσσάρων μονάδων παρὰ τὴν μίαν, αἵπερ εἰσὶ μονάδες τρεῖς. ἑκάτερος γὰρ λόγος (ἑκατέρου) ὑφημιόλιος· αἵ τε γὰρ τέσσαρες μονάδες τῶν ἓξ καὶ δύο τῶν τριῶν τὸν αὐτὸν ὑφημιόλιον περιέχουσι λόγον.] τὰ δ' ὅμοια καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πλινθίων νοείσθω.*

58 *κδ'. Τὸ δὲ τρίτον τῶν προβλημάτων ἦν τόδε.*

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Β γωνίαν, καὶ διήχθω τις ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΕΑ κατὰ τὸ Ζ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΖΓ δεῖξαι συναμφοτέρας *τὰς ΔΖΓ δύο πλευρὰς ἐντὸς τοῦ τριγώνου μείζονας τῶν ἐκτὸς συναμφοτέρων τῶν ΒΑΓ πλευρῶν.*

Καὶ ἔστι δῆλον. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΓΖΑ, τουτέστιν αἱ ΓΖΕ, τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ, αἱ ΓΖΔ ἄρα δύο τῶν ΓΑΒ μείζονές εἰσιν.

59 *Ἦν δὲ τὸ προκείμενον ὑγιέστερον προτεῖναι καὶ οὕτως. ὀρθογωνίου τυχόντος ὑποκειμένου τοῦ ΑΒΓ λαβεῖν τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθείας ἀγαγεῖν, μίαν μὲν τέμνουσαν τὴν ΒΓ, τὴν δὲ λοιπὴν ἐπὶ τὸ Γ ἐρχομένην, ὥστε συναμφοτέρας μείζονας εἶναι τῶν ἐκτός,*

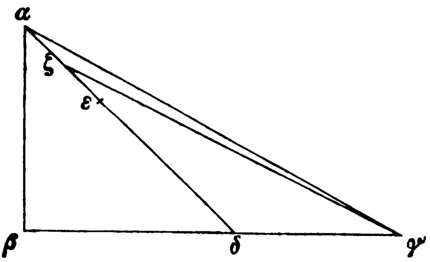
---

2. *καὶ* ante *ληφθέντος* add. S 3. *ἐκ τῆς τρίτης* (scil. *μερίδος*) *Hu*, *εκτης* (sic) A(B[1]), *ἐκτὸς* B[3], *ἐκ* S *οἱ* $\overline{Η}$ $\overline{Δ}$ $\overline{Α}$ AB[1]S, corr. B[3] 4. *ὡς γὰρ* — 12. *λόγον* interpolatori tribuit *Hu* 5. *τέσσαρες* S, $\overline{Δ}$ AB 7. *ἕξ* BS, $\overline{ϛ}$ A *ὑπεροχὴν* A, *ν* erasum in B, et abest a S 10. post *ἑκάτερος* add. *τὴν μιαν* A[1], expunx. A[2] *ἑκατέρου* alius quidam interpolatis iam verbis imperite inseruit 14. *κδ'* add. S 15. 16. *τὴν* $\overline{Β}$ *γ//////// δι|ήχθω τίς* A 17. *δίχα τμηθείσης* B[4] *Sca*, *διχὰ τμ/////// A*, tot fere litterarum lacuna in B[1]S 18. *δεῖξαι συναμ-*

tia, qua summa termini proportionalis primi semel, secundique semel sumpti superat tertium terminum. In tertia autem tabulae parte numeri 6 4 1 ipsam medietatem continent. [Namque ut secundus terminus ad primum, ita est prima differentia ad secundam, id est $4 : 6 = 6 - 4 : 4 - 1 = 2 : 3$. Utraque enim proportio (*scilicet* $4 : 6$ *et* $2 : 3$) subsesquialtera est, quippe cum et 4 unitates ad 6, et 2 ad 3 eandem subsesquialteram proportionem contineant.] Similia etiam de reliquis tabulis mente percipiantur.

Tertium problema [1]) hoc erat.

XXIV. Sit triangulum orthogonium $\alpha\beta\gamma$, angulum β rectum habens, et ducatur quaedam $\alpha\delta$, ponaturque $\delta\varepsilon = \alpha\beta$, Prop. 28



et, cum $\varepsilon\alpha$ in puncto ζ bifariam secta sit et iuncta $\zeta\gamma$, demonstretur summam laterum $\delta\zeta$ $\zeta\gamma$, quae sunt intra triangulum, maiorem esse summâ laterum $\beta\alpha$ $\alpha\gamma$.

Hoc quidem manifestum est. Quoniam enim est $\gamma\zeta + \zeta\alpha > \gamma\alpha$, id est $\gamma\zeta + \zeta\varepsilon > \gamma\alpha$, et $\delta\varepsilon = \alpha\beta$, est igitur $\gamma\zeta + \zeta\varepsilon + \varepsilon\delta$, *id est* $\gamma\zeta + \zeta\delta > \gamma\alpha + \alpha\beta$.

Rectius autem idem sic proponi poterat. *Triangulo* orthogonio quovis $\alpha\beta\gamma$ supposito sumatur punctum quoddam intra triangulum, et ab eo duae rectae ducantur, quarum una *basim* $\beta\gamma$ secet, altera ad punctum γ tendat, earumque summa maior sit summâ exteriorum *laterum*, scilicet ut *is cui pro-*

1) Conf. supra p. 31 adnot. 1.

φοτέρας Hu, δ/////////////// A, δ.............. BS *δύο πλευρὰς*] *πλευρὰς τὰς* coni. *Hu* 21. *αἱ* $\overline{\Gamma Z \Delta}$ AB, lineolam sub α om. S *αἱ* ante *ΓZE* add. *Hu* 22. *αἱ* $\overline{\gamma\zeta\alpha}$ *ἄρα* S, in quo $\overline{\gamma\zeta\delta}$ (sic recte AB *Co*) restituit *Sca* 28. *συναμφοτεραι* (sine acc.) A, corr. BS ἵνα δηλονότι [ὁ προταθεὶς] διάξας τυχοῦσαν τὴν ΑΔ καὶ θεὶς τῇ ΑΒ ἴσην τὴν ΔΕ καὶ τεμὼν δίχα τὴν ΕΑ κατὰ τὸ Ζ ἀποδείξῃ τὸ Ζ σημεῖον ποιοῦν τὸ πρόβλημα. ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΓΖ δύο αἱ ΓΖΔ δύο τῶν ἐκτὸς ΓΑΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' ὅτι τοῦτο μέν, ὅπως ἄν τις ἐθέλοι προτείνειν, ἀπειραχῶς δείκνυται δῆλον, οὐκ ἄκαιρον δὲ καθολικώτερον περὶ τῶν τοιούτων προβλημάτων διαλαβεῖν ἀπὸ τῶν φερομένων παραδόξων Ἐρυκίνου προτείνοντας οὕτως.

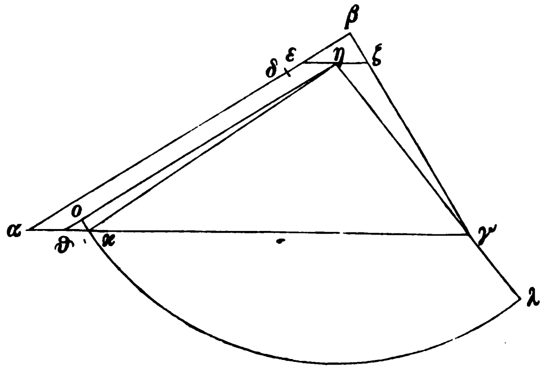
60 κε'. Ἐν παντὶ τριγώνῳ, πλὴν τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσοσκελοῦς τοῦ τὴν βάσιν ἐλάσσονα τῆς πλευρᾶς ἔχοντος, δυνατόν ἐστι συσταθῆναί τινας ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς δύο εὐθείας ἴσας ταῖς ἐκτὸς ὁμοῦ λαμβανομέναις.

Ἔστω πρότερον ἀνισοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ, καὶ τετμήσθω συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν Δ Β τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Η, καὶ τῇ ΕΑ παράλληλος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΓ ἐκβεβλήσθω. ἐπεὶ μείζονες αἱ μὲν ΕΒΖ τῆς ΕΖ αἱ δὲ ΓΖΗ τῆς ΓΗ, συναμφότερος ἄρα ἡ ΕΒΓ μετὰ τῆς ΗΖ μείζονές εἰσι συναμφοτέρων τῶν ΕΖ ΗΓ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ συναμφότερος ἡ ΕΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΗΓ, καὶ μᾶλλον τῆς ΗΓ. ἔστω συναμφοτέρῳ τῇ ΕΒΓ ἴση ἡ ΗΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ τοῦ Λ γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ ΛΚΟ· τέμνει δὴ ἑκατέραν τῶν ΓΘ ΘΗ, ἐπεὶ ἡ ΛΕ, τουτέστιν ἡ ΘΗ,

1. ὁ προταθείς (*is cui problema propositum est?*) iure suspectum videatur et ab interpolatore additum, qui verbi ἀποδείξῃ subiectum cogitatione suppleri non intellegeret   τυχοῦσαν τῆι ΑΔ AB[1]S, corr. B[4]   2. θεὶς] ὁ εισ A, ὁ εἷς B[1]S, θεῖς B[3]   2. 3. κατὰ Ζ A, τὸ add. BS   5. ἀλλ' ὅτι *Hu* pro ἀλλὰ   8. ερυκειν ουπροτείνοντας A, ἐρυκείνου προτείνοντας B[1]S, ἐρυκείνου προτείνοντος B[3], corr. *Hu*   10. κε A[1] in marg. (S), om. B   16. τῶν ΔΒ AS, distinx. B   18. τῆι Ε Λ A, coniunx. BS   19. ἐπιζευχθεῖσα* ἡ Η Γ A[2] ex ἐπιζευχθεῖσα** Η Γ   μὲν add. *Hu*   21. τῶν ΕΖΗΓ A, distinx. BS   24. κέντρον τὸ Ν AV[1], corr. BSV[2]   26. ἑκατέραν τῶν γθ θη B[4] (*Co*), ἑκα|τερ////////// A, ἑκατέ........ η B[1], ἑκατέρων τῶν .... S, ἑκατέραν τῶν ΑΓ ΗΘ *Sca*

positum est quamcunque rectam $\alpha\delta$ ducat, factâque $\delta\varepsilon = \alpha\beta$ et $\varepsilon\alpha$ bifariam sectâ in puncto ζ demonstret punctum ζ efficere problema. Nam iunctâ $\gamma\zeta$ erunt $\gamma\zeta + \zeta\delta > \gamma\alpha + \alpha\beta$. Sed hoc quidem, quomodocunque proponere quis vult, infinite ostendi posse manifestum est; neque tamen alienum videtur de eiusmodi problematis latius disserere et secundum Erycini quae feruntur paradoxa *primum* sic proponere.

XXV. In omni triangulo, praeterquam aut in aequilatero, aut in aequicruri basim minorem *alterutro* latere habente, fieri potest ut in basi intra duae rectae constituantur, quarum summa aequalis sit summae exteriorum. Prop. 29



Sit primum triangulum non aequicrure $\alpha\beta\gamma$, cuius latus $\alpha\beta$ maius sit quam $\beta\gamma$, et $\alpha\beta + \beta\gamma$ bifariam secetur in puncto δ, et inter δ β sumatur quodvis punctum ε, et rectae $\alpha\gamma$ parallela ducatur $\varepsilon\zeta$, in eaque *sumatur* quodvis punctum η, et rectae $\varepsilon\alpha$ parallela ducatur $\eta\vartheta$, et iuncta $\eta\gamma$ producatur. Quoniam sunt

$\varepsilon\beta + \beta\zeta > \varepsilon\zeta$, et $\gamma\zeta + \zeta\eta > \gamma\eta$, erunt igitur

$\varepsilon\beta + \beta\zeta + \zeta\gamma + \zeta\eta$, *id est* $\varepsilon\beta + \beta\gamma + \zeta\eta > \varepsilon\zeta + \gamma\eta$.

Communis auferatur $\zeta\eta$; erit igitur

$\varepsilon\beta + \beta\gamma > \varepsilon\eta + \gamma\eta$, eoque magis

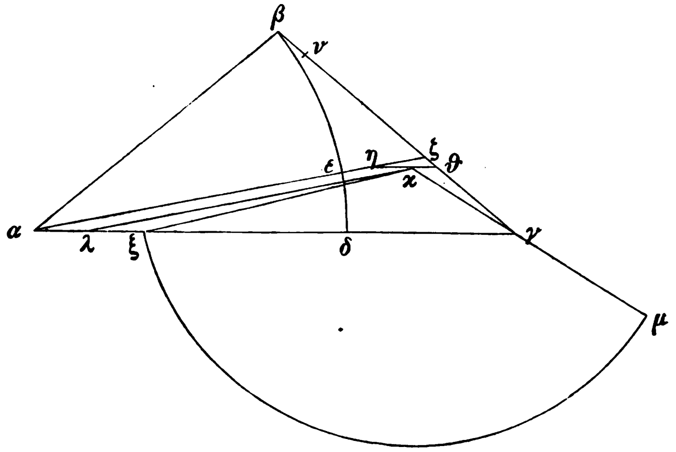
$> \gamma\eta$.

Sit $\eta\lambda = \varepsilon\beta + \beta\gamma$, et circa centrum η per λ describatur circuli circumferentia $\lambda\kappa o$; haec igitur et rectam $\gamma\vartheta$ et $\vartheta\eta$ se-

μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ, τουτέστιν τῆς ΗΔ. ἐπεζεύχθω ἡ ΚΗ· λέγω δὴ ὅτι συναμφότερος ἡ ΘΗΚ ἴση ἐστὶν συναμφοτέρῳ τῇ ΔΒΓ.

Ἔστιν δὲ φανερόν· ἡ μὲν γὰρ ΗΘ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΗΔ, τουτέστιν συναμφοτέρῳ τῇ ΕΒΓ ἴση, καὶ γίνεται ἀπειραχῶς.

61 *κϛʹ. Ἔστω δὴ νῦν ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὴν μὲν ΑΒ ἴσην ἔχον τῇ ΒΓ, τὴν δὲ ΑΓ μείζονα ἑκατέρας αὐτῶν,*



καὶ περὶ κέντρον τὸ Α διὰ τοῦ Β γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΕΔ, καὶ διήχθω τις ἡ ΑΕΖ τέμνουσα τὴν ΒΓ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπʼ αὐτῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ τῇ ΑΖ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ τῇ ΕΗ ἴση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΝ· ἔσται οὖν ἡ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΚΛ, ἴση συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΝ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΓ ἐλάσσων τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν ΘΖΗ τῆς ΘΗ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΓΘΚ τῆς ΓΚ, συναμφότεροι ἄρα αἱ ΓΖΗ μετὰ τῆς ΘΚ μείζονές εἰσιν συναμφοτέρων τῶν ΓΚ ΗΘ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΘΚ· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος ἡ ΓΖΗ μείζων συναμφοτέρων τῶν ΓΚΗ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΗ· συναμφότεροι cat, quoniam recta $\alpha\varepsilon$, id est $\vartheta\eta$, *ex constructione* maior est *quam* $\alpha\delta$ *eoque magis maior* quam $\varepsilon\beta + \beta\gamma$, id est $\eta\lambda$. Iungatur $\varkappa\eta$; dico esse $\vartheta\eta + \eta\varkappa = \alpha\beta + \beta\gamma$.

Est vero manifestum; namque est $\vartheta\eta = \alpha\varepsilon$, et $\varkappa\eta = \eta\lambda$, id est $= \varepsilon\beta + \beta\gamma$, et hoc infinite fieri potest.

XXVI. Sit deinde aequicrure triangulum $\alpha\beta\gamma$, aequalibus *lateribus* $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, quorum utroque maior sit *basis* $\alpha\gamma$, et circa centrum α per β describatur circuli circumferentia $\beta\varepsilon\delta$, et ducatur recta quaedam $\alpha\varepsilon\zeta$, quae rectam $\beta\gamma$ extra circumferentiam secet¹), et sumatur in $\varepsilon\zeta$ quodvis punctum η, et rectae $\alpha\gamma$ parallela *ducatur* $\eta\vartheta$, in eaque *sumatur* quodvis punctum $\varkappa$, et rectae $\alpha\zeta$ parallela *ducatur* $\lambda\varkappa$, et iuncta $\varkappa\gamma$ producatur ad μ*), et rectae $\varepsilon\eta$ aequalis abscindatur $\beta\nu$; erit igitur $\alpha\eta$, id est $\lambda\varkappa$, aequalis summae rectarum $\alpha\beta$ $\beta\nu$, et reliqua $\nu\gamma$ minor quam $\lambda\varkappa$. Et quoniam sunt $\vartheta\zeta + \zeta\eta > \vartheta\eta$, et $\gamma\vartheta + \vartheta\varkappa > \gamma\varkappa$, erunt igitur

$\gamma\vartheta + \vartheta\zeta + \zeta\eta + \vartheta\varkappa$, *id est* $\gamma\zeta + \zeta\eta + \vartheta\varkappa > \gamma\varkappa + \vartheta\eta$.

Communis auferatur $\vartheta\varkappa$; restat igitur

$\gamma\zeta + \zeta\eta > \gamma\varkappa + \varkappa\eta$. Communis addatur $\alpha\eta$; ergo

1) Scilicet, si angulus $\alpha\beta\gamma$ acutus sit, recta $\beta\gamma$ partim erit intra circumferentiam, partim extra.

*) Rectae $\varkappa\mu$ magnitudo, ideoque puncti μ positio postea demum definitur; fit enim $\varkappa\mu = \nu\gamma$.

---

1. *συναμφοτέρου τῆς* $\overline{\varepsilon\beta\gamma}$ B⁴, *συναμ**έρ*// /// /// A, *συναμφοτέρ*** *** ... B¹, *συναμφοτέρας* ... ... S, in quo *τῆς* $\overline{\varepsilon\beta\gamma}$ add. *Sca* 2. *ἐπιζευχθω* (sine acc.) A, corr. BS 7. $\overline{\varkappa\varsigma}$ A¹ in marg. (BS) 11. *ἐκτὸς τῆς περὶ* in A erasa sunt a manu recentiore, quae figurae appositae lineas huc usque traxit et tum *ἐκτὸς τῆς περὶ* initio proximi versus adscripsit 13. 14. *καὶ επι του ζευχθεῖσα* A, corr. BS 15. *ἡ* $\overline{BH}$ (ante *ἔσται*) A, corr. BS *ἔσται οὖν ἡ* $\overline{AB}$ ASV¹ cod. *Co*, corr. BV² *Co Sca* 17. *αἱ μὲν* $\overline{\Theta H}$ $\overline{HZ}$ AB¹SV¹ cod. *Co*, corr. B³V² *Co* 18. *αἱ* $\overline{\gamma\zeta\eta}$ B³ *Co*, *αἱ* $\overline{HZ}$ $\overline{ZH}$ A, *αἱ* *γ** B¹, *αἱ* $\overline{\eta\varkappa}$ $\overline{\zeta\eta}$ S, *αἱ* $\overline{\eta\gamma}$ $\overline{\zeta\eta}$ cod. *Co*, *αἱ HZ ZΓ Sca*

ἄρα αἱ ΑΖΓ συναμφοτέρων τῶν ΑΗ ΗΚ ΚΓ μείζονές εἰσιν. τῶν δὲ ΑΖΓ μείζονές εἰσιν αἱ ΑΒΓ· καὶ αἱ ΑΒ ΒΓ ἄρα τῶν ΑΗ ΗΚ ΚΓ μείζονες. ὧν συναμφότερος ἡ ΑΒΝ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΝΓ μείζων τῶν ΗΚΓ συναμφοτέρων καὶ μᾶλλον τῆς ΚΓ. κείσθω οὖν τῇ ΝΓ ἴση ἡ ΚΜ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Κ διὰ τοῦ Μ γραφεῖσα κύκλου περιφέρεια τεμνέτω τὴν ΓΔ κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΞ· λέγω δὴ ὅτι συναμφότερος ἡ ΔΚΞ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΓ.

Ἔστι δὲ φανερόν. ἡ μὲν γὰρ ΚΔ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΝ, ἡ δὲ ΚΞ τῇ ΚΜ, τουτέστιν τῇ ΝΓ, καὶ γίνεται ἀπειραχῶς.

62 κζʹ. Λέγω δʼ ὅτι, ἐὰν ᾖ ἰσόπλευρον τὸ τρίγωνον ἢ ἰσοσκελὲς τὴν βάσιν ἐλάσσονα τῆς πλευρᾶς ἔχον, ἀδύνατον ἔσται συσταθῆναι τὰς ἐντὸς ἴσας ταῖς ἐκτός, ἀλλʼ αἱ ἐντὸς ἐλάσσονες ἔσονται.

Ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσόπλευρον ἢ ἰσοσκελὲς ἔχον τὴν ΑΓ βάσιν ἐλάσσονα ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ συνεστάτωσάν τινες ἐντὸς αἱ ΔΕ ΕΗ· λέγω ὅτι ἐλάσσονές εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ.

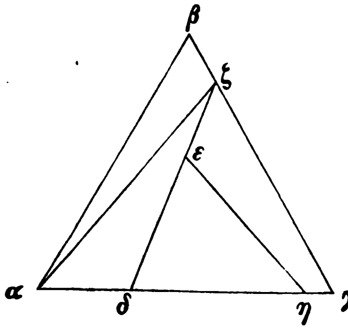
Ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, μείζων ἡ ὑπὸ ΒΓΑ τῆς ὑπὸ ΖΑΓ. τῆς δʼ ὑπὸ ΒΓΑ μείζων ἡ ὑπὸ ΖΔΑ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ ΖΔΑ τῆς ὑπὸ ΖΑΔ, ὥστε καὶ ἡ ΑΖ μείζων τῆς ΖΔ. ἐπεὶ μείζων μὲν ἡ ὑπὸ

1. μετὰ τῆς ante ΚΓ add. *Hu* 2. καὶ αἱ] καὶ ABS, αἱ *Sca* 3. 4. ἡ ΑΒΝ A^{s}B^{3}S *Co*, ἡ αβμ B^1 cod. *Co* 8. ἡ ΔΚ ἴση AB^{1}S cod. *Co*, corr. B^3 *Co Sca* 9. τῆι|η ΑΒΓ A, η erasum in B 11. τῆι ΜΓ καὶ AB^{1}SV^1, corr. B^{3}V^2 *Sca* 13. ΚΖ A^1 in marg. (S), om. B 15. post συσταθῆναι add. ἐπὶ τῆς βάσεως V^2 (vid. propos. 29) ταῖς A^1 ex τὰς ἀλλʼ αἱ B^s *Sca*, αλλαι (sine spir. et acc.) A, ἄλλαι S 18. τῆι ΑΓ ASV^1, corr. B^{s}V^2 *Sca* ἐλάσσονα om. AB^{1}V^1, add. B^{4}SV^2 21. ἐπιζεύχθω AB, corr. S ἡ αζ B^{3}S, ἡ ΔΖ AB^1 22. post μείζων add. ἄρα B^4, sed idem p. 112, 2 post ἔσται a scriptore huius propositionis omissum est 23. ἡ ὑπὸ βγα V^2 *Co* pro ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆι δʼ ὑπὸ AB, corr. S 23. 24. ἡ ὑπὸ ΖΔ AS, ἡ ὑπὸ ΒΖΔ *Sca*, corr. B 25. καὶ ante ἐπεὶ add. B^4

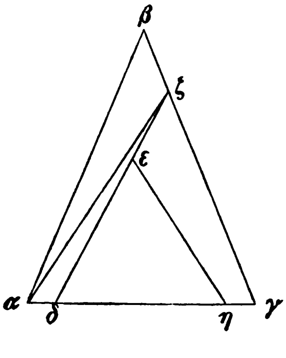
$\gamma\zeta + \alpha\zeta > \alpha\eta + \eta\varkappa + \varkappa\gamma$. Sed sunt $\alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\zeta + \zeta\gamma$ (*elem. 1, 21*); ergo etiam $\alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\eta + \eta\varkappa + \varkappa\gamma$. Ex quibus *per constructionem* est $\alpha\beta + \beta\nu = \alpha\eta$; ergo subtrahendo $\nu\gamma > \eta\varkappa + \varkappa\gamma$, eoque magis $\nu\gamma > \varkappa\gamma$. Iam ponatur $\varkappa\mu = \nu\gamma$, et circa centrum $\varkappa$ per μ descripta circuli circumferentia secet rectam $\gamma\lambda$ in puncto ξ, et iungatur $\varkappa\xi$; iam dico esse $\lambda\varkappa + \varkappa\xi = \alpha\beta + \beta\gamma$.

Est autem manifestum; namque *ex constructione* est et $\lambda\varkappa = \alpha\beta + \beta\nu$, et $\varkappa\xi = \varkappa\mu = \nu\gamma$; atque hoc infinite fieri potest.

XXVII. Quodsi triangulum aut aequilaterum sit, aut aequicrure basim latere minorem habens, dico neque fieri posse ut *in basi* intra duae rectae constituantur, quarum summa aequalis sit summae exteriorum, et interiores minores esse. Prop. 30



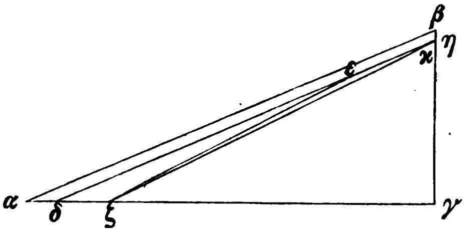
Sit enim triangulum $\alpha\beta\gamma$ aut aequilaterum, aut aequicrure basim $\alpha\gamma$ minorem quam $\alpha\beta$ vel $\beta\gamma$ habens, et intra constituantur quaedam rectae $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\eta$; dico harum summam minorem esse quam $\alpha\beta + \beta\gamma$.



Producatur $\delta\varepsilon$ ad ζ, et iungatur $\alpha\zeta$. Quoniam *ex hypothesi* est $\angle\,\beta\alpha\gamma = \angle\,\beta\gamma\alpha$, est *igitur* $\angle\,\beta\gamma\alpha > \angle\,\zeta\alpha\gamma$. Sed est $\angle\,\zeta\delta\alpha > \angle\,\beta\gamma\alpha$; multo igitur est $\angle\,\zeta\delta\alpha > \angle\,\zeta\alpha\gamma$ *sive* $\zeta\alpha\delta$; itaque etiam $\alpha\zeta > \zeta\delta$. Quoniam angulus $\alpha\zeta\beta$ maior est angulo $\beta\gamma\alpha$, et ex

ΔΖΒ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δ᾽ ὑπὸ ΒΓΔ διὰ τὴν ὑπόθεσιν οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΔΒΓ, ἔσται μείζων ἡ ὑπὸ ΔΖΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΖ, ὥστε καὶ ἡ ΔΒ μείζων τῆς ΔΖ. ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΖΔ ἐδείχθη μείζων· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΔΖ καὶ πολλῷ μᾶλλον τῆς ΔΕ μείζων. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ΒΓ μείζων τῆς ΕΗ· ἐλάσσονες ἄρα εἰσὶν αἱ ΗΕΔ τῶν ΔΒΓ.

63 *κη΄. Ἐφ᾽ ὧν μέντοι τριγώνων αἱ ἐντὸς ἴσαι συνίστανται ταῖς ἐκτός, ἐπ᾽ ἐκείνων καὶ μείζους τῶν ἐκτὸς ἐντός τινες εἶναι δύνανται συναμφότεραι λαμβανόμεναι.*



Ἔστωσαν γὰρ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ αἱ ΔΕΖ ἴσαι ταῖς ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω μία τῶν ἐντὸς ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Η, καὶ μεταξὺ τῶν Ε Η εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ· ἔσονται δὴ αἱ ΔΚΖ μείζονες τῶν ΔΕΖ, ὥστε καὶ τῶν ΑΒΓ. δῆλον δ᾽ ὅτι, κἂν ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Κ σημεῖον οὕτως ληφθῇ ὥστε τὰς ΔΕΖ περιέχεσθαι ὑπὸ τῶν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Δ Ζ ἐπιζευγνυμένων, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ οὕτως ἔσται τὸ αὐτό, καὶ ἑκατέρως ἀπειραχῶς ἔσται τὸ προκείμενον.

64 *κθ΄. Καὶ τούτου παραδόξου δοκοῦντος εἶναι τοῖς ἀγεωμετρήτοις ἔτι παραδοξότερον φανεῖται τὸ μὴ μόνον συναμφότερον συναμφοτέρῳ, ἀλλὰ καὶ ἑκατέραν τῶν συνισταμένων ἐντὸς ἑκατέρᾳ τῶν ἐκτὸς καὶ ἴσην εἶναι δύνασθαι καὶ μείζονα κατὰ μίαν. δείκνυται δ᾽ οὕτως.*

---

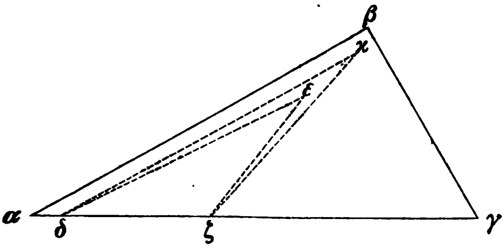
6. *τῆς ΕΗ*] in A littera *H* vix differt ab *N* *αἱ* $\overline{H\Delta}$ *τῶν* $\overline{AB}$ AB[1] (et, ut videtur, cod. *Co*), *αἱ* $\bar{\eta}$ $\bar{\delta}$ *τῶν* $\overline{\alpha\beta\gamma}$ S, *αἱ ΔΕΗ τῶν ΑΒΓ* *Co Sca*, corr. B[4] 7. $\overline{KH}$ A[1] in marg. (S), om. B 16. 17. *μεταξὺ τῶν* $\overline{EN}$ AB[1]S, pro *N* corr. *η* B[3] *Sca* 21. *οὔτω* ABS (conf. ad p. 90, 9) 22. *ἐπὶ τὰ* $\overline{\Delta Z}$ AB[1], distinx. B[3]S 25. $\overline{K\Theta}$ A[1] in marg. (S), om. B 26. *μόνον συναμφοτέρου* AS cod. *Co*, corr. B *Co* 29. *δ᾽ οὗτος* A, corr. BS

hypothesi angulus $\beta\gamma\alpha$ non minor quam angulus $\alpha\beta\gamma$, erit *igitur* angulus $\alpha\zeta\beta$ maior angulo $\alpha\beta\gamma$ *sive* $\alpha\beta\zeta$; itaque etiam $\alpha\beta > \alpha\zeta$. Sed demonstrata est $\alpha\zeta > \zeta\delta$; ergo etiam $\alpha\beta > \zeta\delta$, eoque magis $\alpha\beta > \delta\varepsilon$. Similiter demonstrabitur esse etiam $\beta\gamma > \varepsilon\eta$; ergo sunt $\delta\varepsilon + \varepsilon\eta < \alpha\beta + \beta\gamma$.

XXVIII. In quibus autem triangulis duae intra rectae Prop. 31
unâ sumptae aequales constituuntur summae exteriorum, in his etiam duae intra esse possunt unâ sumptae maiores summâ exteriorum.

Sint enim in $\alpha\beta\gamma$ triangulo $\delta\varepsilon + \varepsilon\zeta = \alpha\beta + \beta\gamma$, et producatur altera rectarum quae intus sunt $\delta\varepsilon$ ad η *punctum concursûs cum* $\beta\gamma$, et inter $\varepsilon\ \eta$ sumatur quodvis punctum $\varkappa$, et iungatur $\varkappa\zeta$; erunt igitur $\delta\varkappa + \varkappa\zeta > \delta\varepsilon + \varepsilon\zeta$, ideoque etiam $> \alpha\beta + \beta\gamma$.

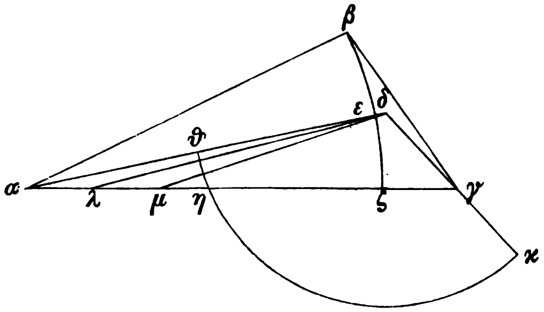
Apparet autem, etiamsi intra triangulum $\alpha\beta\gamma$ punctum $\varkappa$ ita sumatur, ut $\delta\varepsilon\ \varepsilon\zeta$ comprehendantur a rectis quae a $\varkappa$ ad $\delta\ \zeta$ ducuntur, ut descriptum est in altera figura[1]), idem contingere; et in utroque casu propositum infinite fieri poterit.



XXIX. Et cum hoc mirum esse videatur, multo etiam Prop. 32
magis mirabuntur ii qui geometriam non callent, non solum summam rectarum quae intra constituuntur summae exteriorum aequalem esse posse vel summam summâ maiorem, sed etiam utramque interiorum utrique exteriorum aequalem esse posse vel utramque utrâque maiorem. Demonstratur autem hoc modo.

1) Rectas $\delta\varepsilon\ \varepsilon\zeta\ \delta\varkappa\ \varkappa\zeta$ punctis delineavimus, quo significaremus accuratam linearum rationem perspicuitatis causa teneri non potuisse; multo autem longius a vero abest figura in codice tradita.

Ὑποκείσθω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ ἐλάσσονα ἔχον, τὴν δὲ ΑΓ ἑκατέρας αὐτῶν μείζονα, καὶ περὶ κέντρον τὸ Α διὰ τοῦ Β κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΖ, καὶ εἰλήφθω μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ



ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΓ. ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΔ μείζων τῆς ΑΒ καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΔΓ ἐλάσσων τῆς ΒΓ, ἐὰν ἐκβαλόντες τὴν ΔΓ τῇ ΒΓ ἴσην θῶμεν ἑκατέραν τῶν ΔΘ ΔΚ, ὁ περὶ κέντρον τὸ Δ διὰ τῶν Θ Κ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΖ. τεμνέτω κατὰ τὸ Η, καὶ μεταξὺ τῶν Α Η εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Λ· δῆλον δὴ ὅτι ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΛ ἑκατέρα τῶν ΑΔ ΔΛ ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ ἔσται μείζων.

65 *λʹ. Ἂν δὲ θέλωμεν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσην εἶναι, δεήσει τὴν μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ μείζονα ὑποθέσθαι, τὴν δὲ ΒΓ τῆς ΒΑ ἐλάσσονα.*

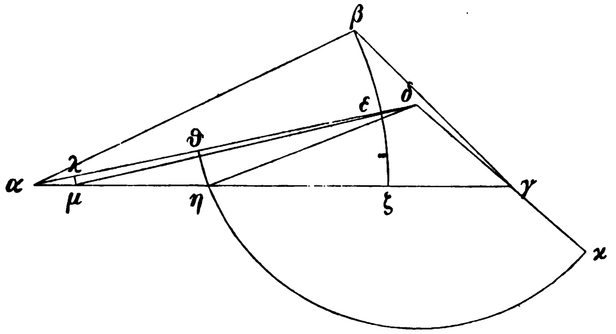
Ἐχέτω γὰρ οὕτως, καὶ ὁμοίως ἡ ΒΕΖ περιφέρεια γεγράφθω, καὶ τὸ Δ σημεῖον εἰλήφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΔΓ, καὶ τῆς ΔΓ ἐκβληθείσης τῇ ΒΓ ἴση κείσθω

---

6. 7. *ἡ ΖΕΒ* ABS, corr. *Co* 18. *τῶν ΘΚ* A, distinx. BS 19. *τὴν ΑΖ* A, sed ex *Α* factum esse videtur *Δ*, unde *τὴν δζ* BSV¹, quod corr. V² (cod. Paris. 2369 cum A consentit in *τὴν αζ*) 20. *τῶν ΑΗ* A, distinx. BS *τυχὸν τὰ σημεῖα* A, *τυχόντα σημεῖα* B³S, corr. B¹ *τὸ Λ Hu* auctore *Co*, *τὰ ΛΜ* A, *τὰ λ μ* BS 21. *ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΛ Hu* auctore *Co* pro *ἐπιζευχθεῖσα* *τῶν ΔΛ ΛΜ* ABSV¹, *τῶν δλ δμ* V², *τῶν ΛΔ ΔΜ Co*, corr. *Hu* auctore *Co* 23. *Λ* A¹ in marg. (S), om. B 28. *τῆς δγ* V² *Co* pro *τῆς ΒΓ*

Supponatur triangulum $\alpha\beta\gamma$, cuius *latus* $\alpha\beta$ non minus sit quam $\beta\gamma$, et *basis* $\alpha\gamma$ utroque maius, et circa centrum α per β circuli circumferentia describatur $\beta\varepsilon\zeta$, et sumatur inter hanc et rectam $\beta\gamma$ quodvis punctum δ et iungantur $\alpha\delta$ $\delta\gamma$. Quoniam *ex constructione* $\alpha\delta$ maior est quam $\alpha\beta$, ideoque propter hypothesim maior quam $\beta\gamma$, et $\delta\gamma$ minor quam $\beta\gamma$ (*elem.* 1, 21), si produxerimus rectam $\delta\gamma$ et ipsi $\beta\gamma$ aequalem fecerimus utramque $\delta\vartheta$ $\delta\varkappa$, circulus circa centrum δ per puncta ϑ $\varkappa$ descriptus secabit rectam $\alpha\zeta$. Secet in puncto η, et inter α η sumatur quodvis punctum λ; apparet igitur, iunctâ $\delta\lambda$, esse $\alpha\delta$ maiorem quam $\alpha\beta$, et $\lambda\delta$ quam $\beta\gamma$*).

XXX. Quodsi utramque *interiorum* utrique *exteriorum* aequalem esse velimus, necesse erit rectam $\alpha\gamma$ maiorem quam $\alpha\beta$, et $\beta\gamma$ minorem quam $\alpha\beta$ supponere. Prop. 38



Sic igitur constructum sit, et similiter *ac supra* circumferentia $\beta\varepsilon\zeta$ describatur, et punctum δ sumatur, et $\delta\alpha$ $\delta\gamma$ iungantur, et productâ $\delta\gamma$ ipsi $\beta\gamma$ aequalis ponatur $\delta\varkappa$, et

*) Sic nos partim ex coniectura, quam librarius codicis B fecit, partim Commandino auctore et Graeca verba et Latinam interpretationem correximus, cum duarum rectarum $\lambda\delta$ $\delta\mu$ constructio ex proxima propositione prave huc translata esse videatur. Ceterum in figura apposita ipsam speciem, quae in codice exstat, servavimus, quo corrupta etiam codicis scriptura, nec non altera Commandini coniectura intellegi posset, qui haec quoque adnotat: "*vel si placet etiam duo puncta sumere, ita legemus: et inter α η puncta sumantur λ μ. perspicuum est, iunctis $\lambda\delta$ $\delta\mu$, singulas ipsarum $\alpha\delta$ $\delta\lambda$ vel $\alpha\delta$ $\delta\mu$ singulis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ maiores esse*".

ἡ *ΔΚ*, καὶ ἡ *ΚΗΘ* περιφέρεια κατὰ τὸ αὐτὸ γραφεῖσα τεμνέτω τὴν *ΑΔ* κατὰ τὸ *Θ*, τὴν δὲ *ΑΖ* κατὰ τὸ *Η*. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ *ΑΒ* τῆς *ΒΓ*, ἔσται καὶ τῆς *ΔΘ* μείζων. κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ *ΔΛ*, καὶ περὶ κέντρον τὸ *Δ* διὰ τοῦ *Λ* περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν *ΑΗ* κατὰ τὸ *Μ*. φανερὸν δὴ ὅτι ἐπιζευχθεῖσα ἑκατέρα τῶν *ΔΜ ΔΗ* ἴση ἔσται ἑκατέρᾳ τῶν *ΑΒ ΒΓ*.

66 λα΄. Μᾶλλον δ' ἂν ἐπιταθείη τὸ παράδοξον, εἰ μὴ μόνον ἴσαι ἢ μείζους ἁπλῶς εἶεν αἱ ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς τοῦ τριγώνου συνιστάμεναι τῶν περιεχουσῶν δύο πλευρῶν, ἀλλὰ καὶ λόγον ἔχοιεν πρὸς αὐτὰς τὸν ἐπιταχθέντα.

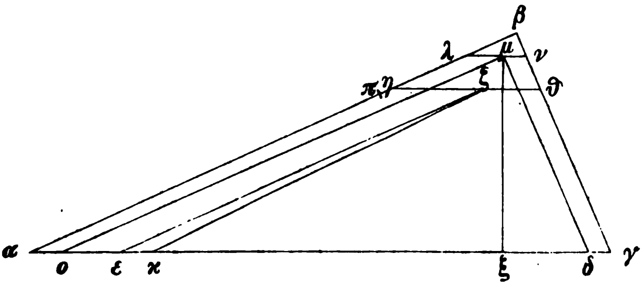
Κατεσκευάσθωσαν γὰρ αἱ *ΕΖΚ* ἴσαι ταῖς *ΑΒΓ* (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ἐστι γενέσθαι [διὰ τῶν πρώτων] εἴρηται ἐν ἀρχῇ), καὶ τὸ μὲν *Π* δίχα τεμνέτω συναμφότερον τὴν *ΑΒΓ*, ἡ δὲ *ΘΖΗ* παράλληλος ἤχθω τῇ *ΑΓ* [καὶ ἡ *ΖΕ* δὲ παράλληλος ἔστω τῇ *ΒΑ*], καὶ τῷ δοθέντι λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς *ΑΒ* πρὸς *ΑΛ*, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ *ΛΜΝ*, καὶ ἐπὶ τῆς *ΛΜΝ* σημεῖον εἰλήφθω τὸ *Μ*, ὥστε τὰς δι' αὐτοῦ ταῖς *ΒΔ ΒΓ* παραλλήλους ἀγομένας τὰς *ΜΟ ΜΔ* περιλαμβάνειν τὸ *Ζ*. ἔσται δὴ καὶ συναμφοτέρου τῆς *ΑΒΓ*, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς *ΕΖΚ*, πρὸς συναμφότερον τὴν *ΛΔ ΝΓ*, τουτέστι πρὸς συναμφότερον τὴν *ΟΜΔ*, δοθεὶς λόγος· ἐν ἄρα τῷ *ΟΜΔ* τριγώνῳ ἐντὸς οὖσαι αἱ *ΕΖΚ* πρὸς τὰς *ΟΜΔ* περιεχούσας λόγον ἔχουσι τὸν ἐπιταχθέντα.

---

2. τὴν *ΑΔ* *Co Sca* pro τὴν *ΑΒΔ* 4. καὶ add. *Hu* auctore *Co* 6. τῶν *ΔΜ ΜΗ* ABSV¹, corr. V² *Sca* (τῶν *ΜΔ ΔΗ* voluit *Co*) 8. λα΄ add. S 13. διὰ τῶν πρώτων om. *Co* (orta esse videtur haec corruptela ex glossa διὰ τὸ κε, i. e. propos. 29) 14. τὸν μὲν *Π* διχ//////////////φότερον A, τὸν μὲν .... συναμφότερον B, τὸν μὲν π, et cetera ut B, S, corr. *Hu* 15. ἡ δὲ θζη V² (ἡ δὲ *ΗΖΘ* *Co*) pro ἡ δὲ *ΘΗΖ* 15. 16. καὶ ἡ *ΖΕ* — τῇ *ΒΑ* interpolatori tribuit *Hu* 17. ὁ τῆς *ΑΒ* πρὸς *ΒΔ* ABSV¹ cod. *Co*, corr. V² *Co* τῇ *ΑΓ* add. *Hu* 18. ἡ *ΔΜΝ* καὶ ἐπὶ τῆς *ΔΖΝ* ABSV¹ cod. *Co*, corr. *Co* (ἡ λμν corr. etiam V²) 19. 20. τὰς *ΜΘ ΜΔ* ABSV¹ cod. *Co*, corr. V² *Co* 22. τὴν *ΑΔΝΓ* ABS, distinx. *Co* 23. δοθεὶς λόγος] exspectamus λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι 24. πρὸς τὰς *ΑΒΓ* ABSV¹ cod. *Co*, corr. V² *Co*

circumferentia $\varkappa\eta\vartheta$ ea quam diximus ratione descripta secet rectam $\alpha\delta$ in ϑ, et $\alpha\zeta$ in η. Iam recta $\alpha\beta$, quia maior est quam $\beta\gamma$, maior etiam erit quam $\delta\vartheta$. Ponatur ipsi $\alpha\beta$ aequalis $\delta\lambda$, et circa centrum δ per λ circumferentia descripta secet rectam $\alpha\eta$ in μ. Apparet igitur, iunctis $\delta\mu$ $\delta\eta$, esse $\delta\mu = \alpha\beta$, et $\delta\eta = \beta\gamma$.

XXXI. Sed magis etiam admiratio intendatur, si rectarum intra triangulum in basi constitutarum summa non solum simpliciter aequalis sit summae laterum duorum ipsas comprehendentium vel maior eàdem summâ, sed etiam ad eam summam datam proportionem habeat. Prop. 34

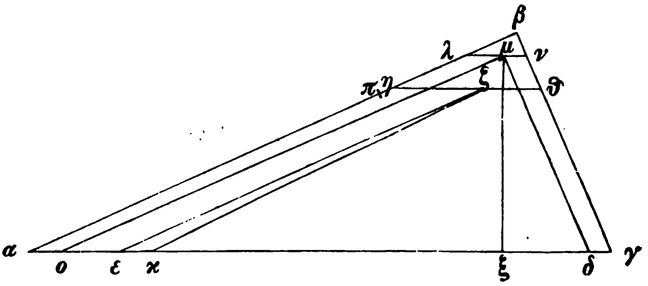


Construantur enim $\varepsilon\zeta + \zeta\varkappa = \alpha\beta + \beta\gamma$ (hoc enim fieri posse initio [*propos. 29*] demonstratum est), et punctum π summam rectarum $\alpha\beta + \beta\gamma$ bifariam secet, et rectae $\alpha\gamma$ parallela ducatur $\eta\zeta\vartheta$, et datae proportioni aequalis sit $\alpha\beta : \alpha\lambda$, et rectae $\alpha\gamma$ parallela ducatur $\lambda\mu\nu$, cuius punctum μ ita sumatur, ut rectae μo $\mu\delta$ parallelae ipsis $\beta\alpha$ $\beta\gamma$ ductae punctum ζ circumplectantur. Iam, *quia datae proportioni $\alpha\beta : \alpha\lambda$ propter parallelas $\lambda\nu$ $\alpha\gamma$ aequalis est $\beta\gamma : \nu\gamma$, est igitur summâ antecedentium consequentiumque factâ* (*elem. 5, 12*)

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\lambda} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma}{\alpha\lambda + \nu\gamma}, \text{ id est } \frac{\varepsilon\zeta + \zeta\varkappa}{o\mu + \mu\delta};$$

ergo in triangulo $o\mu\delta$ rectarum, quae intus sunt, $\varepsilon\zeta$ $\zeta\varkappa$ summa ad laterum $o\mu$ $\mu\delta$, quae ipsas comprehendunt, summam habet datam proportionem.

Ἐπεὶ δὲ δεῖ τὴν ΛΜΝ ἀνώτερον πίπτειν τῆς ΗΘ, δεῖ τὴν ΒΑ τῆς ΑΛ ἐλάσσονα εἶναι ἢ διπλασίαν (ἐπεὶ καὶ



τῆς ΑΠ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία), ὥστε καὶ τὸν δοθέντα λόγον δεήσει ἐλάσσονα εἶναι τοῦ διπλασίου. δῆλον δ' ὅτι, ὅσῳ ἂν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ πολλαπλασία γίνηται, ἡ δὲ Β γωνία ἀμβλύνηται, μᾶλλον αἱ ΕΖΚ τῷ διπλασίῳ συνεγγιοῦσι λόγῳ, καὶ μᾶλλον, εἰ μὴ ἴσαι εἶεν αἱ ΕΖΚ ταῖς ΑΒΓ ἀλλὰ μείζους αὐτῶν, καὶ φανερόν, εἰ καθέτου ἀχθείσης τῆς ΜΞ πρὸς τὰς ΟΜΞ συγκρίνονται. δυνατὸν δὲ καὶ καθ' ἑτέρας ἐφόδους τὸ αὐτό, ἀλλὰ πρὸς ἔνδειξιν ἱκανὸς ὁ τρόπος οὗτος.

67 λβ'. *Οὐ μόνον δ' ἐπὶ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως αἱ εὐθεῖαι συνίστανται συναμφότεραι μείζους τῶν ἐκτὸς αἱ ἐντός, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τετραπλεύρου δύο τῶν τριῶν καὶ τρεῖς τῶν τριῶν, καὶ ἐπὶ τῶν ἔτι πολυπλευροτέρων ὁμοίως ὁσαιδὴ αἱ ἐντὸς ὁσωνοῦν τῶν ἐκτὸς μείζους εἶναι δύνανται.*

Ἂν γὰρ ᾖ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἐν ᾧ συνίστανται αἱ ΔΕΖ

---

1. *τὴν ΛΜΝ Co* pro *τὴν* $\overline{ΛΜ}$ 2. 3. *ἐπεὶ — διπλασία* om. *Co* 3. *τῆς ΑΠ Hu* pro *τῆς* $\overline{ΑΘ}$ 8. *φανερόν Hu* pro *μᾶλλον* *εἰ* coni. *Co*, *ἔτι* AS, *ἐπὶ* B cod. *Co* 9. *συγκρινόμενα* ABS, *συγκρινόμεναι* vel *συγκρίνομεν* coni. *Co*, corr. *Hu* 12. $\overline{λβ}'$ add. BS 15. *ἔτι* A² ex *ἐπι* 16. *ὅσαι δὴ* ABS *ὅσων οὖν* AB, coniunx. S

Sed quoniam rectam $\lambda\mu\nu$ supra rectam $\eta\zeta\vartheta$ cadere oportet (*alioquin enim rectae* $o\mu$ $\mu\delta$ *non comprehenderent ipsas* $\varepsilon\zeta$ $\zeta\varkappa$, *id quod in constructione supposuimus*) *et quia ex propos.* 29 *sequitur rectam* $\eta\zeta\vartheta$ *supra* π *cadere*, *ideoque est* $\alpha\lambda > \alpha\eta > \alpha\pi$, *atque ex hypothesi est*

$\frac{\alpha\beta + \beta\gamma}{\alpha\pi} = \frac{2}{1}$, *itaque* [1]) $\frac{\alpha\beta}{\alpha\pi} < \frac{2}{1}$, necessario *igitur* est $\frac{\alpha\beta}{\alpha\lambda} < \frac{2}{1}$; itaque etiam datam proportionem minorem esse oportebit quam $2 : 1$. Apparet autem, quo maior fiat proportio $\alpha\beta : \beta\gamma$ magisque obtusus angulus $\alpha\beta\gamma$, eo magis proportionem $\varepsilon\zeta + \zeta\varkappa : o\mu + \mu\delta$ appropinquare proportioni $2 : 1$*), et magis etiam, si summa $\varepsilon\zeta + \zeta\varkappa$ non aequalis sit summae $\alpha\beta + \beta\gamma$ sed maior quam illa, idque manifestum fit, si perpendiculari ductà $\mu\xi$ rectae $\varepsilon\zeta$ $\zeta\varkappa$ cum $o\mu$ $\mu\xi$ comparantur [2]). Idem etiam aliis modis *effici* potest; sed ad demonstrationem satis est haec ratio *quam supra ingressi sumus.*

XXXII. Non solum autem in trianguli basi rectae intus constituuntur, quae simul sumptae maiores sunt exterioribus, sed etiam in quadrilatero duae *unà sumptae* tribus *exterioribus*, et tres tribus, et similiter in polygonis quae plura etiam latera habent quotcunque interiores quotcunque exterioribus maiores esse possunt. Prop. 35

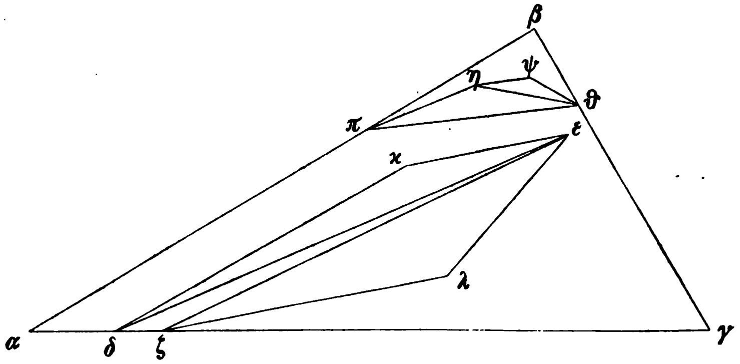
Nam si sit triangulum $\alpha\beta\gamma$, in quo $\delta\varepsilon + \varepsilon\zeta$ construun-

1) Ad haec supplenda viam praemonstravit Commandinus; sed illius ratio aliquanto, opinor, impeditior est.

*) "Quo enim $\alpha\beta$ magis superat $\beta\gamma$, eo punctum π magis accedit ad α et proportio $\beta\alpha$ ad $\alpha\lambda$ augeri potest, ut ad duplam propius accedat" *Co.*

2) Hoc loco scriptor supponere videtur aut ipsarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ magnitudinem non variari (quae est Commandini sententia), aut summam $\alpha\beta + \beta\gamma$ eandem manere. Hoc igitur si statuimus, primum redit illa hypothesis "quo maior fit proportio $\alpha\beta : \beta\gamma$"; accedit autem altera "quo magis, manentibus $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, angulus $\alpha\beta\gamma$ obtusus fit". Sic enim scriptor existimat magis magisque rectas $o\mu$ $\mu\delta$ imminui posse, et ita quidem, ut semper tamen rectas $\varepsilon\zeta$ $\zeta\varkappa$, quae ipsae magis magisque augeantur, intra se contineant. Quod ope perpendicularis $\mu\xi$ demonstrari posse significat. Acutissime haec sine dubio sunt observata et digna quae latius exponantur.

μείζονες τῶν ΑΒΓ καὶ διαχθῇ ἡ ΠΘ τυχοῦσα ὑπὲρ τὸ Ε, μείζονες ἔσονται αἱ ΔΕΖ τῶν ΑΠ ΠΘ ΘΓ ἐν τῷ ΑΠΘΓ



τετραπλεύρῳ. κἂν τυχοῦσα κλασθῇ ἡ ΔΚΕ, αἱ τρεῖς ὁμοῦ αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΖ τῶν τριῶν τῶν ΑΠ ΠΘ ΘΓ μείζους ἔσονται. κἂν πάλιν κλασθῇ ἡ ΠΗΘ, μείζους ἔσονται αἱ ΔΕΖ καὶ ἔτι αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΖ τῶν τεττάρων *τῶν* ΑΠ ΠΗ *ΗΘ ΘΓ ἐν πενταπλεύρῳ. κἂν* ἔτι κλασθῇ ἡ ΕΛΖ, μείζους ἔσονται τέτταρες *αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΛ ΛΖ* τῶν τεττάρων τῶν ΑΠ ΠΗ *ΗΘ ΘΓ. κἂν ἡ ΠΗΨΘ κλασθῇ, κἂν ἔτι πρὸς πλείω σημεῖα τῶν Η Ψ καὶ τῶν Κ Λ ἡ κλάσις γίνηται, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. καὶ ἐπὶ τὸ ἄπειρον, ὅσας ἂν τις ἐπιτάξῃ τὰς ἐντὸς ὁσωνδὴ τῶν ἐκτὸς εἶναι μείζους, τῷ αὐτῷ τρόπῳ κατασκευασθήσεται.*

68 *λγʹ. Δυνατὸν δὲ καὶ τὰς ἐντὸς ὁσαισδὴ ταῖς ἐκτὸς περιλαμβανούσαις πάσαις ὁμοῦ πάσας ἴσας εἶναι.*

Κατασκευασθεισῶν γάρ, ὡς προδέδεικται, τῶν ΗΘ ΘΚ ΚΛ ΛΜ μειζόνων ὁσωνδὴ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ, ἂν

---

2. *τῶν ΑΠ ΠΟ ΘΓ ἐν τῶι ΑΠ Η* A (item BS, nisi quod *απη*), corr. *Co* 5. *κἂν Hu* auctore *Co* pro *καὶ* (*καὶ πάλιν ἂν* V[2]) *ἡ ΠΗΘ Co* pro *ἡ ΗΘ* (*ἡ πθ* V[2]) 5—9. *αἱ ΔΕΖ* | *τῶν* // */Κ* (?) */Θ ΘΓ ἐν πενταπλεύρωι καὶ ἔτι αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΛ ΛΖ* | ////// // *!Θ ΘΓ κἂν ἡ ΠΗ Ψ'Θ* cet. A et similiter BSV, *duae ΔΕ ΕΖ itemque tres ΔΚ ΚΕ ΕΖ maiores quattuor ΑΠ ΠΗ ΗΘ ΘΓ in quinquelatero, et si inflectatur ΕΛΖ, erunt et quattuor ΔΚ ΚΕ ΕΛ ΛΖ maiores quam quattuor ΑΠ ΠΗ ΗΘ ΘΓ. at si inflectatur ΠΗΨ'Θ* cet. *Co*, reliqua corr. *Hu* (*αἱ δκεζ τῶν*

tur maiores quam $\alpha\beta + \beta\gamma$, et quaevis recta $\pi\vartheta$ ducatur supra ε, in quadrilatero $\alpha\pi\vartheta\gamma$ erunt

$$\delta\varepsilon + \varepsilon\zeta > \alpha\pi + \pi\vartheta + \vartheta\gamma.$$

Et si quaevis linea $\delta\varkappa\varepsilon$ inflectatur [1], *in eodem quadrilatero* erunt

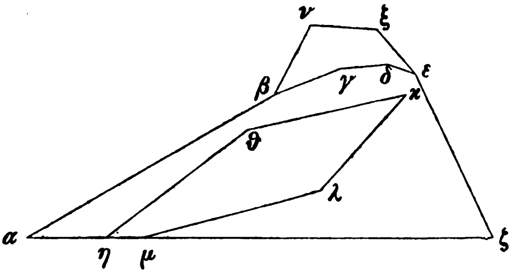
$$\delta\varkappa + \varkappa\varepsilon + \varepsilon\zeta > \alpha\pi + \pi\vartheta + \vartheta\gamma.$$

Et rursus si inflectatur $\pi\eta\vartheta$, in quinquelatero $\alpha\pi\eta\vartheta\gamma$ erunt $\delta\varepsilon + \varepsilon\zeta$, itemque $\delta\varkappa + \varkappa\varepsilon + \varepsilon\zeta > \alpha\pi + \pi\eta + \eta\vartheta + \vartheta\gamma$. Et si insuper inflectatur $\varepsilon\lambda\zeta$, erunt quattuor *interiores* quattuor *exterioribus* maiores, *scilicet*

$$\delta\varkappa + \varkappa\varepsilon + \varepsilon\lambda + \lambda\zeta > \alpha\pi + \pi\eta + \eta\vartheta + \vartheta\gamma.$$

Et si inflectatur $\pi\eta\psi\vartheta$, et si ad plura etiam puncta quam $\eta\ \psi$ et $\varkappa\ \lambda$ inflexio fiat, idem continget. Atque in infinitum, quotcunque quis rectas interiores exterioribus quotcunque maiores esse iusserit, eadem erit construendi ratio.

XXXIII. Fieri etiam potest ut summa interiorum rectarum summae quotcunque exteriorum aequalis sit. Prop. 36

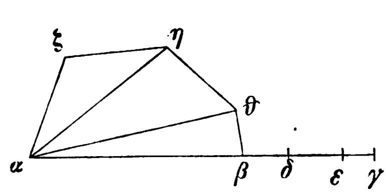


Si enim construantur, sicut modo demonstratum est, rectae $\eta\vartheta$ $\vartheta\varkappa$ $\varkappa\lambda$ $\lambda\mu$ *unà sumptae* maiores quam quotcun-

1) Id est, si super rectam $\delta\varepsilon$ quivis angulus $\delta\varkappa\varepsilon$ constituatur, ita scilicet, ut punctum $\varkappa$ sit inter $\delta\varepsilon$ et $\alpha\pi$.

$\overline{\alpha\pi}\,\overline{\nu\vartheta\gamma}$ *ἐν πενταπλεύρῳ καὶ ἔτι αἱ* $\overline{\delta\varkappa}$ $\overline{\varkappa\varepsilon}$ $\overline{\varepsilon\lambda}$ $\overline{\lambda\zeta}$ *τῶν* $\overline{\alpha\pi\nu\psi\vartheta\gamma}$. *κἂν ἡ* $\overline{\pi\nu\psi\vartheta}$ cet. V[2]) 10. *τῶν* $\overline{H\Psi}$' A, distinx. BS *τῶν K Λ* *Hu*, *τῶν* $\overline{K\Delta}$ A *Co* (distinx. BS) 12. *ὅσων δὴ* ABS *τῶν αὐτῶι* A, corr. BS 14. $\overline{\Lambda\Gamma}$ A[1] in marg. (BS) *ὅσαις δὴ* ABS 15. *περιλαμβανομέναις* ABSV[1], corr. V[2] 17. *μείζων* AB, *μεῖζον* S, corr. *Hu* *ὅσων δὴ* ABS, *οὐσῶν* coni *Co* *κλασθῇ ἡ ΒΝΞΕ τῷ ἴσῳ μείζων τῆς ΒΓΔΕ, γεγονὸς ἔσται τὸ προκείμενον.*

69 *λδʹ. Ῥάδιον δὲ ἀπὸ δύο σημείων τῶν Β Ε κλάσαι τὴν ΒΝΞΕ καθόλου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην τῶν κλασμάτων τὸ πλῆθος δοθὲν ἔχουσαν.*



Ἔστω γὰρ τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α Β, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει εὐθεῖα ΑΓ μείζων τῆς ΑΒ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΒΓ εἰς τυχούσας εὐθείας τὰς ΒΔ ΔΕ ΕΓ μιᾷ ἐλάσσονας τοῦ τῶν κλασμάτων πλήθους, καὶ ἡ μὲν ΑΘΒ κεκλάσθω τῆς ΑΒ ὑπερέχουσα τῇ ΒΔ (ῥᾴδιον γὰρ ποιῆσαι), ἡ δὲ ΑΗΘ κεκλάσθω τῆς ΑΘ ὑπερέχουσα τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΖΗ κεκλάσθω τῆς ΑΗ ὑπερέχουσα τῇ ΕΓ· ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΑΖ ΖΗ ΗΘ ΘΒ ἴσον τῷ δοθέντι, καὶ ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη εὐθεῖα ἴση τῇ ΑΓ. εὔκολον γὰρ ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦτο συνιδεῖν καὶ ὅτι ἀπειραχῶς γίνεται.

70 *λεʹ. Δυνατὸν δὲ καὶ παραλληλόγραμμον εὑρεῖν, οὗ ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς εὐθεῖαι δύο συνίστανται ταῖς περιεχούσαις τρισὶν ἴσαι καὶ μείζους αὐτῶν προδιδαχθέντος τοῦδε.*

---

1. *ἡ ΒΝ ΞΕ* AB (*ἡ βν ζε* S), coniunx. *Co* 3. *λδʹ* hoc loco add. *Hu*, idem paulo post ante *Ἔστω* exhibent ABS *τῶν ΒΕ* A, distinx. BS 7. 8. *τὰ ΑΒ* AB, distinx. S 12. *τὰς ΒΔ Co* pro *τὰς ΒΓ* 13. *τοῦ τῶν* A¹ ex *τούτων* 13. 14. *ἡ μὲν ΑΘΒ Hu*, *ἡ μὲν ΑΖ* : ~ (quasi sit finis propositionis, et tum ineunte proximo versu) *Η* A, *ἡ μὲν αζ* B¹S, *ἡ μὲν αζη* B³ (*Co*) 14. *τῆς ΑΒ*] *τῆς ΑΗ Co* *ὑπερέχουσαι* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 15. post *τῆς ΑΘ ὑπερέχουσα* add. *τῆι ΒΔ ποιῆσαι ἡ δὲ ΑΗΘ κεκλάσθω τῆς ΑΗ ὑπερέχουσα* AB³S, corr. *Co* (idem voluit B¹, qui spuria illa omittit, sed pro *ΑΘ* habet *αη*) 16. *ἡ δὲ ΑΘΒ κεκλάσθω τῆς ΑΒ* voluit *Co* (conf. adnot. ad Lat.) 19. *τοῦτό τε* coni. *Hu* 21. *ΔΕ* A¹ in marg. (B), om. S 22. 23. *συνίστανται — ἴσαι Hu* auctore *Co* pro *συνιστᾶν — ἴσας*

que $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ . . ., et inflectatur $\beta\nu\xi\varepsilon$*) *inflexam* $\beta\gamma\delta\varepsilon$ superans aequali *differentia atque inflexa* $\eta\vartheta\varkappa\lambda\mu$ *superat* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ (*propos. 37*), factum erit propositum.

XXXIV. Facile autem est a duobus *datis* punctis (*ut* β ε *in superiore propositione*) inflectere omnino *quamlibet* lineam (*velut modo* $\beta\nu\xi\varepsilon$), quae datae cuidam aequalis sit et datum numerum singularum rectarum contineat. Prop. 37

Sint enim data puncta α β, et recta magnitudine data $\alpha\gamma$ maior quam $\alpha\beta$, et dividatur $\beta\gamma$ in quaslibet rectas $\beta\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\gamma$ . . ., quarum *numerus* uno minor sit *dato* numero singularum rectarum, e quibus inflexa componenda sit, et inflectatur $\alpha\vartheta\beta$ rectam $\alpha\beta$ superans ipsâ $\beta\delta$ — hoc enim facile fieri potest[1] — et $\alpha\eta\vartheta$ inflectatur rectam $\alpha\vartheta$ superans ipsâ $\delta\varepsilon$, et $\alpha\zeta\eta$ inflectatur rectam $\alpha\eta$ superans ipsâ $\varepsilon\gamma$**); erit igitur numerus rectarum $\alpha\zeta$ $\zeta\eta$ $\eta\vartheta$ $\vartheta\beta$ . . . aequalis dato *numero*, et recta quae ex omnibus componitur aequalis ipsi $\alpha\gamma$. Facile enim haec ita fieri, et quidem infinite, ex constructione perspicitur.

XXXV. Fieri etiam potest ut parallelogrammum inveniatur, cuius in basi intus duae constituantur *unâ sumptae* aequales tribus quae ipsas comprehendunt, vel maiores iisdem, hoc prius demonstrato. Prop. 38

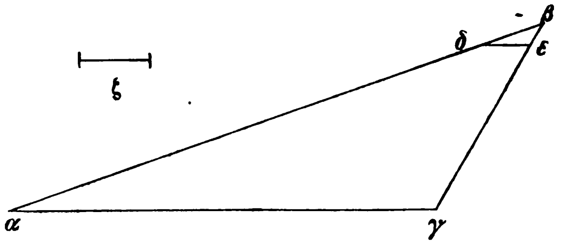
*) Paulo commodius ex recentiorum usu scribi poterat "et inflectatur $\beta\nu\xi\varepsilon$ ita, ut sit $\beta\nu + \nu\xi + \xi\varepsilon - (\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon) = \eta\vartheta + \vartheta\varkappa + \varkappa\lambda + \lambda\mu - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\zeta)$".

1) Scilicet in recta $\alpha\beta\delta$ ita sumatur quodvis punctum ϑ, ut ex rectis $\alpha\vartheta$ $\vartheta\delta$ $\alpha\beta$ construi possit triangulum $\alpha\vartheta\beta$. Paulo latius haec explicat Commandinus.

**) Unam codicis pravam scripturam (vid. Graec. p. 122, 13. 14) retinens Commandinus plura alia, quae sanissima sunt, corrupit hunc in domum: "*et* $\alpha\zeta\eta$ *quidem inflectatur adeo, ut superet* $\alpha\eta$ *quantitate lineae* $\beta\delta$, $\alpha\eta\vartheta$ *vero inflectatur, ut superet* $\alpha\vartheta$ *quantitate* $\delta\varepsilon$, *et* $\alpha\vartheta\beta$ *superet* $\alpha\beta$ *ipsa* $\varepsilon\gamma$". Nos autem nihil nisi manifestam illam codicis corruptelam mutavimus, reliqua autem servavimus, quae commodius ex nostratium usu sic perscribuntur: "construantur

$$\alpha\vartheta + \vartheta\beta = \alpha\beta + \beta\delta$$
$$\alpha\eta + \eta\vartheta = \alpha\vartheta + \delta\varepsilon$$
$$\alpha\zeta + \zeta\eta = \alpha\eta + \varepsilon\gamma\text{" unde sponte efficitur esse}$$
$$\alpha\zeta + \zeta\eta + \eta\vartheta + \vartheta\beta = \alpha\beta + \beta\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\gamma$$
$$= \alpha\gamma.$$

Ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ δοθείσῃ μείζων ἢ ἐν λόγῳ· ἀγαγεῖν παράλληλον τῇ ΑΓ *τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν ἐν τῷ λόγῳ τὴν ΑΔ πρὸς συναμφότερον τὴν ΔΕ ΒΓ.*



Γεγονέτω. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ δοθείσῃ μείζων ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ἔστω λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ μετὰ δοθείσης· ἔστω τῆς Ζ. ὁ δ' αὐτός ἐστιν καὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὰς ΔΕ ΒΓ· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ΒΔ λόγος πρὸς τὴν τῶν Ζ ΔΕ ὑπεροχὴν ὁ αὐτός ἐστίν. *καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ Ζ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΕ *** θέσει ἄρα *** ὥστε καί, ἂν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων ᾖ ἢ διπλῆ, δυνατὸν ἔσται ἀγαγεῖν παράλληλον τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν τὴν ΑΔ διπλῆν συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ.*

71 *λς'. Ἐκκείσθω δὴ τοιοῦτον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὥστε τὴν μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζονα εἶναι ἢ διπλασίαν, τὴν δὲ ΑΓ τῆς ΓΒ διπλασίαν, καὶ ἤχθω παράλληλος ἡ ΔΕ ποιοῦσα τὴν ΑΔ διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ, καὶ*

---

1. *δοδεῖσαι* ABS[1], *δοθείσης* cod. Paris. 2368 S[2], corr. *Hu* auctore *Co* 2. $\overline{ΑΓ}$ *τὴν* add. *Hu* *ποιεῖ* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 3. *τὴν* $\overline{ΚΔ}$ *πρὸς συναμφότερον τὴν* $\overline{ΔΕ}$ $\overline{ΑΓ}$ AS, *τὴν* $\overline{δκ}$ *πρὸς συναμφότερον τὴν* $\overline{δε}$ $\overline{εγ}$ B, corr. *Co* 4. *γέγονεν τω* A[1], corr. A[2] *δοθείσῃ* AB, *δοθείσης* S 7. *τὰς* $\overline{ΔΕΒΓ}$ A, distinx. BS 7. 8. *τῶν* $\overline{ΖΔΕ}$ ABS, distinx. *Co* 8. *ὁ αὐτός ἐστιν* add. *Hu* auctore *Co* *ἡ* $\overline{Ζ}$ AB, *ἡ* $\overline{ζη}$ S post *ἡ Ζ* nullum lacunae signum posuimus, quanquam in Latinis nonnulla supplevimus; haece enim Graecus scriptor cogitatione addenda esse putavit neque diserte expressit 9. ****θέσει ἄρα* ***] de lacunis, quarum nullum est vestigium in Graecis codicibus, vide Latina 13. $\overline{Λς}$ A[1] in marg. (BS) 16. *τῆς* $\overline{ΔΕΒΓ}$ ABS, distinx. *Co*

Triangulo $\alpha\beta\gamma$ *specie dato*[1]) sit recta $\alpha\beta$, comparata cum $\beta\gamma$, datâ maior quam in *datâ* proportione[2]): *propositum sit* rectae $\alpha\gamma$ parallelam $\delta\varepsilon$ ita ducere, ut in eadem proportione sit $\alpha\delta : \delta\varepsilon + \beta\gamma$.

Factum iam sit. Quoniam $\alpha\beta$, comparata cum $\beta\gamma$, datâ maior est quam in *data* proportione, *huic ipsi aequalis* sit proportio rectae $\alpha\beta$ ad $\beta\gamma$ unâ cum *alia* data, quae sit ζ*). Sed *secundum id quod factum iam esse posuimus* est
$\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma+\zeta} = \frac{\alpha\delta}{\delta\varepsilon+\beta\gamma}$; ergo etiam subtractione facta datae proportioni aequalis est
$\frac{\beta\delta}{\zeta-\delta\varepsilon}$. Et data est ζ, *dataque proportio* $\beta\delta : \delta\varepsilon$ (*est enim aequalis proportioni* $\beta\alpha : \alpha\gamma$, *quae ex hypothesi data est*); ergo $\delta\varepsilon$ *magnitudine* data est[3]). *Sed eadem etiam* positione (*est enim parallela rectae* $\alpha\gamma$); *datum est* igitur *punctum* δ ***
*** ergo, si sit $\alpha\beta : \beta\gamma > 2$, parallela $\delta\varepsilon$ ita duci poterit, ut sit $\alpha\delta : \delta\varepsilon + \beta\gamma = 2$**).

XXXVI. Exponatur igitur eiusmodi triangulum, ut sit $\alpha\beta > 2\beta\gamma$, et $\alpha\gamma = 2\beta\gamma$, et ducatur *rectae* $\alpha\gamma$ parallela $\delta\varepsilon$ ita, ut sit $\alpha\delta = 2(\delta\varepsilon + \beta\gamma)$, et in producta $\gamma\alpha$ ponatur $\zeta\alpha =$ Prop. 39

1) Haec nos propter ea quae sequuntur addenda esse censuimus.

2) Id est, si data proportio significetur notâ P, dataque recta d, "sit $\alpha\beta - d : \beta\gamma = P$". Vide Euclid. dat. def. 11 et auctores infra ad VII cap. 26 in adnot. ad IV versionis Lat. citatos.

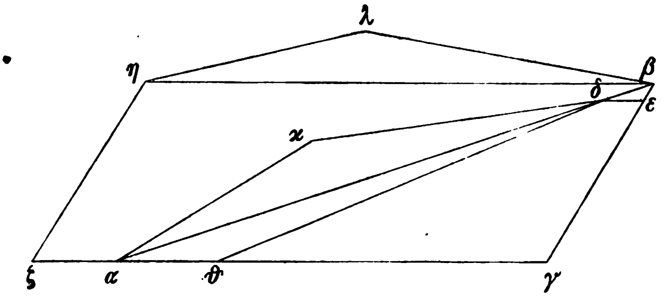
*) Significat scriptor ex aequationibus $P = \frac{\alpha\beta - d}{\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma + \zeta}$ definiri $\zeta = \frac{\beta\gamma \cdot d}{\alpha\beta - d} = \frac{d}{P}$. Geometricam demonstrationem ex ratione veterum supplet Commandinus: vide append.

3) Verba a nobis addita "dataque proportio $\beta\delta : \delta\varepsilon$" cet. conveniunt cum iis quae initio supplevimus (conf. Euclid. dat. def. 3). Illis autem quae supra leguntur suppositis, scilicet datis $P = \frac{\beta\delta}{\zeta - \delta\varepsilon}$, et $p = \frac{\beta\delta}{\delta\varepsilon}$, et datâ ipsâ ζ, facile efficitur datam esse $\delta\varepsilon = \frac{\zeta P}{P + p}$, unde prodit simplicior illa formula, quam in appendice exhibemus, $\delta\varepsilon = \frac{d}{P+p}$.

**) Vide append.

τῆς ΔΕ διπλασία κείσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΑΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον ***

Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΖΑ διπλασία ἐστὶν τῆς ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΓΒ, ἔσται ὅλη ἡ ΖΓ, τουτέστιν ἡ ΗΒ, διπλασία



συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν τῇ ΑΔ. ἐπειδὴ ἡ ΑΔ τῆς ΒΓ μείζων ἢ διπλασία, κατήχθω ἡ ΔΘ διπλασία τῆς ΒΓ· ἴση ἄρα ἡ ΔΘ ταῖς ΗΖ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΗΒ ἴση· αἱ ΑΔΘ ἄρα ἴσαι ταῖς ΖΗ ΗΒ ΒΓ, καὶ ἔστιν παραλληλόγραμμον τὸ ΖΗΒΓ.

Δῆλον δ' ὅτι καὶ μείζους αἱ ΑΔΘ τῶν ΖΗ ΗΒ ΒΓ δύνανται εἶναι.

Καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς τοῦ Κ μᾶλλον αἱ ΑΚ ΚΔ ΔΘ μείζους τῶν ἐκτός.

Καὶ εἰ, ὅσῳ μείζους εἰσίν, κλασθείη ἡ ΗΛΒ τῷ αὐτῷ μείζων τῆς ΗΒ, ἔσονται καὶ αἱ ΑΚ ΚΔ ΔΘ ἴσαι ταῖς ΖΗ ΗΛ ΛΒ ΒΓ ἐν πενταπλεύρῳ. καὶ ἐπὶ τῶν πολυπλευροτέρων ὁ αὐτὸς τρόπος, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τυχόντος τετραπλεύρου συνισταμένων προδέδεικται.

72 λζ'. Ἕπεται τοῖς προειρημένοις καὶ τὰ τοιαῦτα. δοθέντος παραλληλογράμμου χωρίου δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν ἕτερον παραλληλόγραμμον, ὥστε αὐτὸ μὲν τὸ ἐπιταχθὲν μέρος εἶναι τοῦ δοθέντος, ἑκάστην δὲ πλευρὰν ἑκάστης πολλαπλασίαν κατὰ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.

---

2. lacunam, cuius nullum vestigium codices exhibent, explevimus in Latina versione 4. τῆς ΓΒ Co pro τῆς ΓΔ 5. τῆς ΔΕ ΒΓ

$2\,\delta\varepsilon$, et compleatur parallelogrammum $\zeta\eta\beta\gamma$; *dico in basi parallelogrammi* $\zeta\eta\beta\gamma$ *duas rectas constitui posse, quarum summa aequalis sit summae trium parallelogrammi laterum ipsas comprehendentium, itemque duas rectas, quarum summa maior sit quam summa eorundem laterum.*

Quoniam enim est $\zeta\alpha = 2\,\delta\varepsilon$, et $\alpha\gamma = 2\,\beta\gamma$, erit tota $\zeta\gamma$, id est $\eta\beta = 2(\delta\varepsilon + \beta\gamma)$, ideoque $\eta\beta = \alpha\delta$. Quia est $\alpha\delta = 2(\delta\varepsilon + \beta\gamma)$, *id est* $> 2\,\beta\gamma$, ducatur $\delta\vartheta = 2\,\beta\gamma$; ergo $\delta\vartheta = \eta\zeta + \beta\gamma$. Sed etiam demonstrata est $\alpha\delta = \eta\beta$; ergo $\alpha\delta + \delta\vartheta = \zeta\eta + \eta\beta + \beta\gamma$; et est parallelogrammum $\zeta\eta\beta\gamma$.

Apparet autem fieri etiam posse ut $\alpha\delta + \delta\vartheta$ maiores sint quam $\zeta\eta + \eta\beta + \beta\gamma$ (*conf. supra propos. 31*).

Et si quoddam punctum $\varkappa$ (*extra* $\alpha\delta$ $\delta\vartheta$, *sed intra parallelogrammum*) sumatur *et inflectatur* $\alpha\varkappa\delta$, eo magis $\alpha\varkappa + \varkappa\delta + \delta\vartheta$ maiores erunt exterioribus $\zeta\eta + \eta\beta + \beta\gamma$.

Et si *super* $\eta\beta$ linea $\eta\lambda\beta$ ita inflectatur, ut sit

$$\eta\lambda + \lambda\beta - \eta\beta = \alpha\varkappa + \varkappa\delta + \delta\vartheta - (\zeta\eta + \eta\beta + \beta\gamma),$$

erunt etiam in quinquelatero

$$\alpha\varkappa + \varkappa\delta + \delta\vartheta = \zeta\eta + \eta\lambda + \lambda\beta + \beta\gamma.$$

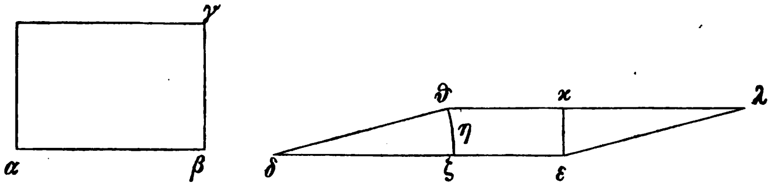
Et in polygonis quae plura etiam latera habent eadem *valet* ratio, sicut iam supra (*propos. 35. 36*) in rectis quae a quovis quadrilatero constituuntur demonstratum est.

XXXVII. Ad ea quae dicta sunt accedunt etiam alia huiusmodi. Dato parallelogrammo rectangulo aliud parallelogrammum eiusmodi inveniri potest, ut ipsum sit proposita pars dati parallelogrammi, singula autem latera singulorum *dati parallelogrammi laterum* multipla sint secundum datos numeros[1]). Prop. 40

1) *Τὸν δοθέντα ἀριθμὸν* scriptor significat simplicem proportionis numerum; supponit igitur singula latera alterius parallelogrammi ad latera dati parallelogrammi esse in proportione dupla vel tripla etc., nec tamen ignorat etiam aliam quamcunque proportionem, velut 3 : 2 etc., sumi posse.

Co pro *τῆς* $\overline{ΔΕΒ}$ 8. *ἡ* $ΑΔ$ *Hu* pro *ἡ* $\overline{ΔΑ}$ *ἴση* add. *Hu* auctore *Co* 15. *αἱ* om. AS, add. B 15. 16. *ταῖς* $\overline{ΖΗΗΛΛΒΒΓ}$ A, distinx. BS 17. *ὅσπερ* AB, *ὅπερ* S, *quemadmodum Co*, corr. *Hu* 19. *λζ'* add. BS

Ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἑκατέρα τῶν ΕΔ ΔΖ πολλαπλασία ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ἤχθω τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ, καὶ ἀπειλήφθω τὸ ὑπὸ ΔΕΚ τὸ ἐπιταχθὲν



μέρος τοῦ ΑΓ παραλληλογράμμου, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Δ περιφέρεια γραφεῖσα ἡ ΖΗΘ τεμνέτω τὴν ΘΚΛ κατὰ τὸ Θ καὶ ἐπιζευχθείσῃ τῇ ΔΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΛ. δῆλον δ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ὅτι αὐτὸ μὲν τὸ ΔΛ παραλληλόγραμμον τὸ δοθὲν μέρος ἐστὶν τοῦ ΑΓ ὀρθογωνίου, ἑκάστη δὲ αὐτοῦ πλευρὰ ἑκάστης πολλαπλασία κατὰ τοὺς προτεθέντας ἀριθμούς.

73 *λη'. Πάλιν τριγώνου δοθέντος ἔλασσον εὑρίσκεται τρίγωνον ἑκάστην ἔχον πλευρὰν ἑκάστης μείζονα.*

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ βάσις ἐφ' ἑκάτερα μέρη, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, τῇ δὲ ΑΓ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ περὶ τὴν ΔΕ εὐθεῖαν τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν τὸ Θ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΘ τῆς ΒΑ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΑΓ μείζων. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΒΓ μείζων· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΘΖ ΖΗ ΗΘ κατὰ μίαν μείζονές εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμ-

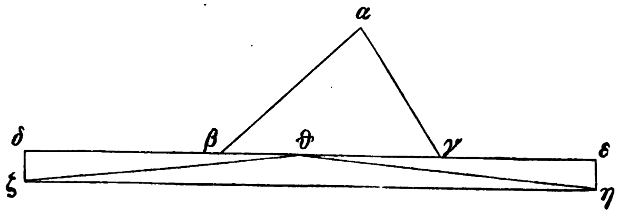
---

2. τῶν $\overline{\text{ΑΒΒΓ}}$ A, distinx. BS 4. τὸ ὑπὸ $\overline{\text{ΔΕΘΚ}}$ ABS, corr. *Co* 5. τοῦ ΑΓ brevius pro τοῦ ΑΒΓ scriptor posuit et hic et paulo post 8. ἐπιζευχθεῖσαι AB cod. *Co*, ἐπιζευχθεῖσα Paris 2368 (επιζευχεῖσα S),

Sit enim parallelogrammum $\alpha\beta\gamma$, et sumatur $\varepsilon\delta$ multipla rectae $\alpha\beta$, et $\delta\zeta$ multipla $\beta\gamma$ secundum datos numeros, et rectae $\delta\varepsilon$ perpendicularis ducatur $\varepsilon\varkappa$, et punctum $\varkappa$ ita sumatur, ut rectangulum $\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\varkappa$ sit proposita pars parallelogrammi $\alpha\beta\gamma$, et per $\varkappa$ rectae $\delta\varepsilon$ parallela ducatur recta $\vartheta\varkappa\lambda$, et circa centrum δ describatur circumferentia $\zeta\eta\vartheta$, quae rectam $\vartheta\varkappa\lambda$ in puncto ϑ secet, et iunctae $\delta\vartheta$ parallela ducatur $\varepsilon\lambda$. Apparet autem ex constructione parallelogrammum $\delta\varepsilon\lambda\vartheta$ datam partem esse parallelogrammi rectanguli $\alpha\beta\gamma$, et singula eius latera singulorum *alterius laterum* multipla esse secundum propositos numeros.

XXXVIII. Rursus dato triangulo *aliud* minus triangulum, Prop. 41
cuius singula latera singulis *dati trianguli lateribus* maiora sint, invenitur *hoc modo*.

Sit enim triangulum $\alpha\beta\gamma$, et basis $\beta\gamma$ in utramque partem producatur, et ponatur $\beta\delta = \alpha\beta$, et $\gamma\varepsilon = \alpha\gamma$, et ex



recta $\delta\varepsilon$ construatur parallelogrammum $\delta\zeta\eta\varepsilon$ triangulo $\alpha\beta\gamma$ aequale, et in recta $\beta\gamma$ sumatur quodvis punctum ϑ, iunganturque $\vartheta\zeta$ $\vartheta\eta$. Et quia est $\beta\delta = \alpha\beta$, est igitur $\delta\vartheta > \alpha\beta$. Similiter etiam demonstrabimus esse $\vartheta\varepsilon > \alpha\gamma$. Sed est etiam $\zeta\eta > \beta\gamma$; ergo singulae $\vartheta\zeta$ $\zeta\eta$ $\eta\vartheta$ maiores sunt singulis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$. Sed quia parallelogrammum $\delta\zeta\eta\varepsilon$ et duplo

---

corr. *Co* 8. 9. δῆλονότι ἐκ A(BS), corr. *Hu* 10. τὸ δοθὲν *Co* pro τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου] παραλληλογράμμου coni. *Co* (conf. tamen ind. sub χωρίον) 13. *ΔΗ* A¹ in marg. (BS) ἐλάσσον B, ἐλάσσων AS τριγώνου S 14. ἑκάστην B¹, ἑκάστης AB³S πλευρᾶς ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 24. τῶν *ΑΒΒΓΓΑ* A, distinx. BS *μον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗΘ τριγώνου, ἀλλὰ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ τὰς ἐλάσσονας ἔχον πλευρὰς τοῦ ΖΗΘ.*

74 *λϑ'. Τοῦτο μὲν ἐν τοῖς παραδόξοις φέρεται, γένοιτο δ' ἂν παραδοξότερον, εἰ τὸ μὲν τρίγωνον αὐτὸ εὑρεθείη μέρος τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἑκάστη δὲ πλευρὰ ἑκάστης πολλαπλασία κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς [ὡς ἐπὶ τοῦ παραλληλογράμμου προείρηται]* ἢ καὶ μείζων ἢ πολλαπλασία.

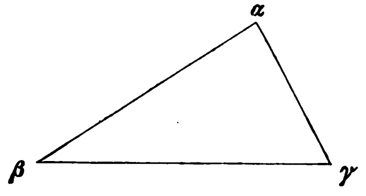
Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ συνεστάτω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἑκάστην πλευρὰν ἔχον ἑκάστης τῶν τοῦ ΑΒΓ πλευρῶν πολλαπλασίαν κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς [ἢ καὶ μείζονας ἢ πολλαπλασίας], καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ μὲν τοῦ Ε περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΕΘΚ, διὰ δὲ τοῦ Ζ περιφέρεια ἡ ΖΛΜ, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΗΜ, καὶ κάθετος ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΗΝ, καὶ ἔστω τὸ ἐπιταχθὲν μέρος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ ὑπὸ ΚΜ ΗΠ [τοῦτο γὰρ προδέδεικται], καὶ τῇ ΚΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΠΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ ΗΛ. φανερὸν οὖν ἐκ τῆς κατασκευῆς ὅτι τὸ ΘΗΛ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ληφθέντος μέρους τοῦ ΑΒΓ (ἐλάσσων γὰρ ἡ ΘΛ τῆς ΚΜ), ἑκάστη δὲ αὐτοῦ πλευρὰ ἑκάστης τῶν τοῦ ΑΒΓ ἢ πολλαπλασία ἢ καὶ *μείζων ἢ πολλαπλασία κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς (μείζων γὰρ ἡ ΘΛ τῆς ΕΖ).*

---

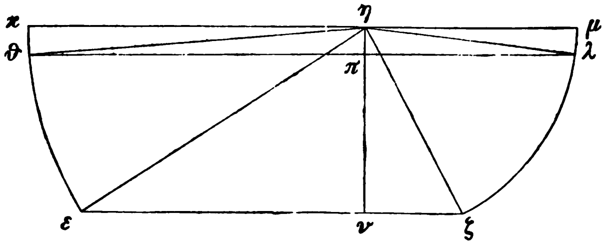
5. $\overline{\Delta\Theta}$ A[1] in marg. (B), om. S 7. *δοθέν* in A extremum est fol. 24; sequitur rasura versuum duorum et dimidii, tum initio fol. 25 *τος τριγώνου* cet. 8. 9. *ὡς — προείρηται* interpolatori tribuit et *η καὶ — πολλαπλασία* add. *Hu* 10. *τὸ* $\overline{AB\Gamma}$ A[1] ex *τὸ* $\overline{\Delta{*}\Gamma}$ 12. 13. *ἢ καὶ — πολλαπλασίας* del. *Hu* (scilicet haec ex margine prave huc irrepsisse videntur, postquam paulo supra incuria omissa sunt) 18. *τὸ* (ante *ὑπὸ*) V *Co* pro *τοῦ* *τοῦτο γὰρ προδέδεικται*] "nos consulto omisimus; neque enim hoc a Pappo ante demonstratum est, sed ex elementis petitur" *Co* 21. *ἢ* add. cod. Paris. 2368 S 23. *ἢ πολλαπλασία ἢ καὶ* add. *Hu* (paulo aliter *Co*: *ἑκάστης τῶν τοῦ ΑΒΓ ἢ πολλαπλασία κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἢ μείζων ἢ πολλαπλασία*)

maius est quam triangulum $\vartheta\zeta\eta$ et aequale triangulo $\alpha\beta\gamma$, est igitur triangulum $\alpha\beta\gamma$, quod quidem minora latera habet, maius quam triangulum $\vartheta\zeta\eta$, *cuius singula latera maiora sunt.*

XXXIX. Hoc quidem inter admirabilia numeratur; multo Prop. 42 autem magis mirum fiat, si ipsum quidem triangulum inveniatur pars esse dati trianguli, singula autem eius latera multipla singulorum *dati trianguli laterum* secundum datos numeros [sicut de parallelogrammo supra (*propos. 40*) demonstratum est] vel etiam maiora quam multipla.



Sit enim triangulum $\alpha\beta\gamma$, et construatur triangulum $\eta\varepsilon\zeta$, cuius singula latera singulorum $\alpha\beta\gamma$ trianguli laterum multipla sint secundum datos numeros, et circa centrum η per ε describatur circumferentia $\varepsilon\vartheta\varkappa$, et per ζ circumferentia $\zeta\lambda\mu$, et per η rectae $\varepsilon\zeta$ parallela



ducatur $\varkappa\eta\mu$, et a puncto η ad rectam $\varepsilon\zeta$ ducatur perpendicularis $\eta\nu$, et *in ea punctum* π *ita sumatur, ut* rectangulum $\varkappa\mu \cdot \eta\pi$ sit proposita pars trianguli $\alpha\beta\gamma$, et rectae $\varkappa\mu$ parallela ducatur $\vartheta\pi\lambda$, iunganturque $\eta\vartheta$ $\eta\lambda$. Apparet igitur ex constructione triangulum $\vartheta\eta\lambda$ minus esse quam dimidium propositae partis trianguli $\alpha\beta\gamma$ (est enim $\vartheta\lambda$ minor quam $\varkappa\mu$, *ideoque triangulum* $\vartheta\eta\lambda$ *minus quam dimidium rectanguli* $\varkappa\mu \cdot \eta\pi$), singula autem eius latera multipla sunt singulorum trianguli $\alpha\beta\gamma$ *laterum* secundum datos numeros vel etiam maiora quam multipla (est enim $\vartheta\eta = \varepsilon\eta$, *et* $\eta\lambda = \eta\zeta$, *et* $\vartheta\lambda > \varepsilon\zeta$).

75 *μʹ. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐγγράψαι τὰ πέντε πολύεδρα, προγράφεται δὲ τάδε.*

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ *ΑΒΓ*, οὗ διάμετρος ἡ *ΑΓ* καὶ κέντρον τὸ *Δ*, καὶ προκείσθω εἰς τὸν κύκλον ἐμβαλεῖν εὐθεῖαν παράλληλον μὲν τῇ *ΑΓ* διαμέτρῳ, ἴσην δὲ τῇ δοθείσῃ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς *ΑΓ* διαμέτρου.

Κείσθω τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ἴση ἡ *ΕΔ*, καὶ τῇ *ΑΓ* διαμέτρῳ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ *ΕΒ*, τῇ δὲ *ΑΓ* παράλληλος ἡ *ΒΖ*, ἥτις ἴση ἔσται τῇ δοθείσῃ· διπλῆ γάρ ἐστιν τῆς *ΕΔ* (ἐπεὶ καὶ ἴση τῇ *ΕΗ*, παραλλήλου ἀχθείσης τῆς *ΖΗ* τῇ *ΒΕ*).

76 *μαʹ*. Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ *ΑΚΔ ΒΕΖΓ*, ἡ δὲ διὰ τῶν *Β Γ* ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔστω τοῦ κύκλου, καὶ προκείσθω ἀγαγεῖν διάμετρον τοῦ *ΑΚΔ* κύκλου παράλληλον τῇ ἐπὶ τὰ *Β Γ* διαμέτρῳ.

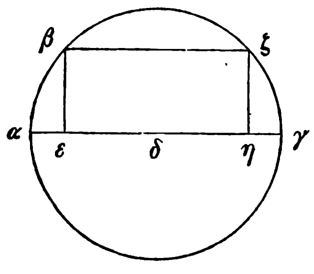
Ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν *Β Γ* σημείων ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ποιήσει τομὴν *ΑΒΓΔ* μέγιστον κύκλον· ὁ *ΑΒΓΔ* ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν καὶ δίχα τεμεῖ καὶ τὸν *ΑΚΔ*. ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ *Α Δ* ἐπιζευγνυμένη διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ ἐπὶ τὰ *Β Γ*. ἔστι δὲ φανερόν· τετμήσθω γὰρ ἡ *ΒΓ* περιφέρεια δίχα τῷ *Θ* σημείῳ· ἐπεὶ οὖν ἡ *ΘΑ* τῇ *ΘΔ* ἴση ἐστὶν (ἐκ πόλου γάρ), ὧν ἡ *ΘΒ* τῇ *ΘΓ*, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ *ΑΒ* λοιπῇ τῇ *ΓΔ* ἐστὶν

---

1. *$\overline{M}$* A[1] in marg. (BS) *τὰ πέντε Hu*, *τε* A (fuit igitur in archetypo *τὰ $\bar{ε}$*), *τὲ* B, *τὰ* S 2. *τάδε* et 3. *Ἔστω* add. *Co* 5. *τὴν $\overline{ΑΓ}$ διαμέτρωι* AB, corr. S 7. *ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης Co* pro *δοθείσῃ* 8. post *ἤχθω* add. A *ἡ*, sed del. prima m. 10. *ἐπεὶ* add. *Hu* 12. *$\overline{ΜΑ}$* A[1] in marg. (BS) 13. *$\overline{ΒΕ}$ $\overline{ΖΓ}$* ABS, coniunx. *Co* *τῶν $\overline{ΒΓ}$* AS, distinx. B, item vs. 15 16. *ἐκβεβλήσθω* A, sed litterarum *εκβεβλ* incerta tantum vestigia comparent, ...*μήσθω* B, ...*κείσθω* S *σημεῖον* AB, corr. S 17. *τὸ μὲν $\overline{ΑΒΓΔ}$ μέγιστος κύκλος* ABS, corr. *Co Sca* 18. *πολλῶν* A Paris. 2369 cod. *Co*, corr. BS *Co* 19. *τεμεῖ Hu* pro *τέμνει* *τὰ $\overline{ΑΔ}$* A *Co Sca*, *τὰ $\bar{β}$* B[1], *τὰ $\bar{α}$ $\bar{β}$* B[3], *τὰ $\overline{αβ}$* S cod. *Co* 20. *παράλληλος* add. *Co Sca* *τὰ $\overline{ΒΓ}$* AS, distinx. B *ἔστι δὲ* add. *Co* 22. *ἴση* add. *Co* *ἐκπολλῶν* A(BS), *ἐκ πόλων* coni. *Co*, corr. *Co Sca* 23. *ὧν ἡ Hu*, *ων* A, *ὢν* B, *ὧν* S *καὶ λοιπῆι ἄρα* A, corr. BS

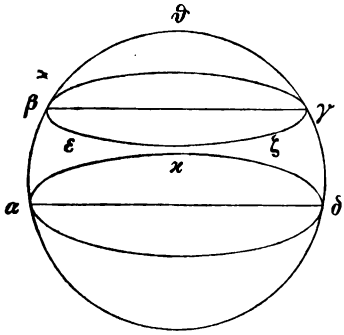
In datam sphaeram quinque polyedra inscribantur [1]; praemittuntur autem haec.

XL. Sit in sphaera circulus $\alpha\beta\gamma$, cuius diametrus $\alpha\gamma$ et centrum δ, et propositum sit in circulo construere rectam diametro $\alpha\gamma$ parallelam et aequalem datae *cuidam*, quae non sit maior quam $\alpha\gamma$ diametrus. Prop. 43



Ponatur $\varepsilon\delta$ aequalis dimidiae datae, et diametro $\alpha\gamma$ perpendicularis ducatur $\varepsilon\beta$, et eidem $\alpha\gamma$ parallela $\beta\zeta$, quae datae aequalis erit; est enim dupla $\varepsilon\delta$ (quoniam aequalis est rectae $\varepsilon\eta$, siquidem $\zeta\eta$ rectae $\beta\varepsilon$ parallela ducta sit).

XLI. Sint in sphaera paralleli circuli $\alpha\varkappa\delta$ $\beta\varepsilon\zeta\gamma$, et recta per β γ ducta circuli diametrus sit, et propositum sit diametrum circuli $\alpha\varkappa\delta$ parallelam rectae $\beta\gamma$ ducere. Prop. 44



Ducatur per puncta β γ planum circulo perpendiculare, quod sectionem efficiet maximum circulum $\alpha\beta\gamma\delta$; ergo circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ per polos circulorum $\beta\varepsilon\zeta\gamma$ $\alpha\varkappa\delta$ transibit et circulum quoque $\alpha\varkappa\delta$ bifariam secabit (*Theodos. sphaer.* *1, 13*). Recta igitur quae inter α δ iungitur diametrus est ipsi $\beta\gamma$ parallela. Et hoc quidem manifestum est. Circumferentia enim $\beta\gamma$ bifariam secetur in puncto ϑ. Iam quia circumferentia $\vartheta\alpha$ circumferentiae $\vartheta\delta$ aequalis est (nam *utraque* ex polo *ad diametrum pertinet*), et $\vartheta\beta$ aequalis $\vartheta\gamma$, per sub-

1) Hoc quartum est ex problematis principalibus quae Pappus hoc libro tractavit: vide supra p. 31 adnot. 1. Quod autem τὰ πέντε πολύεδρα, i. e. quinque illa polyedra regularia quae vulgo Platonica vocantur, correximus, satis est Platon. Tim. p. 55 et Eucl. elem. 13 propos. 13—18 citare.

ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ἐπὶ τὰ Α Δ διάμετρος τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ διαμέτρῳ.

77 Ἔστω δὲ ἡ ἐπὶ τὰ Ε Ζ μὴ διάμετρος καὶ προκείσθω διάμετρον ἀγαγεῖν τοῦ ΑΚΔ κύκλου παράλληλον τῇ ἐπὶ τὰ Ε Ζ.

Κείσθω τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ἡμικύκλιον τῆς ΕΖ περιφερείας ἑκατέρα τῶν ΕΒ ΖΓ ἴση, καὶ διὰ τῶν Β Γ γεγράφθω ὁμοίως μέγιστος ὁ ΑΒΓΔ· ἔσται ἄρα ἡ ἐπὶ τὰ Α Δ διάμετρος τοῦ ΑΚΔ κύκλου παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ε Ζ, ὅτι καὶ αὐτὴ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ.

78 μβ΄. Ἔστωσαν ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΕ ΓΖ, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις διήχθωσαν αἱ ΑΒ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ διὰ τῶν ΑΕ ΓΖ ἐκβαλλομένου ἐπιπέδου ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ ΒΑΕ ΔΓΖ· ὅτι καὶ αἱ ΑΒ ΓΔ παράλληλοί εἰσι, τουτέστιν ὅτι ἐκβληθὲν τὸ διὰ τῶν Β Α Γ σημείων ἐπίπεδον ποιεῖ ἐν τῷ διὰ τῶν Δ Γ Ζ ἐπιπέδῳ τὴν ΓΔ.

Εἰ γὰρ ἑτέραν ποιήσει ἐκεῖ, περιέξει μετὰ τῆς ΓΖ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ.

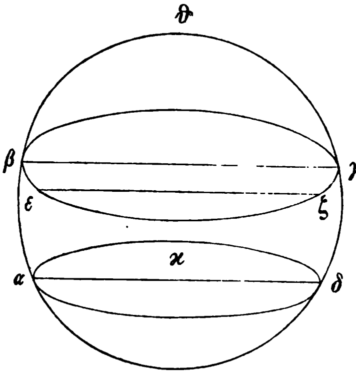
79 μγ΄. Ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις κύκλοι ὦσιν [ὡς ὑπογεγραμμένοι], καὶ ἐν αὐτοῖς παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Ε Ζ κέντρων ὅμοια τμήματα κύκλων ἀπολαμβάνουσαι, παράλληλος ἔσται ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ.

---

1. 2. τὰ ΑΔ — τὰ ΒΓ AS, distinx. B, et similiter posthac cap. 77 2. διάμετρος S pro διαμέτρωι 3. προσκείσθω AS, corr. B 4. παράλληλον A[s], παράλληλος BS 8. ὁ ΑΒ ΓΔ A, coniunx. BS, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ coni. *Co* 10. αυτὴν παραλληλας A(B), αὐτὴν παράλληλος S, αὐτὴ corr. *Co Sca* 11. ΜΒ A[1] in marg. (BS) 12. αἱ ΑΕΓΖ — 13. αἱ ΑΒΓΔ et τῶν ΑΕΓΖ A, distinx. BS 14. ἐπιπέδων ABS, corr. *Co* 16. διὰ τῶν ΑΒΓ ABS, corr. *Co* 17. διὰ τῶν Δ Γ Ζ add. *Hu* 18. Εἰ *Co* pro ἐπεὶ 18. 19. τῆς ΓΔ γωνίας ἴσον τῆι ὑπὸ ΒΑΓ ABS, corr. *Co* 19. ἀδύνατον add. *Hu*, ἄτοπον *Co* 20. ὑποκείσθω ABS, corr. *Co Sca* 21. ΜΓ A[1] in marg. (BS) ἐν add. *Hu* auctore *Co* 22. ὡς ὑπογεγραμμένοι del. *Hu* 23. αἱ ΑΒΓΔ — τῶν ΕΖ A, distinx. BS 25. ἡ μὲν ΑΘ τῆι ΓΖ ἡ δὲ ΒΗ ABS, corr. *Co*

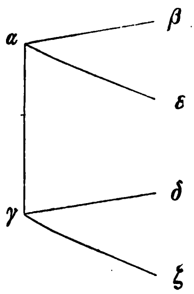
tractionem igitur est $\alpha\beta$ aequalis $\gamma\delta$; ergo diametrus $\alpha\delta$ diametro $\beta\gamma$ parallela est.

Sed sit *in circulo* $\beta\varepsilon\zeta\gamma$ recta *quaevis* $\varepsilon\zeta$, quae non sit diametrus, et propositum sit diametrum circuli $\alpha\varkappa\delta$ ducere parallelam rectae $\varepsilon\zeta$. Prop. 45



Sumatur differentia semicirculi et circumferentiae $\varepsilon\zeta$, ac dimidiae differentiae aequalis ponatur et $\varepsilon\beta$ et $\zeta\gamma$, et per $\beta\gamma$ similiter describatur maximus circulus $\alpha\beta\gamma\delta$; erit igitur circuli $\alpha\varkappa\delta$ diametrus $\alpha\delta$ parallela rectae $\varepsilon\zeta$, quoniam haec ipsa parallela est diametro $\beta\gamma$.

XLII. Sint in planis parallelis rectae parallelae $\alpha\varepsilon$ $\gamma\zeta$, et in eisdem planis ducantur rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ ad easdem partes plani per $\alpha\varepsilon$ $\gamma\zeta$ producti, quae angulos $\beta\alpha\varepsilon$ $\delta\gamma\zeta$ aequales faciant; dico rectas $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ inter se parallelas esse, id est, planum per puncta β α γ transiens in plano $\delta\gamma\zeta$ facere *sectionem* $\gamma\delta$. Prop. 46



Nam si in plano $\delta\gamma\zeta$ aliam *sectionem* faciet, cum recta $\gamma\zeta$ continebit angulum aequalem angulo $\beta\alpha\varepsilon$, id quod fieri non potest; nam ex hypothesi angulus $\beta\alpha\varepsilon$ angulo $\delta\gamma\zeta$ aequalis est.

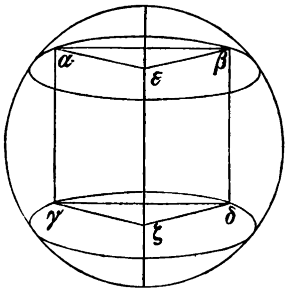
XLIII. Hinc manifestum est, si in parallelis planis circuli sint, et in his parallelae rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$, quae ad easdem partes centrorum ε ζ similia segmenta abscindant, parallelam esse rectam $\alpha\varepsilon$ ipsi $\gamma\zeta$, et $\beta\varepsilon$ ipsi $\delta\zeta$. Prop. 47

Ἴσαι γὰρ γίνονται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τμημάτων αἵ τε Α Γ καὶ αἱ Β Δ γωνίαι [ἴσαι ἀλλήλαις], καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

80 *μδ΄. Ἂν δὲ αἱ τὰ ὅμοια τῶν τμημάτων κύκλων ἀπολαμβάνουσαι παράλληλοι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων ὦσιν, αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπὶ τὰ μὴ ὁμοίως κείμενα πέρατα τῶν παραλλήλων ἐπιζευγνύμεναι παράλληλοι ἔσονται.*

Δείκνυται γὰρ καὶ ὁμοίως ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς.

81 *με΄. Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ* ἴσοι καὶ *παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων ἴσαι καὶ παράλληλοι* αἱ ΑΒ ΓΔ· *ὅτι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα αὐτῶν τὰ Α Γ, Β Δ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι καὶ ὀρθαὶ πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα.*

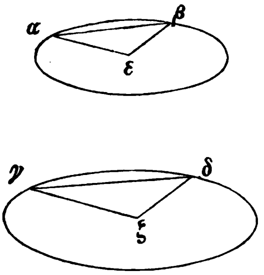


Ἔστι δὲ φανερὸν ἐκ τῶν προδεδειγμένων· ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΕ ΓΖ παράλληλοι ἔσονται. καὶ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις· ὥστε καὶ αἱ ΑΓ ΕΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὁμοίως καὶ αἱ ΕΖ ΒΔ. καὶ ἔστιν ἡ ΕΖ ὀρθὴ πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα (περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν, καὶ ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν ἀγομένη ὀρθή ἐστιν πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται, ὡς ἔστιν ἐν σφαιρικοῖς)· καὶ αἱ ΑΓ ΒΔ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι καὶ *ὀρθαί εἰσι πρὸς τοὺς κύκλους.*

82 *μϛ΄. Μὴ ἔστωσαν δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων*

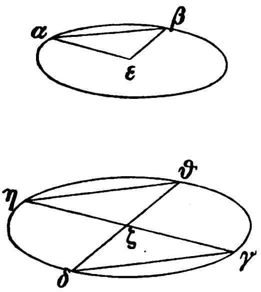
---

1. 2. *αἵ τε Hu* pro *ἔσται* 2. *ΑΓ* ABS, distinx. *Co* *καὶ αἱ ΒΔ* AB[1]S, distinx. B[3] *ἴσαι ἀλλήλαις* del. *Hu* 3. *αἱ ΑΒΓΔ* A, distinx. BS 4. *ΜΔ* A[1] in marg. (BS) *δὲ αἱ Hu* auctore *Co* pro *δ' ἐπὶ* 10. *ΜΕ* A[1] in marg. (BS) *ἴσοι καὶ* add. *Co* 12. *αἱ ΑΒ ΓΔ* add. idem 13. *τὰ ΓΗ αἱ ΑΓ ΒΔ* ABS, *ΓΗ αἱ* del. *Co* 25. *ἑκατέραν* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 27. *παράλληλοι καὶ* add. *Co* 28. *τοῖς κύκλοις* ABS, corr. *Hu* (nam *τοὺς κύκλους* recte dici vi-



Nam propter similitudinem segmentorum angulus α angulo γ, et angulus β angulo δ aequales et *ex hypothesi* rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ parallelae sunt in parallelis planis; *ergo propter superius lemma efficitur id quod propositum est.*

XLIV. Sin vero rectae parallelae quae similia circulorum segmenta abscindunt non ad easdem centrorum partes sint, radii *in alterutro circulo* ad oppositas circumferentiae partes producti paralleli erunt *radiis alterius circuli.* Prop. 48



Hoc enim demonstratur similiter atque ad superiorem figuram.

XLV. Sint in sphaera circuli aequales et paralleli $\alpha\beta$ $\gamma\delta$, et ad easdem partes centrorum aequales et parallelae rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$; dico rectas quae earum terminos α γ, β δ coniungunt aequales et parallelas esse et perpendiculares ad circulorum plana. Prop. 49

Est autem manifestum ex iis quae modo demonstrata sunt. Iunctae enim rectae $\alpha\varepsilon$ $\gamma\zeta$ parallelae erunt (*propos. 47*). Et sunt inter se aequales (*quia ex centris sunt*), ita ut etiam rectae $\alpha\gamma$ $\varepsilon\zeta$ aequales et parallelae sint. Similiter etiam rectae $\varepsilon\zeta$ $\beta\delta$. Et est $\varepsilon\zeta$ perpendicularis ad circulorum plana (nam circa eosdem polos sunt, et recta per polos eorum ducta perpendicularis est ad utrumque ac per centra et ipsorum et sphaerae transibit, ut est in *Theodosii* sphaericis *2, 1. 1, 10*); ergo etiam rectae $\alpha\gamma$ $\beta\delta$ aequales sunt et parallelae et perpendiculares ad circulorum *plana.*

XLVI. Sed non sint ad easdem partes centrorum aequa- Prop. 50

---

detur pro τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, quod supra legitur) 29. $\overline{M\varsigma}$ A[1] in marg. (BS) *αἱ ἴσαι* καὶ *παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ· ὅτι* αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα αὐτῶν τὰ Α Δ, Β Γ *ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.*

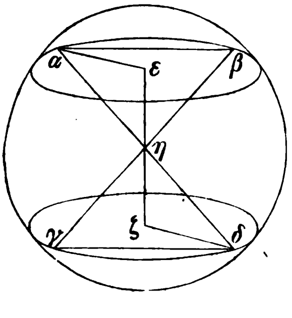
Τεμνέτωσαν γὰρ ἀλλήλας κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα αἵ τε ΑΕ ΕΗ καὶ αἱ ΔΖ ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΔ ΒΓ, αἱ δ' ἄρα αἱ ΑΗ ΗΔ ΒΗ ΗΓ *ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· τοῦτο γὰρ φανερόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ* ΑΔ τῇ ΒΓ ἴση *ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση [ἐκ κέντρου τῶν ἴσων κύκλων]. ἔστι δὲ καὶ [αὐτῇ παράλληλος] ἴση μὲν ἡ ὑπὸ ΕΑΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἐναλλάξ, ἡ δὲ ΑΗ βάσις τῇ ΗΔ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΔΗΖ. κοινῆς προστεθείσης τῆς ὑπὸ ΕΗΔ γίνονται αἱ ὑπὸ ΑΗΕ ΕΗΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι οὖσαι, ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΖ* ἴσαι *[ὥστε καὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι]· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ. καὶ ἴση ἐδείχθη ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τῆς σφαίρας διὰ τὸ ἴσους ὑποκεῖσθαι τοὺς κύκλους· διάμετροι ἄρα τῆς σφαίρας αἱ ΑΔ ΒΓ, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις.*

83 *Ἂν δ' ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ ΒΔ, ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις τε καὶ ὀρθὰς μετὰ τῶν ΑΒ ΓΔ περιέξουσιν γωνίας.*

Τῇ γὰρ ΓΔ ἴσης καὶ παραλλήλου ἐφαρμοσθείσης τῆς ΘΗ, ἔσται ἡ ΘΗ ὀρθὴ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΘΓ ΑΘ, καὶ πρὸς τὸ αὐτῶν ἐπίπεδον, ὥστε καὶ ἡ ΓΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί.

1. *καὶ* add. *Hu* auctore *Co* 1. 2. *αἱ — Α Δ, Β Γ* add. *Hu* partim auctore *Co* 5. *ΕΗ καὶ Co* pro *ΕΝ καὶ* 7. *αἱ Δ ἄρα* | /////////////// *ἴσαι* Α, et hinc lacunae in BS, *erunt rectae lineae βη ηγ inter se aequales Co, αἱ* post *ἄρα* add. B³, reliqua corr. *Hu* 8. *φανερόν Co* pro *μικρόν* *ὥστε καὶ* | *η* ///////////// *εστιν* Α, eaedemque lacunae in BS, *ὥστε καὶ ἡ δη τῇ ... ἴση ἐστιν* B³, *ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΑ ἴση ἐστι Co,* corr. *Hu* 9. *ἐκ — κύκλων* interpolatori tribuit *Hu* 10. *αυτη παράλληλος* A, *αὔτη παράλληλος* B, del. *Hu* *ἡ* add. *Hu* 11. *τῆι ὑπὸ ΗΖΔ* ABS, corr. *Co Sca* *ἡ δὲ ΑΗ Hu* pro *ἡ δὲ ΕΗ* (*basis εη basi ηζ Co*) *βάσις Hu* auctore *Co* pro *βάσει* 14. *ἴσαι* add. et *ὥστε* — 15. *εἶναι*, manifestum interpretamentum, del. *Hu* 15. *ΕΗΔ* (ante *ΔΗΖ δυσὶν*) *Co* pro *ΕΔΗ* 16. *ἡ ΕΗ Co* pro *ἡ ΕΝ* 20. *αἱ ΑΓΒΔ* A, distinx. BS 21. *ἴσαι — τῶν ΑΒ ΓΔ* om. A¹, add. A² in marg.

les et parallelae rectae $\alpha\beta$ $\gamma\delta$; dico rectas quae terminos earum α δ, β γ coniungunt et inter sese et diametro sphaerae aequales esse.

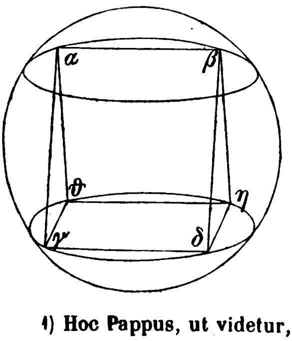


Secent enim inter se in puncto η, et ad centra ducantur $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\eta$ et $\delta\zeta$ $\zeta\eta$. Quoniam *ex hypothesi* $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ aequales inter se *et parallelae et in planis circulorum aequalium et parallelorum* sunt, easque rectae $\alpha\delta$ $\beta\gamma$ coniungunt, quattuor igitur rectae $\alpha\eta$ $\eta\delta$ $\beta\eta$ $\eta\gamma$ aequales sunt inter sese; hoc enim manifestum est; ergo etiam $\alpha\delta$ $\beta\gamma$ aequales sunt. Sed est etiam $\alpha\varepsilon$ aequalis $\delta\zeta$, et, *quoniam propter propos. 48 parallelae sunt* $\alpha\varepsilon$ $\delta\zeta$, angulus $\varepsilon\alpha\eta$ aequalis angulo $\eta\delta\zeta$, et, *ut modo significavimus*, basis $\alpha\eta$ ipsi $\eta\delta$ aequalis; ergo *et recta* $\varepsilon\eta$ *rectae* $\eta\zeta$ *et* angulus $\alpha\eta\varepsilon$ angulo $\delta\eta\zeta$ aequalis est. Communi apposito angulo $\varepsilon\eta\delta$ fiunt

$$\angle\, \alpha\eta\varepsilon + \angle\, \varepsilon\eta\delta = \angle\, \varepsilon\eta\delta + \angle\, \delta\eta\zeta.$$

Sed *ex constructione* anguli $\alpha\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\delta$ duobus rectis aequales sunt; ergo $\varepsilon\eta$ $\eta\zeta$ in eadem recta sunt. Et demonstrata est recta $\varepsilon\eta$ aequalis ipsi $\eta\zeta$; ergo, quia ex hypothesi circuli $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ aequales sunt, punctum η centrum sphaerae est[1]; ergo $\alpha\delta$ $\beta\gamma$ diametri sphaerae sunt eaedemque inter se aequales.

Si vero ad easdem partes iungantur rectae $\alpha\gamma$ $\beta\delta$, hae Prop. 51
et inter se aequales erunt et cum $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ rectos angulos continebunt.



Rectae enim $\gamma\delta$ aequalis et parallela *in plano circuli* $\gamma\delta$ construatur $\vartheta\eta$; erit igitur $\vartheta\eta$ perpendicularis et ad $\vartheta\gamma$ (*propos. 52*) et ad $\vartheta\alpha$ (*propos. 49 vel 52*); ergo etiam ad planum $\alpha\vartheta\gamma$ (*elem. 11, 4*); itaque etiam recta $\gamma\delta$ *ad idem planum perpendicularis est* (*elem. 11, 8*); rectus igitur est angulus $\alpha\gamma\delta$, itemque reliqui.

1) Hoc Pappus, ut videtur, effici voluit ex Theodosii sphaer. 1, 6 et 7.

(BS) 23. τῆι γὰρ AB, corr. S 24. ἡ *ΘH Co* pro ἡ $\overline{ΘK}$ τῶν $\overline{ΘΓ}$ $\overline{ΑΓ}$ ABS, τῶν *ΗΓ ΗΑ Co*, corr. *Hu* (mutatis scilicet inter se figurae litteris Θ et *H*) 25. αὐτῶν B[1], ἑαυτῶν AB[3]S

84 *μζʹ. Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ τὰ ὁμοταγῆ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις· ἂν δὲ καὶ ἴσαι ὦσιν αἱ παράλληλοι, καὶ αὗται παράλληλοι ἔσονται καὶ ὀρθαὶ πρὸς τὰς ὑποκειμένας παραλλήλους.*

Ἔστιν δὲ φανερόν· ἐκβληθέντος γὰρ τοῦ διὰ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδου γίνεται κύκλος ἐν ᾧ εἰσιν αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλους ἀνιούσας τραπέζιον ποιήσουσιν· ἂν δὲ καὶ ἴσαι ὦσιν αἱ παράλληλοι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς οὐκέτι τραπέζιον ἀλλὰ τετράγωνον ἢ *ἑτερόμηκες περιέξουσιν.*

85 *Ἔστωσαν ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ ΒΓ εὐθεῖαι ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῆς ΔΒΕ ἐν τῷ αὐτῷ κειμένης ἐπιπέδῳ, καὶ ἐφεστάτω ἡ ΒΖ μεθ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσας περιέχουσα γωνίας· ὅτι ὀρθή ἐστιν τῇ ΔΕ.*

Ἤχθω ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἡ *ΖΗ, καὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ αἱ ΗΓ ΗΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ* ΑΖ ΖΓ ΗΒ· αἱ ΑΖ ΖΓ ἄρα ὀρθαὶ ἔσονται *ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ. καὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι* τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒΖ ΓΒΖ *γωνίας ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ ΖΑ ΖΓ, καὶ ΗΑ ΗΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ὅλῃ· κάθετος ἄρα ἡ ΗΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΖΒ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.*

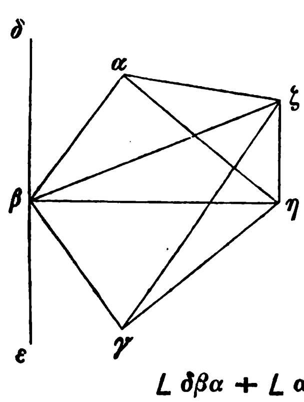
---

1. $\overline{MZ}$ A[1] in marg. (BS) 2. post *πέρατα* repetunt *τὰ* AS, del. B 9. *τραπεζειον* A(B[1]), corr. B[2]S, item vs. 10 10. *παραλλήλοις ἐπιζευγνύουσαι* AB, *παράλληλοι* corr. S, *αἱ* restituit *Hu* 11. *τετράγωνον ἢ* add. *Co* 16. *ἐπεὶ* AB, corr. S *ἐπι*////// /////// / | $\overline{ZH}$ A, *ἐπίπεδον* .... $\overline{\zeta\eta}$ BS, *κάθετος ἡ* add. *Sca*, *ὀρθὴ ἡ Co* 17. *τὰς* $\overline{ABB\Gamma}$ A, distinx. BS 17—20. *ἐπιζευχθ*/////////////// | *ἔσονται ἐπὶ τὰς* $\overline{ABB\Gamma}$ *καὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι* ////////////////// | *ας ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ* $\overline{AB}$ $\overline{B\Gamma}$ A (et similiter cum lacunis BS), *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα ζγ ηβ. αἱ* $\overline{\zeta\alpha}$ $\overline{\zeta\gamma}$ *ἄρα ὀρθαὶ ἔσονται ἐπὶ τὰς* $\overline{\alpha\beta}$ *βγ ὡς ἐδείχθη ἐν τοῖς ὀπτικοῖς. καὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ τῶν αβζ γβζ γωνίας* cet. *Sca*, *iunganturque ζα ζγ ηβ. erunt ζα ζγ ad αβ βγ perpendiculares. et cum anguli αβζ γβζ sint aequales* cet. *Co* 22. *ὑποκείσθω* ABS, *ponitur Co*, corr. *Hu* 24. *ἐπὶ τῆι* $\overline{\Delta E}$ ABS, corr. *Hu*

XLVII. Si sint in sphaera rectae parallelae, rectae terminos earum ex iisdem partibus coniungentes aequales inter se erunt; si vero parallelae etiam aequales sint, hae quoque *quae ipsas coniungunt* parallelae erunt et perpendiculares ad illas parallelas. Prop. 52*)

Hoc quidem manifestum est. Nam ducto per parallelas plano fit circulus in quo sunt eae ipsae parallelae, et quae eas coniungunt rectae cum illis initio constructis parallelis trapezium efficient; sin autem parallelae etiam aequales sint, rectae eas coniungentes non iam trapezium, sed quadratum vel oblongum continebunt.

Sint in plano subiecto rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ eaeque cum recta $\delta\beta\varepsilon$, quae in eodem plano sit, aequales angulos efficiant, et *ad planum inclinata* erigatur $\beta\zeta$ cum utraque rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ aequales angulos efficiens; dico $\beta\zeta$ ipsi $\delta\varepsilon$ perpendicularem esse. Prop. 53



Ducatur *a puncto* ζ ad planum subiectum perpendicularis $\zeta\eta$, et ad rectas $\beta\alpha$ $\beta\gamma$ perpendiculares $\eta\alpha$ $\eta\gamma$, et iungantur $\alpha\zeta$ $\zeta\gamma$ $\eta\beta$; rectae igitur $\zeta\alpha$ $\zeta\gamma$ perpendiculares erunt ad rectas $\alpha\beta$ $\beta\gamma$**). Et quia *ex hypothesi* anguli $\alpha\beta\zeta$ $\zeta\beta\gamma$ inter se aequales sunt, erunt etiam $\alpha\beta = \beta\gamma$, et $\zeta\alpha = \zeta\gamma$, et $\eta\alpha = \eta\gamma$, et $\angle\,\alpha\beta\eta = \angle\,\eta\beta\gamma$. Sed ex hypothesi etiam $\angle\,\delta\beta\alpha = \angle\,\varepsilon\beta\gamma$; ergo etiam

$$\angle\,\delta\beta\alpha + \angle\,\alpha\beta\eta = \angle\,\eta\beta\gamma + \angle\,\gamma\beta\varepsilon,$$

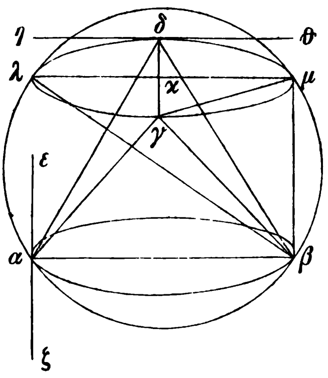
ideoque $\eta\beta$ perpendicularis est ad $\delta\varepsilon$. Sed *ex hypothesi* recta $\zeta\eta$ ad planum $\eta\delta\varepsilon$ perpendicularis est; *ergo etiam planum $\zeta\eta\beta$ ad planum $\eta\delta\varepsilon$ perpendiculare,* ideoque recta $\zeta\beta$ ad $\delta\varepsilon$ perpendicularis est.

*) Hanc propositionem Pappi collectioni posterior quidam scriptor inseruisse videtur.

**) "Quoniam enim $\zeta\eta$ perpendicularis est ad subiectum planum, etiam planum quod per $\eta\zeta$ $\zeta\alpha$ ducitur ad idem planum rectum erit (elem. 11, 18); ergo $\zeta\alpha$ ad $\alpha\beta$ est perpendicularis. Et eodem modo perpendicularis ostendetur $\zeta\gamma$ ad $\gamma\beta$" *Co.* Scaliger, quod adnotat ὡς ἐδείχθη ἐν τοῖς ὀπτικοῖς, Euclidis quae feruntur opticorum propositionis 37 scholion primum spectavisse videtur.

86 μη'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν πυραμίδα ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω καὶ ἔστω σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰ Α Β Γ Δ. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ· ἴσας δὴ περιέξει μετὰ τῶν ΑΓ ΑΔ γωνίας [ἑκατέραν διμοίρου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αὐταῖς οὖσα]. καὶ ἐφέστηκεν ἡ ΑΒ ἴσας ποιοῦσα μετὰ τῶν ΑΓ ΑΔ γωνίας· διὰ τὰ προδειχθέντα ἄρα ὀρθή ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ, καὶ ἐφάψεται τῆς σφαίρας. ἐὰν γὰρ ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΔΑ ΑΓ ἐπίπεδον, ποιήσει κύκλον, ἐν ᾧ



ἰσόπλευρον ἐγγεγράψεται τρίγωνον τὸ ΑΔΓ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ· ἐφάψεται ἄρα ἡ ΕΖ τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ τῆς σφαίρας. ἐκβληθὲν οὖν τὸ διὰ τῶν ΕΖ ΑΒ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσει τῆς σφαίρας κύκλον, οὗ διάμετρος ἔσται ἡ ΑΒ διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τῇ ΕΖ ἐφαπτομένῃ ὁμοίως. κἂν διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΗΘ, ἐφάψεται τῆς σφαίρας, καὶ ὀρθὴ αὐτῇ ἔσται ἡ ΓΔ. κἂν ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΗΘ ΓΔ ἐπίπεδον, κύκλον ποιήσει διάμετρον ἔχοντα τὴν ΓΔ ἴσον καὶ παράλληλον τῷ διάμετρον ἔχοντι τὴν ΑΒ· παράλληλοι γὰρ αἱ ΕΖ ΓΔ καὶ αἱ ΑΒ ΗΘ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ κέντρου τῇ ΓΔ ὀρθὴ ἡ ΛΜ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΑΒ. κἂν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΛ ΒΜ, ἡ μὲν ΒΜ ὀρθὴ ἔσται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ ΛΜ καὶ τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις, ἡ δὲ ΒΛ διάμετρος τῆς σφαίρας (προδέδεικται

1. μη' add. BS μυραμιδα A[1], πϋ superscr. A[2] 2. σημεῖον AB, corr. S γωνιῶν] ἐπ' AB, γωνιῶν ἐπ' S 3. τὰ $\overline{ΑΒ}$ $\overline{ΓΔ}$ A, distinx. BS 5. δὴ *Hu* pro δὲ 6. ἑκατέραν — 8. οὖσα interpolatori tribuit *Hu* 8. καὶ super vs. add. A[1] 9. ποιοῦσασ A, sed extremum σ expunxit prima man. 13. ἐφάψεται A[2] ex ἐφάψ**ται 20. τῆι σφαίραι A(BS), ἐν τῇ σφαίρᾳ voluit *Co*, corr. *Hu* 21. ἐφα-

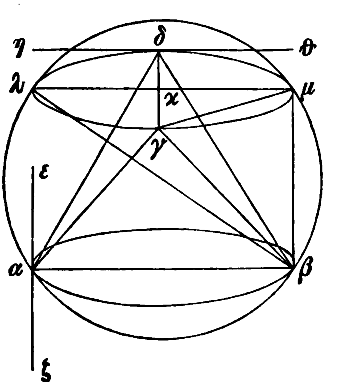
XLVIII. In datam sphaeram pyramis inscribatur. Prop. 54

Sit iam inscripta, et angulorum eius puncta in superficie sphaerae sint α β γ δ. Ducatur per α rectae $\gamma\delta$ parallela $\varepsilon\zeta$; haec igitur aequales angulos cum $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ continebit (*scilicet* utrumque duarum tertiarum recti, in eodem plano cum $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ posita). Et erecta est $\alpha\beta$ aequales angulos cum $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ (*scilicet utrumque duarum tertiarum recti*) faciens; ergo secundum ea quae supra (*propos. 53*) demonstrata sunt rectae $\alpha\beta$ perpendicularis est $\varepsilon\zeta$, et sphaeram tanget. Nam si planum quod per $\delta\alpha$ $\alpha\gamma$ transit producatur, efficiet circulum, in quo triangulum aequilaterum $\alpha\delta\gamma$ inscriptum erit, et *ex constructione* rectae $\gamma\delta$ parallela est $\varepsilon\zeta$; ergo $\varepsilon\zeta$ circulum tanget, ideoque etiam sphaeram[1]). Planum igitur per $\varepsilon\zeta$ $\alpha\beta$ productum sectionem sphaerae efficiet circulum, cuius diametrus est $\alpha\beta$ propterea quod $\alpha\beta$ perpendicularis est rectae $\varepsilon\zeta$, quae similiter *ac modo demonstratum est circulum quoque* $\alpha\beta$ tangit. Et si per δ rectae $\alpha\beta$ parallela ducatur $\eta\vartheta$, haec sphaeram tanget, eique perpendicularis erit $\gamma\delta$. Et si planum quod per $\eta\vartheta$ $\gamma\delta$ transit producatur, circulum efficiet, cuius diametrus est $\gamma\delta$, aequalem et parallelum ei qui diametrum $\alpha\beta$ habet; parallelae enim sunt et $\varepsilon\zeta$ $\gamma\delta$ et $\alpha\beta$ $\eta\vartheta$ *). Ducatur per centrum $\varkappa$ rectae $\gamma\delta$ perpendicularis $\lambda\mu$; haec igitur rectae $\alpha\beta$ parallela est. Et si iungantur $\beta\lambda$ $\beta\mu$, erit $\beta\mu$ perpendicularis et rectae $\alpha\beta$ et $\lambda\mu$ itemque circulorum $\alpha\beta$ $\gamma\lambda\delta\mu$ planis, et $\beta\lambda$ diametrus sphaerae (hoc enim

1) "Quoniam enim $\varepsilon\zeta$ parallela est ipsi $\gamma\delta$, si a puncto α ipsi $\varepsilon\zeta$ ad rectos angulos ducatur $\alpha\varkappa$, secabit ea $\gamma\delta$ bifariam atque ad angulos rectos et per centrum transibit, quare $\varepsilon\zeta$ circulum et propterea ipsam sphaeram contingat necesse est ex 16. tertii libri elementorum et 17. primi libri conicorum Apollonii" *Co.* De Apollonii quod citatur theoremate conferendus est Eutocii commentarius.

*) "Sequitur illud ex 15. undecimi elem.; etenim duae rectae lineae sese tangentes $\varepsilon\zeta$ $\alpha\beta$ duabus rectis lineis sese tangentibus $\gamma\delta$ $\eta\vartheta$ parallelae sunt et non in eodem plano; ergo plana quae per ipsas ducuntur parallela erunt; circuli autem sunt aequales, cum aequales habeant diametros $\alpha\beta$ $\gamma\delta$" *Co.*

·πτομένη ABS, dativum corr. Co 22. ἐφάπτεται ABS, corr. *Hu* auctore Co 24. διὰ τοῦ $\overline{H\Theta\Gamma\Delta}$ AS, distinx. B, τῶν corr. *Hu* 26. αἱ $\overline{EZ\Gamma\Delta}$ A, distinx. BS *γάρ). καὶ ἐπεὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΜΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΓ, ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΓΜ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΜΓ· ἴση ἄρα ἡ ΒΜ τῇ ΜΓ, ὥστε διπλάσιον τὸ ἀπὸ ΛΜ τοῦ ἀπὸ ΜΒ· ἡμιόλιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΛ τοῦ ἀπὸ ΛΜ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΒΛ διάμετρος τῆς σφαίρας· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τοῦ κύκλου διάμετρος. καὶ οἱ κύκλοι θέσει, καὶ δοθέντα τὰ Α Β Γ Δ σημεῖα.*



87 *Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεήσει γὰρ ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους, ὥστε τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας ἡμιολίαν εἶναι δυνάμει τῆς ἑκατέρου διαμέτρου, καὶ ἀγαγεῖν δύο διαμέτρους παραλλήλους τὰς ΑΒ ΛΜ, ὡς προεμάθομεν, καὶ τῇ ΛΜ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθὴν τὴν ΓΔ, καὶ ἔχειν τὰ σημεῖα τῶν γωνιῶν τῆς πυραμίδος τὰ Α Β Γ Δ. καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.*

88 μθ'. *Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν κύβον ἐγγράψαι.*

Ἐγγεγράφθω καὶ ἔστω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας

---

1. 2. *γὰρ ἐπὶ τῆς τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΜΓ ἐπιζευχθείσης ἔσται* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 3. *ἀπὸ ΓΜ Co* pro *ἀπὸ ΓΒ* 5. 6. *διπλά*|//// // /*πὸ ΛΜ* A, *διπλάσιον* ... .. *λμ* S, corr. B 8. 9. *ΒΛ τοῦ* |///// *ὀρθὴ ἐστιν δοθεῖσα* A(B), *βλ τοῦ* .... *ἐστὶ δοθεῖσα* S, corr. *Co* 10. 11. *δοθεῖ*|//////////// *ΛΜ* A(S), *δοθεῖσα* .... *ἡ λμ* B, corr. *Co* 13. *τὰ ΑΒ ΓΔ* A, *τὰ αβ γ δ* B, etiam *α β* distinx. S 19. *διαμέτρου Hu* auctore *Co* pro *διάμετρος* 21. *ἔχειν*] exspectamus *ἕξομεν*, at eadem infinitivi structura infra cap. 89 et 91 redit 22. *τὰ ΑΒ ΓΔ* A, distinx. BS 24. *ἐστὶ* A³S, *ἐστὶν* B 25. *μθ'* add. BS

supra *propos. 49 et 50* demonstratum est). Et quia, iuncta $\mu\gamma$, est $\lambda\mu^2 = 2\mu\gamma^2$, erit etiam $\beta\gamma^2 = 2\mu\gamma^2$ (*est enim* $\beta\gamma = \alpha\beta = \lambda\mu$). Et, *quia* $\beta\mu$ *perpendicularis est ad planum circuli* $\gamma\lambda\delta\mu$, angulus $\beta\mu\gamma$ rectus est; ergo

$\beta\gamma^2 = \beta\mu^2 + \mu\gamma^2$. *Sed supra ostendimus* $\beta\gamma^2 = 2\mu\gamma^2$; *ergo*

$\beta\mu^2 = \mu\gamma^2$, *id est* $\beta\mu = \mu\gamma$. *Et est* $\beta\gamma = \lambda\mu$; ergo

$\lambda\mu^2 = 2\beta\mu^2$. *Et rursus, quia angulus* $\beta\mu\lambda$ *rectus est, erit* $\beta\lambda^2 = \lambda\mu^2 + \beta\mu^2$, itaque

$$\beta\lambda^2 = \frac{3\lambda\mu^2}{2}.$$

Et est data $\beta\lambda$ diametrus sphaerae; ergo etiam $\lambda\mu$ diametrus circuli data est. Et circuli $\alpha\beta \cdot \gamma\lambda\delta\mu$ positione *dati sunt; ergo diametri* $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ *magnitudine et positione dati*, ideoque data puncta α β γ δ**).

Et compositio manifesta est. Oportebit enim in sphaera duos circulos aequales et parallelos ita describere, ut quadratum ex sphaerae diametro sesquialterum sit quadrati e diametro *circulorum*[2]), et ducere duas diametros parallelas $\alpha\beta$ $\lambda\mu$, ut supra (*propos. 44*) didicimus, et diametro $\lambda\mu$ per centrum perpendicularem $\gamma\delta$, et sic invenire angulorum pyramidis puncta α β γ δ. Et demonstratio contraria est analysi, *qua demonstratione facta* simul ostensum erit quadratum ex sphaerae diametro sesquialterum esse quadrati e latere pyramidis[3]).

IL. In datam sphaeram cubus inscribatur. Prop. 55

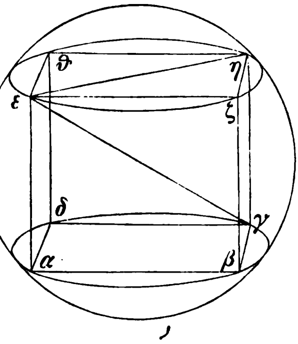
Sit iam inscriptus, et in superficie sphaerae sint puncta

**) In hac et proximis propositionibus scriptor tamquam consentaneum supponit unum angulorum in superficie sphaerae punctum positione datum esse (quod scilicet plane, ut libet, sumatur). Velut in hac propositione si punctum β datum esse statuimus, datae sphaerae diametrus $\beta\lambda$ data est et positione et magnitudine, unde reliqua facile efficiuntur; ac similiter in proximis propositionibus.

2) Vide append.

3) Demonstrationem a scriptore tamquam consentaneam omissam non difficile est restituere; et pauca eum in usum supplentur a Commandino, quae hic repetere alienum fuerit.

τὰ σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὰ Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ, καὶ ἐκβεβλήσθω δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ποιήσει δὴ τομὰς κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους· καὶ γὰρ τὰ ἐν αὐτοῖς τετράγωνα [τοῦ κύβου] ἴσα τε καὶ παράλληλά ἐστιν. καὶ ἔσται ἐπεζευγμένη ἡ ΓΕ διάμετρος τῆς σφαίρας. ἐπεζεύχθω καὶ ἡ ΕΗ. ἐπεὶ διπλάσιον τὸ ἀπὸ ΕΗ τοῦ ἀπὸ ΕΘ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΗΕ γωνία, ἔσται τὸ ἀπὸ ΓΕ τοῦ ἀπὸ ΕΗ ἡμιόλιον. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ ΓΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ. καὶ ἔστιν διάμετρος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· δοθεὶς ἄρα ὁ κύκλος, ὥστε καὶ ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς τετράγωνα καὶ τὰ τῶν γωνιῶν σημεῖα τοῦ κύβου.



89 *Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεῖ γὰρ κύκλους ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο παραλλήλους, καὶ ἴσων οὐσῶν τῶν διαμέτρων ἡμιολία ἔστω δυνάμει ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐγγράψαι εἰς τὸν ἕτερον αὐτῶν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΒΓ ἀγαγεῖν ἐν τῷ ἑτέρῳ κύκλῳ παράλληλον τὴν ΖΗ ἴσην τῇ ΒΓ, ὡς προεδείξαμεν [καθόλου ἴσην τῇ δοθείσῃ], καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον συμπληρῶσαι τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἔχειν τὸν κύβον ἐγγεγραμμένον. δειχθήσεται γὰρ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει τετράγωνον τὸ ΒΖΗΓ καὶ τὰ λοιπά, καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ κύκλοι τὰς τῆς πυραμίδος καὶ τὰς τοῦ κύβου περιέχουσι γωνίας· καὶ*

---

1. *τὰ* $\overline{AB}\ \overline{\Gamma\Delta}\ \overline{EZ}\ \overline{H\Theta}$ A, distinx. BS 4. *τοῦ κύβου* B¹S, *τουτου κυβου* A, *τὰ τοῦ κύβου* B³, del. *Hu* 5. *ἐπιζευγνυμένη* B, *ἐπιζευγνυμένη* S 15. *τοῦ* $\overline{EZ}\ \overline{H\Theta}$ A, coniunx. BS 16. *ὁ* ante *κύκλος* add. *Hu* *καὶ ἡ* $\overline{AB}\ \overline{\Gamma\Delta}$ A(S), corr. B 20. *ἔστω Hu* auctore *Co* pro *ἔστιν* 21. *τὸ* $\overline{AB}\ \overline{\Gamma\Delta}$ A, coniunx. BS 23. *καθόλου — δοθείσῃ* interpolatori tribuit *Hu* 25. *κύβον Co* pro *κύκλον* 26. *τὸ* $\overline{BZ}\ \overline{H\Gamma}$ A, coniunx. BS 27. *τριπλασίων Hu* pro *τριπλάσιον* (conf. p. 150, 7)

angulorum eius $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \vartheta$, et per ea ducantur plana; haec igitur *sphaeram* secantia circulos aequales et parallelos efficient (namque item quadrata circulis inscripta aequalia et parallela sunt). Et iuncta $\gamma\varepsilon$ diametrus sphaerae erit (*propos. 50*). Iungatur etiam $\varepsilon\eta$. Quoniam est $\varepsilon\eta^2 = 2\,\varepsilon\vartheta^2 = 2\,\eta\gamma^2$, et rectus angulus $\gamma\eta\varepsilon$ (*propos. 49*), erit

$$\gamma\varepsilon^2 = \eta\gamma^2 + \varepsilon\eta^2 = \frac{3\,\varepsilon\eta^2}{2}.$$

Sed datum est $\gamma\varepsilon^2$ (*nam $\gamma\varepsilon$ diametrus sphaerae est*); ergo etiam $\varepsilon\eta^2$ datum. Et est $\varepsilon\eta$ diametrus circuli $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$; ergo etiam ipse circulus datus est, itemque circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, et quadrata in utroque inscripta, et puncta angulorum cubi [1]).

Et compositio manifesta est. Oportet enim in sphaera duos circulos parallelos describere aequalibus diametris, quarum quadrati sesquialterum sit quadratum ex sphaerae diametro (*propos. 54*), et in alterutrum circulum inscribere quadratum $\alpha\beta\gamma\delta$, et rectae $\beta\gamma$ in altero circulo rectam $\zeta\eta$ ducere parallelam et aequalem, quemadmodum supra (*propos. 43*) demonstravimus, et ex hac quadratum $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ complere, et sic invenire cubum inscriptum. Convenienter enim analysi demonstrabitur quadratum esse $\beta\zeta\eta\gamma$ et cetera [2]), *quo facto simul* ostensum erit quadratum ex sphaerae diametro triplum esse quadrati ex cubi latere, atque eosdem circulos et pyramidis et cubi angulos continere; namque etiam in illâ qua-

1) Conf. p. 145 adnot. ** ad propos. 54.

2) "Iungantur $\gamma\varepsilon$ $\varepsilon\eta$; erit $\gamma\varepsilon$ ipsius sphaerae diameter ex 50. huius. Et $\varepsilon\eta$ diameter circuli ex iis quae demonstravimus in 52. huius. Angulus autem $\gamma\eta\varepsilon$ est rectus; nam $\gamma\eta$ $\beta\zeta$ perpendiculares sunt ad plana circulorum ex 49. huius, quare et ad omnes rectas lineas, quae in eis ipsas contingunt. Cum igitur quadratum ex $\gamma\varepsilon$ sesquialterum sit quadrati ex $\varepsilon\eta$, et quadratum ex $\varepsilon\eta$ duplum quadrati ex $\zeta\eta$, sitque angulus $\gamma\eta\varepsilon$ rectus, erit quadratum ex $\gamma\varepsilon$ quadrati ex $\zeta\eta$ triplum. Rursus quadratum ex $\gamma\varepsilon$ cum sesquialterum sit quadrati ex $\varepsilon\eta$, erit quadrati ex $\eta\gamma$ triplum; quadratum igitur ex $\zeta\eta$ quadrato ex $\eta\gamma$ est aequale, et recta linea $\zeta\eta$ aequalis ipsi $\eta\gamma$. Sunt autem $\zeta\beta$ $\eta\gamma$ inter se aequales, et anguli $\gamma\eta\zeta$ $\beta\zeta\eta$ recti; ergo $\beta\zeta\eta\gamma$ quadratum erit. Et eadem ratione $\alpha\varepsilon\zeta\beta$ $\alpha\varepsilon\vartheta\delta$ $\delta\vartheta\eta\gamma$ quadrata demonstrabitur. Cubus igitur constitutus est in data sphaera, quod facere oportebat" *Co.*

γὰρ ἐπ' ἐκείνης ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιολία ἦν δυνάμει τῆς διαμέτρου τῶν κύκλων ἑκατέρου.

90 *ν'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.*

Ἐγγεγράφθω καὶ ἔστω σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰ Α Β Γ Δ Ε Ζ, καὶ ἐκβληθέντα τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιείτω κύκλους τοὺς ΑΒΓ ΔΕΖ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἴσαι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπεπτώκασιν αἱ ΔΑ ΔΒ ΔΕ ΔΖ, ἔσται τὰ Α Ε Ζ Β ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ [καὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσίν]. καὶ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΒ ΒΖ ΖΕ, καὶ εἰσὶν ἐν κύκλῳ· τετράγωνον ἄρα τὸ ΑΕΖΒ, καὶ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ. ὁμοίως καὶ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΑΓ· παράλληλοι ἄρα καὶ οἱ κύκλοι· καὶ ἴσοι ἀλλήλοις, ἐπεὶ καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ ἴσοι καὶ παράλληλοι κύκλοι εἰσίν, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΕΖ, καὶ εἰσὶν οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων, ἔσται ἐπιζευγνυμένη ἡ ΑΖ διάμετρος τῆς σφαίρας [καὶ αἱ ΑΕ ΖΒ ὀρθὰς μετὰ τῶν ΑΒ ΕΖ περιέξουσι γωνίας, ὡς προδέδεικται]. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ΑΕ ΕΖ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ τοῦ ἀπὸ ΖΕ. τὸ δ' ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΔΕΖ κύκλου ἐπίτριτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ἡμιόλιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τοῦ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΔΕΖ κύκλου· δοθεῖσα ἄρα ἡ διάμετρος, καὶ ὁ κύκλος, ὥστε καὶ ὁ ΑΒΓ καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν σημεῖα.

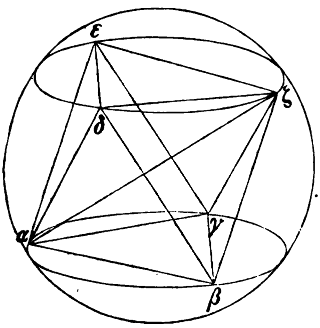
91 *Καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολούθως· δεῖ γὰρ ὁμοίως ἐγγρά-*

---

3. $\overline{N}$ A[1] in marg. (BS) 4. *σημείων* A, *σημεῖον* B, corr. S 5. *τὰ* $\overline{AB\Gamma}$ $\overline{\Delta EZ}$ A, distinx. BS *ἐκβληθέντα* A[2] ex *ἐκ**βλήθε* 8. *τὰ* $\overline{AE}$ $\overline{ZB}$ AS *Co*, distinx. B 9. 10. *καὶ γὰρ — εἰσίν* interpolatori tribuit *Hu* 11. post *αἱ* $\overline{AB}$ repetit $\overline{AB}$ A, om. BS 13. *δὲ* om. A, add. BS 15. *ἴσα* add. A[2] super vs. 16. *καὶ* ante *ἐν αὐτοῖς* add. *Hu* auctore *Co* 17. *αἱ* add. *Hu*, item vs. 19 19. *καὶ αἱ ΑΕ* — 20. *προδεδείκται* tribuit *Hu* interpolatori, qui quidem verbis *ὡς προδέδεικται* significat propos. 51; at vero *αε εζ* ad rectos inter se angulos esse in hac ipsa propositione statim demonstratum est 22. *ἐπὶ τρίτον* ABS, corr. *Co* 25. *ἐπ' Hu* pro *ἀπ'*

dratum ex diametro sphaerae sesquialterum erat quadrati ex diametro utriusque circuli (*propos. 54*).

L. In datam sphaeram octaedrum inscribatur. Prop. 56



Sit iam inscriptum, et in superficie sphaerae sint puncta angulorum eius $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta$, et plana quae per ea ducuntur efficiant circulos $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$. Quoniam a puncto δ ad superficiem sphaerae aequales rectae $\delta\alpha$ $\delta\beta$ $\delta\varepsilon$ $\delta\zeta$ ductae sunt, erunt puncta $\alpha\ \varepsilon\ \zeta\ \beta$ in uno plano *circuli, cuius polus est* δ (*Theodos. sphaer. 1 def. 5*). Ac sunt aequales inter se rectae $\alpha\beta$ $\beta\zeta$ $\zeta\varepsilon$, eaedemque in *plano* circuli $\alpha\varepsilon\zeta\beta$; ergo quadratum est $\alpha\varepsilon\zeta\beta$, et parallelae $\varepsilon\zeta$ $\alpha\beta$. Similiter etiam $\delta\varepsilon$ $\beta\gamma$, et $\delta\zeta$ $\alpha\gamma$ inter se parallelae esse *demonstrantur;* ergo circuli $\delta\varepsilon\zeta$ $\alpha\gamma\beta$ inter se paralleli sunt (*elem. 11, 15*); iidemque aequales, quoniam triangula aequilatera in iis inscripta aequalia sunt. Et quoniam in sphaera sunt aequales et paralleli circuli $\alpha\beta\gamma$ $\delta\zeta\varepsilon$, in iisque aequales et parallelae rectae $\alpha\beta$ $\varepsilon\zeta$, neque hae ad easdem partes centrorum, iuncta $\alpha\zeta$ diametrus erit sphaerae (*propos. 50*). Et sunt aequales $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$; est igitur $\alpha\zeta^2 = 2\,\zeta\varepsilon^2$. Sed quadratum ex circuli $\delta\varepsilon\zeta$ diametro est $= \frac{4\,\varepsilon\zeta^2}{3}$ *); ergo quadratum ex $\alpha\zeta$ ad quadratum ex circuli $\delta\varepsilon\zeta$ diametro est $= 3 : 2$. *Sed data est* $\alpha\zeta$ (*quippe quae datae sphaerae sit diametrus*); ergo data est *circuli* $\delta\varepsilon\zeta$ diametrus, et *datus ipse* circulus; itaque etiam circulus $\alpha\beta\gamma$ datus est, itemque puncta *triangulorum aequilaterorum* circulis $\delta\varepsilon\zeta$ $\alpha\beta\gamma$ *inscriptorum* 1).

Et compositio convenienter *analysi se habet.* Oportet

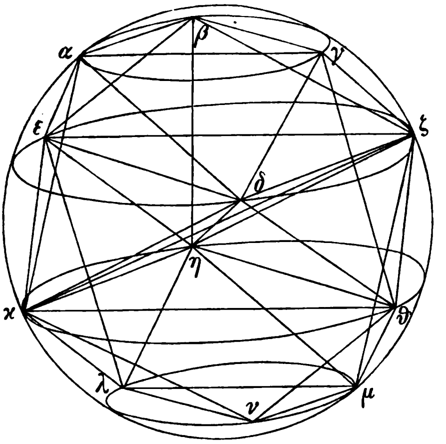
*) Est enim quadratum ex $\varepsilon\zeta$ triplum quadrati ex radio circuli (elem. 13, 12). Sed quadratum ex diametro circuli est eiusdem radii quadruplum; ergo quadratum diametri ad quadratum ex $\varepsilon\zeta$ est ut 4 ad 3, hoc est ἐπίτριτον sive sesquitertium (*Co*).

1) Conf. p. 145 adnot. ** ad propos. 54.

ψαι τῇ σφαίρᾳ δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους, ὧν ἑκατέρου τῆς διαμέτρου ἡμιολία δυνάμει ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐγγράψαι εἰς τὸν ἕτερον αὐτῶν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ κύκλῳ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ΕΖ ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐγγράψαι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ ἔχειν συνεσταμένον τὸ ὀκτάεδρον. καὶ συναποδέδεικται ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας διπλασίων δυνάμει τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. συνεώραται δ' ὅτι εἴς γε τὴν τῆς πυραμίδος ἐγγραφὴν καὶ εἰς τὴν τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀκταέδρου οἱ αὐτοὶ παραλαμβάνονται κύκλοι [ὧν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐναρμόζεται τὰ πολύεδρα], καὶ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τετράγωνον τοῦ κύβου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου.

92 να'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰκοσάεδρον ἐγγράψαι.

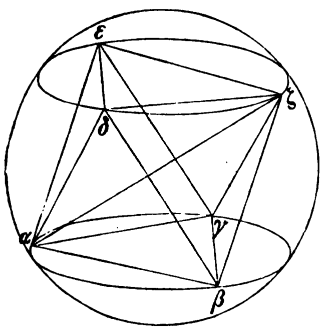
Ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα τῶν



γωνιῶν αὐτοῦ τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, Η Θ Κ, Λ Μ Ν. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπεπτώκασιν αἱ ΑΒ ΒΓ ΒΖ ΒΗ ΒΕ ἴσαι ἀλλήλαις, ἐν ἑνὶ ἔσται ἐπιπέδῳ τὰ Α Γ Ζ Η Ε σημεῖα [καὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσίν]. καὶ ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΓ ΓΖ ΖΗ ΗΕ ΕΑ, καὶ εἰσὶν ἐν

5. ἴσην τῆς $\overline{AB}$ A, corr. BS 8. συνεωρατο (sine acc.) A(BS), corr. *Hu* 10. 11. ὧν — πολύεδρα interpolatori tribuit *Hu* 14. $\overline{N\Delta}$ A^1 in marg. (BS) 17. 18. $\overline{AB\Gamma}$ $\overline{\Delta EZ}$ $\overline{H\Theta K}$ $\overline{\Lambda MN}$ A, distinx. BS 26. $\overline{A\Gamma Z}$ $\overline{HE}$ A, distinx. BS 27. καὶ — 30. εἰσίν interpolatori tribuit *Hu* 27. γὰρ add. *Co*, αἱ *Hu*

enim similiter in sphaeram duos circulos aequales et parallelos ita inscribere, ut quadratum ex sphaerae diametro sesquialterum sit quadrati ex *circulorum* diametro (*propos. 54*), et in alterutrum circulum inscribere aequilaterum triangulum $\alpha\beta\gamma$, et in altero rectae $\alpha\beta$ parallelam et aequalem ducere $\varepsilon\zeta$, ab eaque triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ inscribere, et sic invenire octaedri constructionem [1], *quo facto* simul ostensum erit quadratum ex sphaerae diametro duplum esse quadrati ex latere octaedri [2]. *Solutis* autem *his tribus problematis* (*propos. 54—56*) simul perspectum erit ad constructionem et pyramidis et cubi et octaedri *sphaerae* inscriptorum eosdem adsumi circulos [quorum in eandem sphaeram polyedra accomodantur], atque eundem circulum continere et cubi quadratum et octaedri triangulum.



LI. In datam sphaeram icosaedrum inscribatur. Prop. 57

Sit iam inscriptum, et sint in superficie *sphaerae* puncta angulorum eius $\alpha\ \beta\ \gamma$, $\delta\ \varepsilon\ \zeta$, $\eta\ \vartheta\ \varkappa$, $\lambda\ \mu\ \nu$. Quoniam a puncto β ad superficiem ductae sunt rectae $\beta\alpha\ \beta\gamma\ \beta\zeta\ \beta\eta\ \beta\varepsilon$ inter se aequales, in uno plano erunt puncta $\alpha\ \gamma\ \zeta\ \eta\ \varepsilon$ *). Et *item ex hypothesi* inter se aequales sunt rectae $\alpha\gamma\ \gamma\zeta\ \zeta\eta\ \eta\varepsilon\ \varepsilon\alpha$, suntque in circulo; ergo $\alpha\varepsilon\eta\zeta\gamma$ pentagonum aequi-

1) Similiter ac supra, adhibitis propos. 50 et 51, Commandinus demonstrat triangula $\alpha\beta\delta$ $\delta\alpha\varepsilon$ $\alpha\gamma\varepsilon$ $\varepsilon\gamma\zeta$ $\gamma\beta\zeta$ $\zeta\beta\delta$ aequilatera esse et triangulis $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$ aequalia, ex quibus octaedrum constet.

2) Sint notae sphaerae diametri: D, circuli in ea descripti diametri: d, eiusdem circuli radii: r, lateris octaedri: o; erit igitur ex constructione $2D^2 = 3d^2$, et propter elem. 13, 12 $o^2 = 3r^2 = \frac{3d^2}{4}$; ergo $D^2 = 2o^2$.

*) Hoc ex Theodosii sphaer. 1 def. 5 similiter atque in propos. 56 efficitur; inepta autem sunt verba quae in Graecis sequuntur, a nobis seclusa.

κύκλῳ· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΕΗΖΓ πεντάγωνον· ὁμοίως καὶ ἑκάτερον τῶν ΚΕΒΓΔ ΔΘΖΒΑ καὶ τὰ ΑΚΛΗΒ ΑΚΝΘΓ ΓΘΜΗΒ ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια [καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ]. καὶ ἔσται παράλληλος ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΕΖ ἐπιζευχθείσῃ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΑΜ· καὶ γὰρ τὸ ΑΚΔΘΜ πεντάγωνόν ἐστιν. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ μὲν ἐπιζευγνύουσαι τὰ Β Γ, Ε Δ, Η Θ, Α Ν παράλληλοι, αἱ δὲ ἐπιζευγνύουσαι τὰ Β Α, Ζ Δ, Η Κ, Μ Ν παράλληλοι. καὶ ὁμοίως ὁ περὶ τὰ Α Β Γ κύκλος ἴσος καὶ παράλληλος τῷ περὶ τὰ Α Μ Ν· ἴσα γὰρ καὶ ὅμοια τὰ ἐν αὐτοῖς τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΑΜΝ. οἱ δὲ περὶ τὰ Δ Ε Ζ, Κ Η Θ σημεῖα κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι· καὶ γὰρ τὰ ἐν αὐτοῖς τρίγωνα ἴσα καὶ ἰσόπλευρα· ἑκάστη γὰρ πλευρὰ πενταγώνου γωνίαν ὑποτείνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ οἱ περὶ τὰ Δ Ε Ζ, Κ Η Θ κύκλοι ἴσοι εἰσὶν καὶ ἐν αὐτοῖς ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευραὶ παράλληλοι αἱ ΕΖ ΚΘ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων, ἔσται ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ Ζ Κ διάμετρος τῆς σφαίρας καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΚ γωνία· προδέδεικται γάρ. καὶ ἐπεὶ πεντάγωνόν ἐστι τὸ ΗΕΑΓΖ, τῆς ΕΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, μεῖζον ἔσται τμῆμα ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου. καὶ δύναται ἀμφο-

---

1. *τὸ* ΑΕΖ ΖΓ ABS, corr. *Co* 2. *τῶν* ΚΕΒΓΔΑΘΖΒΑ A, distinx. BS, Δ pro Α corr. *Co* *τὰ* ΚΑΛΗΒ ABS, corr. *Co* 3. *καὶ — ἐπιπέδῳ* interpolatori tribuit *Hu* *ἐν* add. *Hu* auctore *Co* 4. *παράλληλος* add. hoc loco *Hu*, idem post *ἐπιζευχθείσῃ* *Co* 5. *τὸ* ΑΚΔ ΘΜ A, coniunx. BS, *τὸ* ΑΗΖΘΜ *Co* 7. *τὰ* ΒΓ ΕΔ ΗΘ ΑΗ A (item S, nisi quod *τὰς*), distinx. B, Ν pro Η corr. *Co* *παραλλήλου* AB, *παραλλήλους* S, corr. *Hu* auctore *Co* 8. *τὰ* ΒΑ ΖΔ ΗΚ ΜΝ A (*τὰς* etc. S), distinx. B *παραλλήλους* ABS (conf. vs. 7) 9. *τὰ* ΑΒΓ et 10. *τὰ* ΑΜΝ A, distinx. BS 11. *οἱ δὲ*] *ὁμοίως δὲ καὶ* coni. *Hu* *τὰ* ΔΕΖ ΚΗΘ AS, distinx. B 12. *κύκλοις* AB, corr. S 14. 15. *τὰ* ΔΕΖ ΚΗΘ ABS, distinx. *Hu* 16. *ἡ εζκθ* B, *ἡ εζ κθ* S (recte A) 17. *τὰ* ΖΚ A, distinx. BS 19. *ἐπεὶ* BS, *επι* (sine spir. et acc.) A *τὸ* ΗΕ ΑΓΖ A, coniunx. BS 20. *τεμναμένης* AB, corr. S

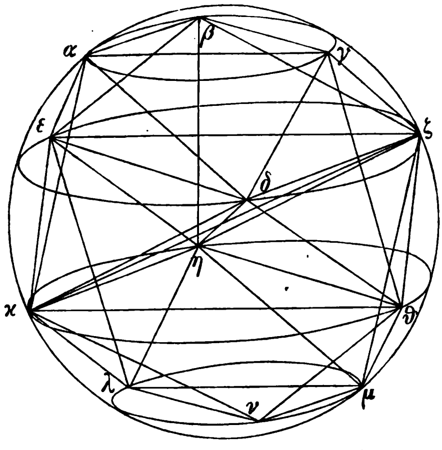
angulum est. Similiter *demonstratur planas figuras esse* $\kappa\epsilon\beta\gamma\delta$ $\delta\vartheta\zeta\beta\alpha$ $\alpha\kappa\lambda\eta\beta$ $\alpha\kappa\nu\vartheta\gamma$ $\gamma\vartheta\mu\eta\beta$ *easdemque pentagona* aequilatera et aequiangula. Et erit $\alpha\gamma$ parallela iunctae $\epsilon\zeta$, et $\epsilon\zeta$ *iunctae* $\kappa\vartheta$, et $\kappa\vartheta$ *iunctae* $\lambda\mu$; namque etiam $\lambda\kappa\delta\vartheta\mu$ pentagonum *aequilaterum* est[1]. Similiter demonstrabitur rectas $\beta\gamma$ $\epsilon\delta$ $\eta\vartheta$ $\lambda\nu$ parallelas esse, itemque parallelas $\beta\alpha$ $\zeta\delta$ $\eta\kappa$ $\mu\nu$. Et similiter *demonstratur* circulum qui per α β γ puncta transit aequalem et parallelum esse ei qui per λ μ ν; nam, *ut modo significavimus, rectae* $\beta\gamma$ $\lambda\nu$, *itemque* $\beta\alpha$ $\mu\nu$ *inter se parallelae sunt; itaque paralleli circuli* (*elem. 11, 15*); *iidemque aequales, quoniam ex hypothesi* triangula $\alpha\beta\gamma$ $\lambda\mu\nu$, quae his *circulis* sunt inscripta, aequalia et similia sunt. Item circuli qui per δ ϵ ζ, κ η ϑ puncta transeunt aequales et paralleli sunt; nam triangula iis inscripta sunt aequalia et aequilatera, quoniam singula latera angulos pentagoni *in eadem sphaera* subtendunt. Iam quia in sphaera circuli $\delta\epsilon\zeta$ $\kappa\eta\vartheta$ aequales in iisque triangulorum aequilaterorum latera $\epsilon\zeta$ $\kappa\vartheta$ parallela neque ad easdem partes centrorum sunt, recta quae ζ κ iungit erit sphaerae diametrus et angulus $\zeta\epsilon\kappa$ rectus; utrumque enim supra (*propos. 50 et 51*) demonstratum est. Et quoniam pentagonum *aequilaterum* est $\eta\epsilon\alpha\gamma\zeta$, si recta $\epsilon\zeta$ extremâ ac mediâ proportione secetur[2], maius segmentum erit $\alpha\gamma$; ergo $\epsilon\zeta$ ad $\alpha\gamma$ eandem proportionem habet quam hexagoni latus ad latus decagoni[3]. Et est $\epsilon\zeta^2 + \alpha\gamma^2$

1) Quoniam $\alpha\epsilon\eta\zeta\gamma$ pentagonum aequiangulum est, trapezium erit $\alpha\epsilon\zeta\gamma$, parallelaeque $\alpha\gamma$ $\epsilon\zeta$; item in pentagono $\alpha\kappa\nu\vartheta\gamma$ parallelae $\alpha\gamma$ $\kappa\vartheta$, denique in pentagono $\lambda\kappa\delta\vartheta\mu$ parallelae $\kappa\vartheta$ $\lambda\mu$. (Fusius id demonstrat Co in libro de centro gravitatis solidorum, Bononiae 1565, fol. 2 v.)

2) Eucl. elem. 6 def. 3: *Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.* Auream sectionem cum Pythagoreis nostrates dicere solent.

3) Si in pentagono regulari $\eta\epsilon\alpha\gamma\zeta$ recta $\epsilon\zeta$ *ἄκρον καὶ μέσον λόγον* secetur, maiori segmento ipsum pentagoni latus aequale esse efficitur ex elem. 13, 8; ac statim proxima eiusdem elementorum libri propositio docet maius segmentum ad minus esse ut latus hexagoni ad latus decagoni eidem circulo inscriptorum.

τέρας ἡ ΖΚ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΚ τῇ ΑΓ· ἕξει ἄρα ἡ ΖΚ διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς μὲν τὴν ΕΖ λόγον, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, πρὸς δὲ ΑΓ, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου. καὶ δοθεῖσα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΖ ΑΓ, ὥστε καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τρίτον μέρος οὖσαι δυνάμει τῶν ΕΖ ΑΓ· καὶ αὐτοὶ ἄρα οἱ κύκλοι δοθέντες, καὶ οἱ ἴσοι αὐτοῖς καὶ παράλληλοι, καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς σημεῖα τῶν τοῦ πολυέδρου γωνιῶν.



93 *Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεήσει γὰρ ἐκθέσθαι δύο εὐθείας, πρὸς ἃς λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου, καὶ ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο κύκλους, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος δυνάμει τῶν ἐκτεθεισῶν εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρας, ὡς τοὺς ΔΕΖ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσους αὐτοῖς γράψαι παραλλήλους τοὺς ΚΗΘ ΛΜΝ, καὶ ἐναρμόσαι ἐν ἑκάστῳ ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευρὰς παραλλήλους τὰς ΑΓ ΕΖ ΚΘ ΛΜ ἐνηλλαγμένως πρὸς τὰ κέντρα κειμένας, καὶ ἐγγράψαι τὰ τρίγωνα ὅλα τὰ ποιοῦντα τὰς τοῦ πολυέδρου γωνίας. καὶ ἡ ἀπόδειξις ἐκ τῆς ἀναλύσεως εὐχερής. συνορᾶται δ' ὅτι καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας τριπλασία ἐστὶν δυνάμει τῆς τοῦ πενταγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν ΔΕΖ κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ μὲν γὰρ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ*

---

1. *τὴν* // | *τῆι* ΑΓ A, *τὴν* .. *τῇ* αγ BS cod. Co, corr. Co 6. *καὶ*

$= \zeta\kappa^2$, quia *angulus* $\zeta\varepsilon\kappa$ *rectus et* $\varepsilon\kappa$ aequalis $\alpha\gamma$ est; ergo *propter elem. 13, 10 rectae* $\zeta\kappa$ $\varepsilon\zeta$ $\alpha\gamma$ *inter se sunt ut latera pentagoni, hexagoni, decagoni eidem circulo inscriptorum. Et est* $\zeta\kappa$ sphaerae diametrus; haec igitur ad $\varepsilon\zeta$ eandem proportionem habet quam pentagoni latus ad hexagoni, et ad $\alpha\gamma$ eandem quam pentagoni latus ad decagoni. Et data est sphaerae diametrus; ergo etiam $\varepsilon\zeta$ $\alpha\gamma$ datae sunt, itaque etiam circulorum $\varepsilon\zeta\delta$ $\alpha\gamma\beta$ radii, quorum quadrata tertiae partes sunt quadratorum ex $\varepsilon\zeta$ $\alpha\gamma$ (*elem. 13, 12*); ergo ipsi quoque circuli dati sunt, itemque, qui iis aequales et paralleli sunt, *circuli* $\kappa\vartheta\eta$ $\lambda\mu\nu$, et quae sunt in iis puncta angulorum polyedri[4]).

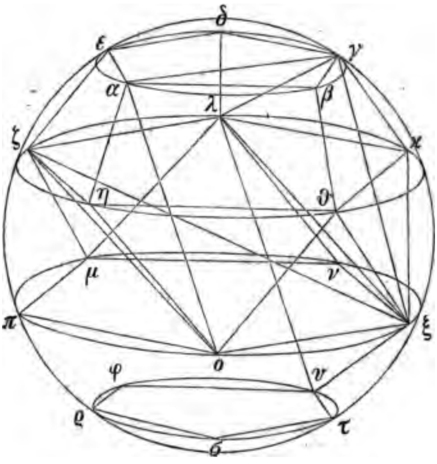
Et compositio manifesta est. Oportebit enim duas rectas exponere, quarum ad unam diametrus sphaerae proportionem eandem habeat quam pentagoni latus ad hexagoni, ad alteram autem quam pentagoni latus ad decagoni, et in sphaera duos circulos ita describere, ut quadrata ex eorum radiis tertiae partes sint quadratorum ex rectis expositis, velut circulos $\delta\varepsilon\zeta$ $\alpha\beta\gamma$, et ad alteras centri sphaerae partes his duos aequales et parallelos describere $\kappa\eta\vartheta$ $\lambda\mu\nu$, et in unoquoque latera triangulorum aequilaterorum construere parallela $\alpha\gamma$ $\varepsilon\zeta$ $\kappa\vartheta$ $\lambda\mu$ ad oppositas centrorum partes, et inscribere tota triangula quae polyedri angulos efficiant. Et demonstratio ex analysi facile *sequitur*[5]), ac simul perspicitur quadratum ex sphaerae diametro triplum esse quadrati ex latere pentagoni in circulum $\delta\varepsilon\zeta$ inscripti; etenim *ex constructione* $\kappa\zeta$ ad $\zeta\varepsilon$ proportionem eandem habet quam penta-

4) Conf. p. 145 adnot. ** ad propos. 54.

5) Conf. ibid. adnot. 3.

δοθῇ AB, corr. S 11. *αἱ* add. *Co* 17. *οἱ* add. *Hu* 18. 19. *καὶ τὰ Hu*, *κατὰ τὰ* AB (*Co*), *κατὰ* S 21. *ἔχειν διάμετρος* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 27. 28. *ἐναρμόσαι τῶν ἐν ἑκάστωι ἰσοπλεύρωι τριγώνωι* ABS, corr. *Hu* 32. *συνορᾶται*] *deprehensum est Co*; voluit igitur *συνεώραται* λόγον ἔχει ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΕΖ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ὃν ἡ τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, καὶ ἔστιν τριπλασία δυνάμει ἡ τοῦ τριγώνου τῆς τοῦ ἑξαγώνου· τριπλασία ἄρα δυνάμει ἐστὶν καὶ ἡ ΚΖ διάμετρος τῆς σφαίρας τῆς τοῦ ἐν τῷ ΔΕΖ κύκλῳ πενταγώνου πλευρᾶς.

94 νβʹ. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν [τὸ] δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.



Ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὰ Α Β Γ Δ Ε, Ζ Η Θ Κ Λ, Μ Ν Ξ Ο Π, Ρ Σ Τ Υ Φ. ἔσται δὴ ἡ μὲν ΕΔ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ζ Λ, ἡ δὲ ΛΕ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ζ Η. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ λοιπαί, ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε ἐπίπεδον παράλληλον τῷ διὰ τῶν Ζ Η Θ Κ Λ. ἐπεὶ δὲ αἱ ἐπὶ τὰ Ο Λ, Ξ Γ παράλληλοι (ἑκατέρα γὰρ τῇ ΒΘ) καὶ ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ἐπὶ τὰ Ο Ξ, Λ Γ ἄρα παράλληλοι, ὥστε καὶ αἱ ΣΤ

---

2. ἑξαγώνου τοῦ *Hu* auctore *Co* pro πενταγώνου 4. τῆς om. AS, add. B 6. τοῦ in ABS ante πενταγώνου additum huc transposuit *Hu* 7. $\overline{NB}$ A[1] in marg. (BS) τὸ del. V[1] 10. $\overline{ΑΒΓΔ}$ $\overline{ΕΖΗΘ}$ $\overline{ΚΛΜΞ}$ $\overline{ΟΠΡϹΤΥΦ}$ AS, distinx. B, *N* add. *Co* 11. 12. τὰ $\overline{ΖΛ}$ — τὰ $\overline{ΖΗ}$

goni latus ad hexagoni, et $\zeta\varepsilon$ ad latus hexagoni eidem circulo inscripti *proportionem* eandem quam trianguli latus ad hexagoni, et est quadratum ex trianguli latere triplum quadrati ex hexagoni latere (*elem. 13, 12. 4, 15 coroll.*); ergo etiam quadratum ex $\varkappa\zeta$ diametro sphaerae triplum est quadrati ex latere pentagoni circulo $\delta\varepsilon\zeta$ inscripti[6].

LII. In datam sphaeram dodecaedrum inscribatur. Prop. 58

Sit iam inscriptum, et sint puncta angulorum eius α β γ δ ε, ζ η ϑ $\varkappa$ λ, μ ν ξ o π, ϱ σ τ υ φ. Erit igitur *similiter*, *ac supra* (*propos. 57*) *demonstratum est*, recta $\varepsilon\delta$ parallela ipsi $\zeta\lambda$, et $\alpha\varepsilon$ parallela $\zeta\eta$, et eadem ratione etiam reliquae, ita ut planum quod per α β γ δ ε transit parallelum sit ei quod per ζ η ϑ $\varkappa$ λ. Sed quia $o\alpha$ $\xi\gamma$ parallelae (utraque enim rectae $\beta\vartheta$ *parallela est*) et aequales sunt[1], ergo etiam rectae $o\xi$ $\alpha\gamma$ inter se parallelae sunt, itaque etiam

6) Quamquam demonstratio quae supra legitur per se satis perspicua esse videtur, tamen brevior expositio addatur hunc in modum. Notentur pentagoni, trianguli, hexagoni circulo $\delta\varepsilon\zeta$ inscriptorum latera p t h. Iam ex constructione est

$\varkappa\zeta : \zeta\varepsilon = p : h$, et

$\zeta\varepsilon : h = t : h$; ergo

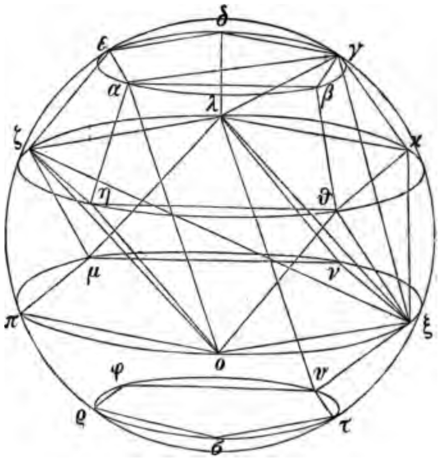
$\varkappa\zeta : p = t : h$. Sed est (elem. 13, 12 etc.)

$t^2 = 3h^2$; ergo etiam $\varkappa\zeta^2 = 3p^2$.

1) Rectas $\beta\vartheta$ $\gamma\xi$ inter se parallelas esse similiter ac supra propos. 57 adnot. 1 inde sequitur, quod ex hypothesi $\beta\vartheta\xi\varkappa\gamma$ pentagonum regulare est. Item in pentagono $\beta\vartheta o\eta\alpha$ parallelae sunt $\beta\vartheta$ αo. Nec minus perspicuum est rectas $\gamma\xi$ αo inter se aequales esse. Ceterum dubitari vix posse videtur, quin Graecus scriptor ipsam dodecaedri formam modulo expressam in demonstratione persequenda ante oculos habuerit. Nam lineae in plano descriptae, quas nostrâ coniecturâ adumbravimus, minus perspicuae sunt facileque inter se confunduntur; quapropter etiam alias per se quidem necessarias, sed non diserte a Graeco scriptore commemoratas omisimus, ne difficultas adspectus augeretur.

AB, distinx. S 13. τὸν διὰ AB, corr. S τῶν $\overline{ABΓ}$ $\overline{ΔE}$ AS, distinx. B[s] 14. 15. τῶν $\overline{ZHΘKΛ}$ — τὰ $\overline{OΛΞΓ}$ AS, distinx. B[s] 15. ἴσαι εἰσίν Hu pro εἰσὶν ἴσαι 16. αἱ (ante ἐπὶ) add. A[1]B[3] super vs. τὰ $\overline{OΛΞΓ}$ ἄρα AS, distinx. B[s], corr. *Co*

ΕΔ. ὁμοίως καὶ αἱ ΣΡ ΓΔ, καὶ αἱ λοιπαί· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἄρα παράλληλα. νοείσθωσαν οὖν οἱ περὶ αὐτὰ γραφόμενοι [παράλληλοι] κύκλοι. ἔσται δὴ ὁ μὲν περὶ τὰ Α Β Γ Δ Ε ἴσος τῷ περὶ τὰ Ρ Σ Τ Υ Φ· τὰ γὰρ ἐν αὐτοῖς πεντάγωνα ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ περὶ τὰ Ζ Η Θ Κ Λ τῷ περὶ τὰ Μ Ν Ξ Ο Π· καὶ γὰρ τὰ ἐν τούτοις πεντάγωνα ἴσα. καὶ ἔστιν ἡ ἐπὶ τὰ Γ Λ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ξ Υ (ἑκατέρα γὰρ τῇ ΚΝ)· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔσται τὰ Λ Γ Ξ Υ σημεῖα. καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰ ἴσαι εἰσίν· ἴσων γὰρ πενταγώνων ὑποτείνουσι γωνίας· καὶ



εἰσὶν ἐν κύκλῳ· τετράγωνον ἄρα τὸ ΛΓΞΥ, ὥστε διπλῆ δυνάμει ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ Ξ Λ τῆς ἐπὶ τὰ Λ Γ, τουτέστιν τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Λ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΞΛΖ γωνία· ἐν ἴσοις γὰρ κύκλοις ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ΟΞ ΖΛ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΖ τοῦ ἀπὸ ΖΛ. καὶ ἔστιν διὰ τὰ προδεδειγμένα διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ἐπὶ τὰ Ζ Ξ· οὐ γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων εἰσὶν αἱ ΟΞ ΖΛ. ἕξει οὖν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν ΖΛ λόγον ὃν τριγώνου πλευρὰ πρὸς ἑξαγώνου τῶν εἰς τὸν

---

2. *ἄρα* Hu pro *πάντα*   3. *παράλληλοι*, etsi re verum, tamen alienum ab hoc loco esse videtur   4. *τὰ ΑΒΓ ΔΕ* AS, *τὰ αβγδε*

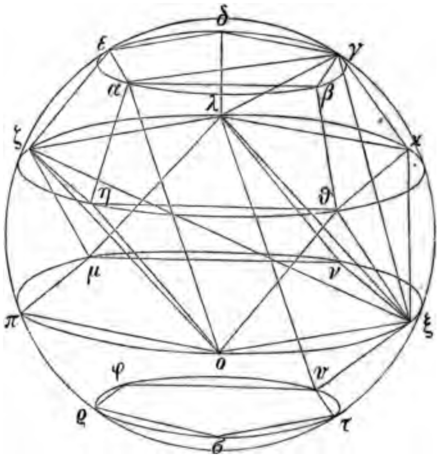
στ εδ. Similiter rectas *ϱσ δγ*, itemque *binas τυ εα, υφ αβ, φϱ βγ inter se parallelas esse demonstratur;* ergo etiam plana quae per eas transeunt. Iam intellegantur circuli circa ea puncta descripti 2); erit igitur circulus *αβγδε* circulo *ϱστυφ* aequalis; nam pentagona *regularia* iis inscripta aequalia sunt. Sed *etiam* circuli *ζηθκλ μνξοπ* inter se aequales, quia item pentagona his inscripta aequalia sunt. Et est recta *γλ* ipsi *ξυ* parallela (utramque enim rectae *κν parallelam esse similiter ac supra demonstratur*); ergo puncta *λ γ ξ υ* in uno plano sunt (*elem. 11, 7*). Et rectae quae ea puncta iungunt aequales sunt, quia aequalium pentagonon angulos subtendunt 3); et sunt in circulo (*Theodos. sphaer. 1, 1*); ergo quadratum est *λγξυ* (*elem. 4, 6*); ideoque, iunctâ *ξλ*, est $\xi\lambda^2 = 2\,\lambda\gamma^2 = 2\,\lambda\zeta^2$ (*nam rursus λγ λζ aequalium pentagonon λδγκν λμζεδ angulos subtendunt*). Et rectus est angulus *ξλζ*; nam in aequalibus circulis aequales et parallelae sunt *οξ ζλ* (*propos. 51*); ergo $\xi\zeta^2 = \xi\lambda^2 + \zeta\lambda^2 = 3\,\zeta\lambda^2$. Et est propter ea quae supra (*propos. 50*) demonstrata sunt recta *ξζ* sphaerae diametrus; neque enim ad easdem centrorum partes sunt *οξ ζλ*. *Sed propter elem. 13, 12 ξζ* ad *ζλ est proportio lateris trianguli circulo inscripti ad radium, id est ad latus hexagoni eidem circulo inscripti;* ergo sphaerae diametrus ad *ζλ* eandem proportionem habebit quam latus

2) Hoc loco scriptor, quippe quod sine ullo negotio suppleri posse videretur, omisit demonstrare circulum, qui per *ϱ σ τ* transeat, etiam per *υ φ* transire etc.

3) Intelleguntur angulus *λδγ* pentagoni *λδγκν*, angulus *γκξ* pentagoni *γκξθβ* etc.

(sic) B3 (plura hoc loco om. B1), distinx. *Hu* τὰ $\overline{PCTY\Phi}$ AS, τὰ $\overline{\sigma}\ \overline{\varrho}\ \overline{\tau}\ \overline{\upsilon}\ \overline{\varphi}$ B 5. *δὲ περὶ Hu* auctore *Co* pro *δ' ἐπὶ* 5. 6. τὰ $\overline{ZH\Theta K\Lambda}$ — τὰ $\overline{MN\Xi O\Pi}$ AS, distinx. Bs 7. 8. τὰ $\overline{\Gamma\Lambda}$ — τὰ $\overline{\Xi Y}$ AS, distinx. Bs 8. *ἄϱα* add. *Hu* auctore *Co* 9. τὰ $\overline{\Lambda\Gamma\Xi Y}$ AS, distinx. Bs *αὐτὰς* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 11. *κύκλῳ / τετϱάγω // ἄϱα* | A, explev. BS *ἡ* $\overline{\Lambda\Gamma}$ $\overline{\Xi Y}$ A, *ἡ* $\overline{\gamma\lambda\xi\upsilon}$ B1, *ἡ* $\overline{\lambda\gamma\xi\upsilon}$ B3S, *τὸ* corr. *Co* 12. τὰ $\overline{\Xi\Lambda}$ AB3S, τὰ $\overline{\lambda\xi}$ B1 12. 13. τὰ $\overline{\Lambda\Gamma}$ — τὰ $\overline{Z\Lambda}$ AS, distinx. Bs 14. *ἴσαι Hu* auctore *Co* pro *ἴσοι* 17. τὰ $\overline{Z\Xi}$ AS, distinx. Bs 17. 18. *αἱ ΟΞ Co* pro *αἱ* $\overline{EZ}$ 19. *εἰς τὸν* S *Co*, *εἰς τὴν* AB cod. *Co*

ZHΘKΔ κύκλον ἐγγραφομένων. ἔχει δὲ καὶ ἡ ZΔ πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευράν, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου· ἕξει ἄρα καὶ δι' ἴσου ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν λόγον ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου. ἐπεὶ δὲ καὶ τῆς ZΔ λόγος πρὸς τὴν EΔ, ὃν ἡ τοῦ ἑξαγώνου ἔχει πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου (ἄκρον γὰρ αὐτῆς καὶ μέσον λόγον τεμνομένης μεῖζον τμῆμα ἡ EΔ διὰ τὸ πενταγώνου γωνίαν ὑποτείνειν τὴν ZΔ, οὗ πλευρὰ ἡ EΔ), ὡς δὲ ἡ ZΔ πρὸς EΔ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ τοῦ ἐν τῷ ZHΘKΔ πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου



πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ABΓΔE, ἕξει καὶ ἡ τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου λόγον ὃν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ZHΘKΔ, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου· ἕξει ἄρα ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ABΓΔE, ὃν

---

1. $\overline{ZH\Theta}$ $\overline{K\Delta}$ A, coniunx. B ($\overline{\zeta\vartheta}$ $\overline{\kappa\lambda}$ S) *κύκλων* A cod. *Co*, sed in A prima, ut videtur, manus puncto subscripto corr. *κύκλον*, quod

trianguli ad hexagoni circulo $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ inscriptorum. Sed recta $\zeta\lambda$ *latus est pentagoni eidem circulo inscripti; haec igitur* ad trianguli latus eandem *proportionem* habet, quam latus pentagoni ad trianguli; ergo ex aequali diametrus sphaerae ad trianguli latus *circulo* $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ *inscripti* eandem proportionem habebit quam pentagoni latus ad hexagoni [4]. Sed quia $\zeta\lambda$ ad $\varepsilon\delta$ eandem proportionem habet quam latus hexagoni ad decagoni — nam si $\zeta\lambda$ extremâ ac mediâ proportione secetur, maius segmentum est $\varepsilon\delta$, quia $\zeta\lambda$ angulum pentagoni, cuius latus est $\varepsilon\delta$, subtendit [5] — itemque $\zeta\lambda$ $\varepsilon\delta$, *id est latera pentagonon circulis* $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ *inscriptorum* inter se sunt ut latera triangulorum iisdem circulis inscriptorum, habebit *igitur* trianguli latus *circulo* $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ *inscripti* ad latus trianguli *circulo* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ *inscripti* eandem proportionem quam latus hexagoni ad decagoni. Sed, *ut modo demonstravimus*, sphaerae diametrus ad trianguli latus circulo $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ inscripti eandem *proportionem* habet quam pentagoni latus ad hexagoni; *ex aequali* igitur sphaerae diametrus ad latus trianguli circulo $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ inscripti eandem *proportionem* habebit quam

4) Iisdem notis ac supra propos. 57 adnot. 6 adhibitis demonstratio commodius perscribitur hunc in modum. Quoniam est

$\xi\zeta^2 = 3\,\zeta\lambda^2$, et $t^2 = 3\,h^2$, est igitur

$\xi\zeta : \zeta\lambda = t : h$. Sed ex hypothesi in circulo $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ est $\zeta\lambda = p$, ideoque

$\zeta\lambda : t = p : t$; ergo ex aequali est sphaerae diametrus

$\xi\zeta : t = p : h$.

5) Demonstratio plane eadem est ac supra propos. 57 adnot. 3, nisi quod hoc loco pentagonum $\zeta\mu\lambda\delta\varepsilon$ intellegitur.

---

exhibent BS 2. τὴν add. *Hu* auctore *Co* 5. 6. ἔχει δὲ καὶ ἡ *ZΔ* πρὸς τὴν *EΔ* λόγον ὃν ἡ cet. coni. *Co* 6. ἔχει add. *Hu* δεκαγώνου *Co* pro τριγώνου 7. μεῖζων A, corr. BS 8. διὰ τὸ *Hu* pro διὰ τοῦ 9. ἡ *EΔ* *Co* pro ἡ *EΛ* 11. τῶι $\overline{AB}$ $\overline{\Gamma\Delta E}$ A, coniunx. BS 13. ἔχει * δὲ A *ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου· δοθεῖσα ἄρα ἐν ἑκατέρῳ κύκλῳ τοῦ τριγώνου πλευρά, ὥστε καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος οὖσαι δυνάμει τῶν πλευρῶν· δοθέντες ἄρα καὶ οἱ κύκλοι καὶ οἱ ἴσοι αὐτοῖς καὶ παράλληλοι καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς σημεῖα τῶν τοῦ πολυέδρου γωνιῶν, ὅπερ: ~*

95 *Δεῖ οὖν ἐν τῇ συνθέσει δύο ἐκθέσθαι, πρὸς ἃς λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρός τε τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου, ἃς καὶ ἐπὶ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐξεθέμεθα, καὶ γράψαι δύο παραλλήλους κύκλους ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου κειμένους, ὡς τοὺς ΖΗΘΚΔ ΑΒΓΔΕ, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος εἰσὶ δυνάμει τῶν ἐκκειμένων εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ τούτοις ἴσους ἄλλους δύο κύκλους καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὡς τοὺς ΜΝΞΟΠ ΡΣΤΥΦ, καὶ ἐναρμόσαι τὰς ΕΔ ΖΔ ΟΞ ΣΤ πενταγώνων πλευρὰς παραλλήλους, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀναγράψαι τὰ πεντάγωνα, δι᾽ ὧν αἱ τοῦ πολυέδρου συνίστανται γωνίαι. καὶ φανερὸν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὅτι οἱ περιέχοντες κύκλοι τὰς τοῦ δωδεκαέδρου γωνίας οἱ αὐτοί εἰσιν τοῖς περιέχουσιν τὰς τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίας, καὶ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.*

---

2. *αἱ* add. *Hu* 9. *ἃς* AB cod. *Co*, *ὡς* S 14. *τούτοις* B[3]S, *τούτους* A, *τουτ* B[1] 16. *ὡς τοὺς Hu* auctore *Co* pro *ὡς τοῦ* 17. *πλευρὰν* AB, corr. S 20. 21. *δωδεκαέδρου — τὰς τοῦ* om. Paris. 2368 S 24. post *ἐγγραφομένων* add. *παππου συναγωγης τριτον εστιν δε των επιπεδων και στερεων και* ///// A[3], *τῆς τοῦ πάππου ἀλεξανδρέως συναγωγῆς τρίτου τέλος* B, *τέλος τοῦ τρίτου* S

latus pentagoni ad decagoni[6]. *Et data est sphaerae diametrus;* ergo *etiam* latera triangulorum circulis $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ inscriptorum data sunt, itaque etiam circulorum radii, quorum quadrata tertiae partes sunt quadratorum ex lateribus *triangulorum* (*elem. 13, 12*); ergo etiam circuli $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, et qui iis aequales et paralleli sunt, *circuli* $\mu\nu\xi o\pi$ $\varrho\sigma\tau\upsilon\varphi$ dati sunt, itemque quae in his sunt puncta angulorum polyedri[7]), q. e. d.

In compositione igitur oportet duas *rectas* exponere, quarum ad unam diametrus sphaerae proportionem eandem habeat quam pentagoni latus ad hexagoni, et ad alteram quam pentagoni latus ad decagoni, quas quidem rectas etiam in icosaedro exposuimus (*p. 155*), et in superficie sphaerae ad eandem centri partem duos circulos, velut $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, ita describere, ut quadrata ex eorum radiis tertiae partes sint quadratorum ex rectis expositis, et his *circulis* duos alios aequales et parallelos ad alteras centri sphaerae partes, velut $\mu\nu\xi o\pi$ $\varrho\sigma\tau\upsilon\varphi$, *describere,* et *in unoquoque* latera pentagonon *aequilaterorum* $\varepsilon\delta$ $\zeta\lambda$ $o\xi$ $\sigma\tau$ parallela construere, et ex iis pentagona describere, unde polyedri anguli constituantur[8]). Atque ex constructione apparet circulos qui dodecaedri angulos continent eosdem esse atque illos qui icosaedri (*propos. 57*), et eundem circulum comprehendere triangulum icosaedri et pentagonum dodecaedri in eandem sphaeram inscriptorum (*V propos. 48*).

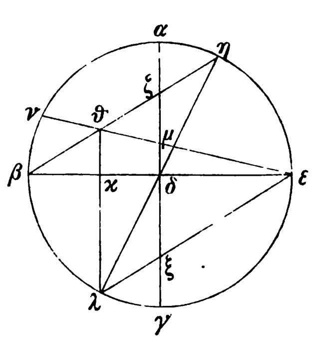
6) Sint t t' latera triangulorum circulis $\zeta\eta\vartheta\kappa\lambda$ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ inscriptorum, D diametrus sphaerae, p h d latera pentagoni, hexagoni, decagoni eidem circulo inscriptorum; haec igitur erit brevior demonstratio. Ostendimus (p. 161 cum adnot. 5) esse
$\zeta\lambda : \varepsilon\delta = h : d$, et ex hypothesi est
$\zeta\lambda : \varepsilon\delta = t : t'$; ergo
$t : t' = h : d$. Sed erat, ut supra (adnot. 4) demonstravimus,
$D : t = p : h$; ergo ex aequali
$D : t' = p : d$.

7) Conf. p. 145 adnot. ** ad propos. 54.

8) Reliquam demonstrationem, a scriptore tamquam consentaneam omissam, supplet *Co.*

Ἄλλως τὸ δέκατον θεώρημα ἐν τῷ τρίτῳ τῆς τοῦ Πάππου συναγωγῆς καὶ τὴν ἀπόδειξιν περιέχον καὶ τὴν ὀργανικὴν κατασκευὴν τοῦ τε διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον.

96 Ἔστω κύκλος ὁ *ΑΒΓ* περὶ κέντρον τὸ *Δ*, διάμετροι δὲ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις ἔστωσαν αἱ *ΑΔΓ ΒΔΕ*, καὶ διήχθωσαν αἱ *ΕΜΝ ΒΘΖΗ*, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν *ΘΖ* τῇ *ΖΗ*· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ *ΕΔ* πρὸς *ΔΜ*, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς *ΕΔ* κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς *ΔΖ* κύβον.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ *ΗΔ* καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ *Λ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΛΘ* καὶ ἡ *ΛΕ*· παράλληλος ἄρα ἡ *ΘΛ* τῇ *ΑΔΓ* καὶ ἡ *ΒΗ* τῇ *ΛΕ*. ἐπεὶ οὖν ἡ *ΛΚ* ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ *ΒΛΕ* κάθετος ἦκται ἐπὶ τὴν *ΒΔΕ*, ἡ *ΚΛ* ἄρα μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῶν *ΕΚ ΚΒ*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΚ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΕΚ* πρὸς *ΚΒ*, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΖ*, οὕτως ἡ *ΔΖ* πρὸς *ΔΜ*. κοινοῦ ἄρα προσληφθέντος λόγου τοῦ τῆς *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΔΖ*, ἔσται ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΔΜ*, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς *ΔΖ*, τουτέστιν ὡς ἡ *ΕΔ* πρὸς *ΔΜ*, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς *ΕΔ* κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς *ΔΖ*.

---

1. cap. 96—104, Pappi collectioni a posteriore quodam scriptore inserta, om. *Co*, e codice Guelferbytano ediderunt G. G. Bredow et Nickelius, Epistolae Parisienses, Lipsiae 1812, p. 187—200 ἐν τῷ δ^{ω} et superscr. γ B[1] 4. διάμετροι A[2] ex διάμετρ** 6. αἱ *ΕΜΘ* Bredow, αἱ *ΕΜΘΝ Hu* (scilicet in productā *ΕΜ* a scriptore praeter punctum *Θ* etiam *Ν* poni posterior demonstratio, quae habet litteras *Ξ* etc., docet; puncti autem *Ν* locus esse non potest nisi in circumferentia circuli) 12. ἡ *ΠΔ** καὶ A 17. ἡμικυκλωι A, ἡμιολίῳ Guelf., corr. BS 21. πρὸς τὸ *ΔΔΖ* οὕτως ABS, corr. V[2] *Sca*

Aliter decimum problema (*cap.* 27) in tertio libro Pappi collectionis, quod et demonstrationem et organicam constructionem duplicationis cubi et duarum mediarum proportionalium continet.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma$ circa centrum δ, cuius diametri $\alpha\delta\gamma$ $\beta\delta\varepsilon$ sibi invicem perpendiculares sint, et rectae $\varepsilon\mu\nu$ $\beta\vartheta\zeta\eta$ ita ducantur, ut sit $\vartheta\zeta = \zeta\eta$; dico esse $\varepsilon\delta : \delta\mu = \varepsilon\delta^3 : \delta\zeta^3$. Prop. 59

Iungatur recta $\eta\delta$ et ad λ *punctum circumferentiae* producatur, et iungantur rectae $\lambda\vartheta$ $\lambda\varepsilon$; ergo $\vartheta\lambda$ parallela est rectae $\alpha\delta\gamma$ et $\beta\eta$ rectae $\lambda\varepsilon$*). Iam quia in semicirculo $\beta\lambda\varepsilon$ perpendicularis ad $\beta\delta\varepsilon$ *diametrum* ducta est $\lambda\kappa$, haec igitur media proportionalis est rectarum $\varepsilon\kappa$ $\kappa\beta$ (*elem. 6, 8 coroll.*); est igitur (*elem. 5 def. 10. 6, 20 coroll. 1. 2*)

$\varepsilon\kappa^2 : \kappa\lambda^2 = \varepsilon\kappa : \kappa\beta$, id est

$\beta\delta^2 : \delta\zeta^2 = \delta\zeta : \delta\mu$**). Ergo multiplicatione per proportionem $\beta\delta : \delta\zeta$ factâ erit

$\beta\delta^3 : \delta\zeta^3 = \beta\delta : \delta\mu$, id est (*quia* $\beta\delta = \varepsilon\delta$)

$\varepsilon\delta : \delta\mu = \varepsilon\delta^3 : \delta\zeta^3$.

*) Rectas $\vartheta\lambda$ $\alpha\gamma$ parallelas esse eadem ratione ac supra p. 67 inde efficitur, quod est $\vartheta\zeta = \zeta\eta$, et $\lambda\delta = \delta\eta$; alteras autem $\beta\eta$ $\lambda\varepsilon$ parallelas esse apparet, quia $\lambda\eta$ $\beta\varepsilon$ diametri sunt. Ceterum prolixior demonstratio infra cap. 99 sequitur.

**) Hoc quomodo efficiatur, infra cap. 100 longiore ambitu ostendit scriptor; breviorem autem demonstrationem, auctore Nickelio, hunc in modum addamus. Propter triangulorum $\beta\delta\zeta$ $\varepsilon\kappa\lambda$ similitudinem est

$\frac{\varepsilon\kappa}{\kappa\lambda} = \frac{\beta\delta}{\delta\zeta}$, ideoque $\frac{\varepsilon\kappa^2}{\kappa\lambda^2} = \frac{\beta\delta^2}{\delta\zeta^2}$. Sed rursus propter triangulorum similitudines est

$\frac{\beta\delta}{\delta\zeta} = \frac{\beta\kappa}{\kappa\vartheta}$, et $\frac{\delta\mu}{\varepsilon\delta} = \frac{\kappa\vartheta}{\varepsilon\kappa}$; ergo per formulam compositae proportionis

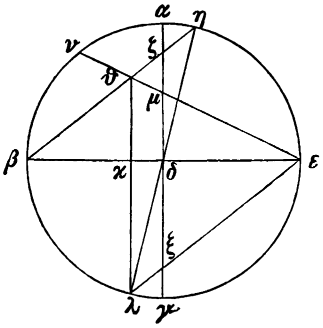
$\frac{\beta\delta \cdot \delta\mu}{\delta\zeta \cdot \varepsilon\delta} = \frac{\beta\kappa}{\varepsilon\kappa}$, id est, quia $\beta\delta = \varepsilon\delta$, atque e contrario

$\frac{\delta\zeta}{\delta\mu} = \frac{\varepsilon\kappa}{\kappa\beta}$. Sed erat $\frac{\varepsilon\kappa}{\kappa\beta} = \frac{\varepsilon\kappa^2}{\kappa\lambda^2} = \frac{\beta\delta^2}{\delta\zeta^2}$; ergo

$\beta\delta^2 : \delta\zeta^2 = \delta\zeta : \delta\mu$.

Nickel 22. 23. λόγου τοῦ τῆς $\overline{Z\Delta}$ πρὸς τὴν τρίτην ἀνάλογον τῶν $\overline{B\Delta}$ $\overline{\Delta Z}$ ABS, corr. *Hu* auctore Bredowio 25. τὴν ante ΔM add. B Guelf. ὁ add. BS

97 *Ὀργανικῶς δὲ κατασκευασθήσεται τὸν τρόπον τοῦτον.* *Ἔστω τύμπανον πρὸς κανόνα ἀπωρθωμένον, ἐν ᾧ καταγραφέντος κύκλου κέντρῳ καὶ διαστήματι ἐλάττονι τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τυμπάνου, ὡς τοῦ ΑΒΓ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις ἤχθωσαν διὰ τοῦ κέντρου αἱ ΒΔΕ ΑΔΓ, καὶ κατὰ τὸ Β σημεῖον τρηματίου γενομένου ἐμβεβλήσθω εἰς αὐτὸ ἀξόνιον κυκλοτερές, καὶ περὶ τὸ ἀξόνιον περιβεβλήσθω κανὼν διατρηθεὶς καὶ αὐτός, ὡς ὁ ΒΘΖΗ, ὥστε εὐλύτως περὶ τὸ Β κέντρον περιάγεσθαι, περόνης ἐμβληθείσης εἰς τὸ ἀξόνιον τῆς κατεχούσης ἐν τῇ περιαγωγῇ τὸν κανόνα.*



τούτων δὲ οὕτως γενομένων κύβος κύβου πολλαπλάσιος καθ' ὁποιονοῦν ἀριθμὸν ῥᾳδίως κατασκευασθήσεται. προκείσθω δὴ διπλασίονα κατασκευάσαι· λαβόντες γὰρ τὴν ΔΕ διπλασίονα τῆς ΔΜ ἐπιζεύξομεν [κανόνι] τὴν ΕΜΝ, καὶ τὸν κανόνα τὸν ΒΘΖΗ κινήσομεν περὶ τὸ Β κέντρον, ἕως ἂν ἡ [αὐτῷ μέσῃ γραμμὴ] μεταξὺ τῶν Θ Η διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΘΖ τῇ ΖΗ. τοιαύτην γὰρ θέσιν τοῦ κανόνος λαβόντος ἀφορισθήσεται ἡ ΔΖ, ἀφ' ἧς ὁ ζητούμενος κύβος ἀναγραφήσεται ἀκολούθως τῇ ἀποδείξει.

---

1. *τοῦτον τὸν τρόπον* B^1 Guelf. (sed in B tertia vel alia quaedam manus verum ordinem restituit) 5. *ἀλλήλαις ἤχθωσαν* AB^3S, inverso ordine B^1 Guelf. 8. *ὁ* $\overline{ΒΘ}$ | $\overline{ΖΗ}$ A(S), coniunx. B 12. *πολυπλάσιος* Bredow 15. *δὴ* *Hu* pro *δὲ* *διπλασίονα* AB^3S Guelf., *διπλάσιον* B^1 16. *τὴν* $\overline{ΔΕ}$ *διπλάσιον* ABS, corr. *Hu* 17. *κανόνι* et 20. 21. *αὐτῷ μέσῃ γραμμῇ*, manifesta interpretamenta, del. *Hu* (pro *αὐτῷ μέσῃ* B^1 habet *κάτω*, ad quod B^2 addit *μέσῃ*) 18. *τὴν ΕΜΘ* Bredow (vide ad p. 164, 6) 21. *τῶν* $\overline{ΘΗ}$ A, distinx. BS 23. *ὥστε — τῇ ΖΗ* abundanter posita perinde ac similia illa supra p. 64, 4 (vid. adnot.)

Instrumenti autem ope constructio hunc in modum fiet. Sit tabula plana rotunda[1]), in eaque describatur circulus, velut $\alpha\beta\gamma$, cuius radius minor sit radio tabulae, et per centrum sibi invicem perpendiculares ducantur rectae $\beta\delta\varepsilon$ $\alpha\delta\gamma$, et in foramen in puncto β factum inseratur axiculus teres, ad quem regula itidem perforata, velut $\beta\vartheta\zeta\eta$, ita applicetur, ut commode circa centrum β circumagatur, fibulâ *nempe* in axiculum infixâ, quae regulam in circumactione detineat[2]). Quo facto cubus cubi iuxta quemlibet numerum multiplus facile construetur. Iam propositum sit duplum cubum construere; sumemus igitur $\delta\varepsilon = 2\delta\mu$***) et iungemus rectam $\varepsilon\mu\nu$, et regulam $\beta\vartheta\zeta\eta$ circa β centrum movebimus, donec *portio*, quae est inter ϑ η *puncta sectionis cum recta* $\varepsilon\nu$ *et cum circuli circumferentia*, bifariam dividatur in ζ puncto *sectionis cum recta* $\alpha\delta$, ita ut sit $\vartheta\zeta = \zeta\eta$. Nam si talem positionem regula sumpserit, definietur recta $\delta\zeta$, ex qua *duplus* qui quaeritur cubus describetur convenienter *superiori* demonstrationi.

1) "Verti τύμπανον *tabulam rotundam*, quia ei centrum tribuitur. Fortasse veteres mathematici eiusmodi tabulam in usum quotidianum semper ad manus habebant. Sed non opus est, ut sit rotunda: quaevis alia, modo sit plana (id enim verba πρὸς κανόνα ἀπωρθωμένον significant) huic usui inservire poterit, ut ex constructione facile patet". Nickel.

2) Περόνην igitur dicit clavulum, qui, velut rotam in axe vehiculi, ita regulam in axiculo detineat. Aliter hunc locum interpretatur Bredowius p. 191: "inseratur foramini axis parva (*sic*) circularis, cui applicetur regula $\beta\vartheta\zeta\eta$, itidem perforata, ut, acu per foramen eius in axem immisso, facile — circumagi possit".

***) Haec quisquis scripsit, aut ignorantiae aut socordiae crimini obnoxius est; nam cum ex proximis verbis cubum, cuius latus est $\delta\zeta$, duplicari appareat, haec ipsa recta $\delta\zeta$ non data, sed quaerenda etiamnunc supponitur. Poterat scriptor, si suam rationem sine errore sequi volebat, rectam $\delta\varepsilon$ datam esse supponere, et hinc dimidium cubum invenire, sic fere: προκείσθω δὴ ἥμισυν κατασκευάσαι· λαβόντες γὰρ τῆς ΔΕ ἡμίσειαν τὴν ΔΜ ἐπιζεύξομεν cet.; sed maluit neglegentius scribere, hanc quidem, ut opinor, sententiam amplexus: Sumatur quaelibet recta $\delta\mu$ et, ut supra legimus, fiat constructio; tum, ut $\delta\zeta$ ad $\delta\varepsilon$, ita fiat latus dati cubi ad latus eius qui quaeritur, id est dupli. Conf. etiam cap. 103 sq.

98 *Ὑπομνηματικώτερον δὲ συνταχθείη ἂν τὸ αὐτὸ πρόβλημα οὕτως.*

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΕ περὶ κέντρον τὸ Δ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἀλλήλαις διηγμέναι αἱ ΑΔΓ ΒΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἐντὸς προσπίπτουσα ἡ ΒΖΗ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΕ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα μείζων ἐστὶ τῆς ΒΗ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ἡμισείας μείζων· μείζων ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΗ. ἡ δὲ ΒΖ μείζων ἐστὶν τῆς ΒΔ· πολλῷ ἄρα ἡ ΒΖ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΗ, καὶ πολλῷ ἄρα καὶ τῆς ΖΗ.

Ἐπεὶ ἡ ΒΖ μείζων ἐστὶν τῆς ΖΗ, ἴση τῇ ΖΗ κείσθω ἡ ΘΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὲ τῆς ΔΖ.

99 *Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΘ καὶ ἡ ΛΕ· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΛ τῇ ΑΔΓ καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΛΕ.*

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν η μὲν ΘΖ τῇ ΖΗ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΔΗ διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι, ἔστιν ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς τὴν ΔΗ. ἐὰν τριγώνου ἀνάλογον τμηθῶσιν αἱ πλευραί, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπήν ἐστι τοῦ τριγώνου πλευράν· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΛ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΒΔΗ δυσὶ ταῖς ΛΔΕ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΗ τῇ ὑπὸ ΛΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ βάσις ἡ ΒΗ βάσει τῇ ΛΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΛΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΕΛ. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΛΕ.

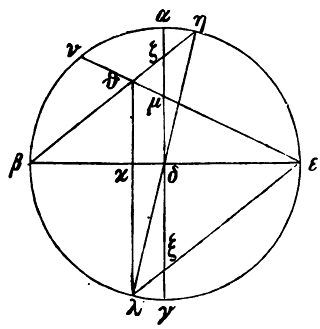
100 *Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΔΓ, αἱ ὑπὸ ΛΚΔ ΚΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὧν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ*

---

1. *Μαθηματικώτερον* Nickel 1. 2. post *πρόβλημα* add. *ἤι* A (B Guelf.), *ἡ* S, del. Nickel 3. *ὁ ΑΒΓΔ* ABS, *ὁ ΑΒΓ* Bredow, corr. *Hu* 5. *προσπίπτουσα ἡ Hu*, *προσπίπτουσαν* ABS, *προσπίπτουσα* Nickel, *προσπιπτέτω* V[2] 10. *τῆς ἡμισείας* add. V[2] Nickel *καὶ πολλῷ ἄρα* add. *Hu* (nisi forte rectius *Sca*, deletis *τῆς ΒΗ*, breviore demonstratione scribit *πολλῷ ἄρα ἡ ΒΖ μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ΖΗ*, in quibus denique *ἐστὶ καὶ* emendandum esse videtur in *ἐστὶν*) *καὶ τῆς ΖΗ* AB[3]S, *καὶ τῆς ηζ* B[1] Guelf. 14. *γὰρ ἡ ΗΔ* V[2] *Sca* Nickel pro *γὰρ η Δ* 19. 20. *ἐὰν δὲ τριγώνου ἀνάλογον τμηθῶσιν δύο πλευραί* coni. Bredow 20. *τμηθῶσιν η πλευραι η επὶ* A, *τμηθῶσι η πλευρα ἡ ἐπὶ*

Sed ratione ad instituendos *tirones* magis accomodata idem problema sic componere licet.

Sit circulus $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ circa centrum δ, et sibi invicem perpendiculares ducantur rectae $\alpha\delta\gamma$ $\beta\delta\varepsilon$, et a puncto β ad circuli circumferentiam cadat recta $\beta\zeta\eta$; est igitur $\beta\zeta > \zeta\eta$.



Quoniam diametrus $\beta\varepsilon$ maior est quam $\beta\eta$, etiam dimidia maior est dimidiâ; ergo $\beta\delta > \frac{1}{2}\beta\eta$. Sed, *quia $\beta\zeta$ subtendit angulum rectum $\beta\delta\zeta$* †), est $\beta\zeta > \beta\delta$; multo igitur est $\beta\zeta > \frac{1}{2}\beta\eta$. *Sed quia* $\frac{1}{2}\beta\eta < \beta\zeta$, *est igitur* $\frac{1}{2}\beta\eta > (\beta\eta - \beta\zeta)$, *id est* $> \zeta\eta$; ergo multo est $\beta\zeta > \zeta\eta$.

Quia est $\beta\zeta > \zeta\eta$, ponatur $\vartheta\zeta = \zeta\eta$; dico esse $\varepsilon\delta : \delta\mu = \varepsilon\delta^3 : \delta\zeta^3$.

Iungatur enim $\eta\delta$ et producatur ad λ *punctum circumferentiae*, et iungantur $\lambda\vartheta$ $\lambda\varepsilon$; est igitur $\vartheta\lambda \parallel \alpha\gamma$, et $\beta\eta \parallel \lambda\varepsilon$.

Quoniam enim ex hypothesi est $\vartheta\zeta = \zeta\eta$, et $\lambda\delta = \delta\eta$ (sunt enim radii circuli), est $\vartheta\zeta : \zeta\eta = \lambda\delta : \delta\eta$. Quodsi trianguli latera proportionaliter secantur, recta sectionis puncta iungens reliquo *trianguli lateri* parallela est (*elem.* 6, 2); ergo *in triangulo* $\vartheta\eta\lambda$ rectae $\vartheta\lambda$ parallela est $\zeta\delta$. Et quia est $\beta\delta = \lambda\delta$, et $\delta\eta = \delta\varepsilon$, et $\angle\, \beta\delta\eta = \angle\, \lambda\delta\varepsilon$, est *igitur* etiam basis $\beta\eta$ basi $\lambda\varepsilon$ ac triangulum triangulo aequale, et reliqui anguli, quos aequalia latera subtendunt, uterque utrique, aequales sunt[3]); ergo est $\angle\, \varepsilon\lambda\eta = \angle\, \lambda\eta\beta$, et $\angle\, \eta\beta\varepsilon = \angle\, \beta\varepsilon\lambda$. Et sunt alterni; ergo parallelae sunt $\beta\eta$ $\lambda\varepsilon$ (*elem.* 1, 27).

Sed quia parallelae sunt $\varkappa\lambda$ $\delta\gamma$, summa angulorum $\lambda\varkappa\delta$ $\varkappa\delta\gamma$ duobus rectis aequalis est. Et rectus est angulus $\varkappa\delta\gamma$;

†) Haec commode addit V².

3) Haec est elementorum I propositio 4 paene verbotenus repetita; iniuria autem post δύο αἱ ΒΔΗ δυσὶ ταῖς ΛΔΕ omisit scriptor ἑκατέρα ἑκατέρᾳ.

B¹, corr. B³S 25. εκατερα εκατερα A, accentus etc. add. BS, ἑκατέρᾳ om. Bredow 26. ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{HBE}$ AB³S, ἡ δὲ ὑπὸ $\overline{\beta\delta\varepsilon}$ B¹, ἡ δὲ ὑπὸ $HB\Delta$ Bredow 27. ἄρα ἡ $\overline{\beta\eta}$ V² Sca Bredow, ἄρα ἡ $\overline{EH}$ ABS

ΚΔΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΔ ἄρα ὀρθή ἐστιν· πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΒΛΕ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΛΚ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΛΚ τῶν ΕΚ ΚΒ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΒ. καὶ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΒΖ τῇ ΛΕ, ἡ δὲ ΘΛ τῇ ΖΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΛΚΕ τρίγωνον τῷ ΒΚΘ, τὸ δὲ ΒΚΘ τῷ ΒΔΖ, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΘΚΕ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΜΔΕ, τὸ δὲ ΛΚΕ τῷ ΞΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἕκαστον ἑκάστῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ὡς ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. πάλιν ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΛΚΕ τρίγωνον τῷ ΒΚΘ, τὸ δὲ ΘΚΕ τῷ ΜΔΕ, καὶ τὸ ΛΚΕ τῷ ΞΔΕ τριγώνῳ διὰ τὸ τὰς παραλλήλους ἰσογώνια αὐτὰ ποιεῖν, ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΔΞ. ὁμοίως καί, ἐπεὶ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΔΜ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΔΞ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΜΔ, καὶ ἐναλλὰξ

---

1. ἡ ὑπὸ $\overline{ΛΚΔ}$ Bredow, ἡ om. ABS ἄρα add. V[2] Nickel 8. 9. ἰσογώνιον οὖν ἕκαστον Bredow 16. τὸ om. AB Guelf., add. S Nickel 17. ἐπεὶ — 20. ποιεῖν] haec verba, ut prorsus otiosa, secludit Nickel, neque tamen aliena sunt ab huius interpolatoris mediocri doctrina rudique verborum turba 18. τῷ ΒΚΘ Sca Bredow, τῷ $\overline{ΒΚ}$ A, τῷ $\overline{βκ}$ BS 21. τὴν (ante ΚΒ οὕτως) om. A[1], add. A[2] super vs. (BS) 23. 24. τὴν ante ΕΔ οὕτως et ante ΔΞ add. B Guelf. 27. πρὸς τὴν $\overline{ΜΔ}$ AS, πρὸς τὴν $\overline{μα}$ B, πρὸς τὴν ΔΜ Bredow

ergo etiam $\lambda\varkappa\delta$ rectus, ideoque $\lambda\varkappa$ ipsi $\beta\varepsilon$ perpendicularis est. Et quoniam in semicirculo $\beta\lambda\varepsilon$ perpendicularis *ad diametrum* ducta est $\lambda\varkappa$, haec ipsa rectarum $\varepsilon\varkappa$ $\varkappa\beta$ media proportionalis est (*elem. 6, 8 coroll.*); est igitur (*elem. 5 def. 10. 6, 20 coroll. 1. 2*)

$$\varepsilon\varkappa^2 : \varkappa\lambda^2 = \varepsilon\varkappa : \varkappa\beta.$$

Et quia $\beta\zeta$ $\lambda\varepsilon$ itemque $\vartheta\lambda$ $\zeta\xi$ parallelae sunt, est *igitur* $\Delta\,\lambda\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\vartheta\varkappa\beta$, et $\Delta\,\beta\varkappa\vartheta \sim \Delta\,\beta\delta\zeta$, et $\Delta\,\vartheta\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\mu\delta\varepsilon$, et $\Delta\,\lambda\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\xi\delta\varepsilon$; ergo, quia in triangulis aequiangulis *latera circum aequales angulos proportionalia sunt* (*elem. 6, 4*), *itemque quadrata quae ex his fiunt* (*elem. 6, 22*), est

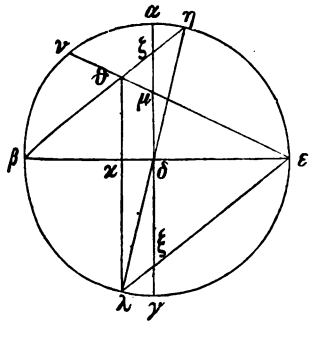
$\varepsilon\varkappa^2 : \varkappa\lambda^2 = \beta\varkappa^2 : \varkappa\vartheta^2$, et

$\beta\varkappa^2 : \varkappa\vartheta^2 = \beta\delta^2 : \delta\zeta^2$; ergo

$\varepsilon\varkappa^2 : \varkappa\lambda^2 = \beta\delta^2 : \delta\zeta^2$. Sed erat $\varepsilon\varkappa^2 : \varkappa\lambda^2 = \varepsilon\varkappa : \varkappa\beta$; ergo est etiam

$\varepsilon\varkappa : \varkappa\beta = \beta\delta^2 : \delta\zeta^2$.

Rursus quia est $\Delta\,\lambda\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\vartheta\varkappa\beta$, et $\Delta\,\vartheta\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\mu\delta\varepsilon$, et $\Delta\,\lambda\varkappa\varepsilon \sim \Delta\,\xi\delta\varepsilon$ (etenim, *ut modo demonstravimus*, propter parallelas fiunt aequiangula), est



$\varepsilon\varkappa : \varkappa\lambda = \beta\varkappa : \varkappa\vartheta$, et vicissim

$\varepsilon\varkappa : \beta\varkappa = \varkappa\lambda : \varkappa\vartheta$; atque

$\varepsilon\varkappa : \varkappa\lambda = \varepsilon\delta : \delta\xi$, et vicissim

$\varepsilon\varkappa : \varepsilon\delta = \varkappa\lambda : \delta\xi$; similiter etiam

$\varepsilon\varkappa : \varkappa\vartheta = \varepsilon\delta : \delta\mu$, et vicissim

$\varepsilon\varkappa : \varepsilon\delta = \varkappa\vartheta : \delta\mu$; ergo ex aequali

$\varkappa\lambda : \delta\xi = \varkappa\vartheta : \delta\mu$ ††), et vicissim

††) Apparet hoc loco scriptorem ineptis ambagibus uti, idque merito notat V[2] his verbis: "Non est τὸ δι' ἴσου (*elem. 5 def. 18*). dic brevius: ut $\varkappa\lambda$ ad $\delta\xi$, ita $\varkappa\varepsilon$ ad $\delta\varepsilon$, hoc est $\varkappa\vartheta$ ad $\delta\mu$; ergo ut $\varkappa\lambda$ ad $\delta\xi$, ita $\varkappa\vartheta$ ad $\delta\mu$". Conf. etiam supra p. 165 adnot. **.

ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἡ ΞΔ πρὸς ΔΜ. ἀλλʼ ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΞΔ πρὸς τὴν ΔΜ. ἴση δὲ ἡ ΞΔ τῇ ΔΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ. ἀλλʼ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ.

101 *Ὅτι δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΞΔ τῇ ΔΖ δῆλον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΖΗ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΔΞΔ τρίγωνον τῷ ΖΔΗ. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστιν τὰ ΔΞΔ ΖΔΗ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΞΔΔ ΔΔΞ ταῖς ὑπὸ ΖΔΗ ΔΗΖ δυσὶν ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΔΔ μιᾷ πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἴσην, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ τῶν ὑποτεινουσῶν τὰς ἴσας γωνίας. ἴση ἄρα ἡ ΔΞ τῇ ΔΖ.*

102 *Κοινοῦ ἄρα προσληφθέντος λόγου τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔσται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ΕΔ πρὸς ΜΔ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ.*

103 *Καὶ τούτοις ἀκολούθως δύο τῶν ΕΔ ΔΜ δοθεισῶν ληψόμεθα τὰς δύο μέσας ἀνάλογον ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἐκκείσθωσαν γὰρ ταῖς ΕΔ ΔΖ ΔΜ ἴσαι αἱ ΕΔ ΔΖ ΔΜ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ, δῆλον ὡς ἡ ΔΜ οὐκ ἔστι τρίτη ἀνάλογον τῶν ΕΔ ΔΖ.*

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογον τῶν ΕΔ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΕΔ ΔΖ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ. ἀλλʼ ἦν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΔΜ· διʼ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΔ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, ὅπερ

---

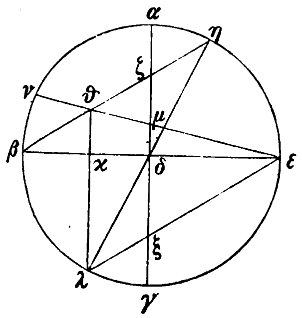
1. 2. *ἄλλως ἡ ΔΚ* A[1], corr. man. rec. (BS) 2. 3. *ἄρα ΕΚ* AS, *ἡ* add. B Guelf. 6. *τῆς* (ante *ΔΖ*) om. AB[1]S, add. B[3] et, ut videtur, Guelf. 10. *γωνίας τὰς ὑπὸ ΞΛΔ ΛΑΞ* ABS, *γωνίας τὰς ὑπὸ ξλδ λδξ* V[2], corr. Bredow 11. *ταῖς ὑπὸ ζδη* V[2] *Sca* Bredow pro *ταῖς ὑπὸ ΞΔΗ* 12. *λοιπαῖς ἴσαις* AB[1]S, corr. B[3] 14. *ἡ ΔΞ τῆι ΛΞ* ABS, *ἡ δζ τῇ λξ* V[2] *Sca* (voluerunt *ἡ ΔΖ τῇ ΔΞ*), corr. Bredow 15. 16. *τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ*] *τῆς ΖΔ πρὸς τὴν τρίτην ἀνάλογον τῶν*

$\lambda\varkappa : \varkappa\vartheta = \xi\delta : \delta\mu$. Sed est $\lambda\varkappa : \varkappa\vartheta = \varepsilon\varkappa : \varkappa\beta$; ergo $\varepsilon\varkappa : \varkappa\beta = \xi\delta : \delta\mu$. Sed est $\xi\delta = \delta\zeta$; ergo $\varepsilon\varkappa : \varkappa\beta = \zeta\delta : \delta\mu$. Sed erat $\varepsilon\varkappa : \varkappa\beta = \beta\delta^2 : \delta\zeta^2$; ergo $\beta\delta^2 : \delta\zeta^2 = \zeta\delta : \delta\mu$.

Esse autem $\xi\delta = \delta\zeta$ apparet. Quoniam enim parallelae sunt $\lambda\xi$ $\zeta\eta$, triangulum $\lambda\xi\delta$ triangulo $\eta\zeta\delta$ aequiangulum est. Et quia sunt duo triangula $\lambda\xi\delta$ $\eta\zeta\delta$ duos angulos $\xi\delta\lambda$ $\delta\lambda\xi$ duobus $\zeta\delta\eta$ $\delta\eta\zeta$, *utrumque utrique*, aequales habentia, unumque latus $\lambda\delta$ uni lateri $\delta\eta$ aequale, reliqua igitur etiam latera reliquis, utrumque utrique, quae aequales angulos subtendunt, aequales erunt (*elem.* 1, 26); ergo $\delta\xi = \delta\zeta$.

Multiplicatione igitur per proportionem $\beta\delta : \delta\zeta$ factâ erit
$$\frac{\zeta\delta}{\delta\mu}\cdot\frac{\beta\delta}{\delta\zeta} = \frac{\beta\delta^2}{\delta\zeta^2}\cdot\frac{\beta\delta}{\delta\zeta},\ \textit{id est}\ \frac{\beta\delta}{\delta\mu} = \frac{\beta\delta^3}{\delta\zeta^3},\ \text{id est}$$
$\varepsilon\delta : \delta\mu = \varepsilon\delta^3 : \delta\zeta^3$.

Iam secundum haec *quae demonstravimus*, datis duabus $\varepsilon\delta$ $\delta\mu$, sumemus duas medias proportionales in continua analogia. Exponantur enim ipsis $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$ $\delta\mu$ aequales $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$ $\delta\mu$. Et quoniam *modo* demonstravimus esse $\beta\delta^2$, *id est*



$$\varepsilon\delta^2 : \delta\zeta^2 = \delta\zeta : \delta\mu,$$
apparet $\delta\mu$ non esse tertiam proportionalem rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$.

Nam si fieri potest, sit $\delta\mu$ tertia proportionalis rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$. Iam quia $\delta\mu$ tertia est proportionalis rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$, est $\varepsilon\delta : \delta\zeta = \delta\zeta : \delta\mu$; ergo etiam $\varepsilon\delta^2 : \delta\zeta^2 = \varepsilon\delta : \delta\mu$. Sed erat $\varepsilon\delta^2 : \delta\zeta^2 = \delta\zeta : \delta\mu$; ergo ex aequali[4]) est $\varepsilon\delta : \delta\mu = \delta\zeta : \delta\mu$; ergo et $\varepsilon\delta$ et $\delta\zeta$ ad $\delta\mu$ eandem proportionem habet, ideoque est $\varepsilon\delta = \delta\zeta$ (*elem.* 5, 9), id quod fieri non

4) Similiter ac supra (adnot. ++) errorem scriptoris notat V[2]: "non est *δι᾽ ἴσου*".

$\overline{B\Delta}$ $\overline{\Delta Z}$ ABS (nisi quod S $\overline{\varepsilon\zeta}$ pro extremo $\overline{\Delta Z}$), *τῆς* $\overline{B\Delta}$ *πρὸς ΖΔ Sca* 16. 17. *ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ Sca* Bredow pro *ὁ ἀπὸ τῆς* $\overline{E\Delta}$ 25. *ἔστω* manus quaedam recentior diversa a *Sca* in S, *ἔστιν* ABS 28. *ἄλλην ὡς* A[1], corr. man. rec. (BS), *ἣν* om. Bredow *ἀδύνατον (μείζων γὰρ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ)· οὐκ ἄρα ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν τῶν ΕΔ ΔΖ.*

Εἰλήφθω τῶν ΕΔ ΔΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΟΠ. ἐπεὶ οὖν τῶν ΕΔ ΔΖ τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΟΠ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΟΠ. ἀλλ' ἦν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΟΠ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΔΜ. ἀλλ' ἦν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΔΜ· αἱ ΕΔ ΔΖ ΟΠ ΔΜ ἄρα τέσσαρες οὖσαι ἐν τῇ συνεχεῖ καὶ ἐφεξῆς ἀναλογίᾳ εἰσί· τῶν ΕΔ ΔΜ ἄρα δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΔΖ ΟΠ.

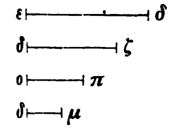
104 *Τῆς δὲ ἀποδείξεως ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς ἀκολούθως τῇ ὀργανικῇ κατασκευῇ γενομένης δῆλον ὡς ἡ μὲν ὀργανικὴ κατασκευή, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων καὶ λόγου πρὸς ἀλλήλας τῶν εὐθειῶν δεδομένου, εὑρίσκει τὰς δύο μέσας ἀνάλογον, ἐφ' ὧν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δὲ ἀπόδειξις, ὑποστησαμένη τινὰ εὐθεῖαν καὶ ἄλλας δύο λαβοῦσα διὰ τῆς τῶν γραμμῶν καταγραφῆς ἐλάττονας μὲν τῆς πρώτης ἐφεξῆς δὲ αὐτῇ κειμένας καὶ ἀλλήλαις ἀνίσους, εὑρίσκει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὴν δευτέραν πρὸς τὴν ἐλαχίστην. τούτων δὲ τῆς τε πρώτης καὶ τῆς δευτέρας προσλαβοῦσα τρίτην ἀνάλογον ἀποδείκνυσιν τὰς δύο μέσας ἀνάλογον οὕτως θεωρουμένας ὡς ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς. τούτων γὰρ τὸ μὲν συμπέρασμα τὸ αὐτό, δι' ὧν δὲ τοῦτο*

---

3. *ἡ ΟΠ*] *ἡ ΔΠ* Bredowius et similiter posthac, quod sine dubio alienum est a mente scriptoris 6. 7. *οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΠ* ABS, corr. V 7. *ἄλλην* et 11. *αλλην* (sine spir. et acc.) A^1, corr. man. rec. (BS) 9. *πρὸς τὴν ΔΜ* ABS, corr. *Sca* Bredow 11. 12. *οὕτως ἡ ΔΞ* AB, corr. S 13. *ἡ* om. A, add. BS 26. post *οὕτως* A habet *τὸ ἀπὸ*, sed delevit ea prima manus 29. *ἐπὶ* ABS, *ἦν* Bredow

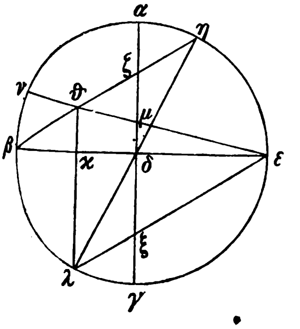
potest (namque $\varepsilon\delta > \delta\zeta$); ergo $\delta\mu$ non est tertia proportionalis rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$.

Sumatur rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$ tertia proportionalis $o\pi$. Iam quia rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$ tertia proportionalis est $o\pi$, est *igitur*



$\varepsilon\delta : \delta\zeta = \delta\zeta : o\pi$; ergo etiam
$\varepsilon\delta^2 : \delta\zeta^2 = \varepsilon\delta : o\pi$. Sed erat
$\varepsilon\delta^2 : \delta\zeta^2 = \delta\zeta : \delta\mu$; ergo ex aequali (*vid. adnot. 4*) est
$\varepsilon\delta : o\pi = \delta\zeta : \delta\mu$, ideoque vicissim
$\varepsilon\delta : \delta\zeta = o\pi : \delta\mu$. Sed erat
$\varepsilon\delta : \delta\zeta = \delta\zeta : o\pi$; ergo etiam
$\delta\zeta : o\pi = o\pi : \delta\mu$.

Ergo quattuor $\varepsilon\delta$ $\delta\zeta$ $o\pi$ $\delta\mu$ sunt in continua analogia; itaque rectarum $\varepsilon\delta$ $\delta\mu$ duae mediae proportionales sunt $\delta\zeta$ $o\pi$.



Ita cum in proposita figura demonstratio convenienter cum organica constructione facta sit, apparet per organicam constructionem, datis duabus rectis inaequalibus ($\varepsilon\delta$ $\delta\mu$) ac proportione rectarum data, inveniri duas medias proportionales, quarum ut prima ($\varepsilon\delta$) ad quartam ($\delta\mu$), ita cubus[5]) ex prima sit ad cubum ex secunda ($\delta\zeta$). Demonstratio autem, cum unam quandam rectam ($\varepsilon\delta$) supposuerit et per linearum descriptionem duas alias ($\delta\zeta$ $\delta\mu$) adsumpserit, quae minores quam prima et iuxta eam ex ordine positae et inter se inaequales sint, ut quadratum ex prima ad quadratum ex secunda, ita invenit esse secundam ad minimam (*p. 173*). Et cum ad primam et secundam tertiam proportionalem ($o\pi$) adsumpserit, ostendit duas medias proportionales ita considerandas esse ut in organica constructione. Nam *illa* quidem

5) Rursus scriptor, cum εἶδος huc intulerit, neglegentius versatus est. Etenim εἶδος Euclides elem. 6, 20 coroll. 2 de figuris planis ac similibus adhibet. Iam nihil obstat, quin idem de solidis figuris dicatur; sed hoc Graecus scriptor diserte exponere debebat, velut στερεὸν εἶδος ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον (elem. 11, 37), neque vero εἶδος simpliciter ponere licebat, cum cubum intellegeret.

εὑρίσκεται τῶν πρώτων, οὐ τὸ αὐτό. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς, λόγου δοθέντος δύο εὐθειῶν ἀνίσων, τὸ συμπέρασμα δείκνυται, ἐπὶ δὲ τῆς ἀποδείξεως, μὴ δοθέντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν, διὸ ἔτι τοῦτο μένει ζητούμενον, πῶς ἐν λόγῳ δοθέντι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι. δεῖ γάρ, λόγου δοθέντος τοῦ ὃν ἔχει ἡ πρώτη εὐθεῖα πρὸς τὴν τετάρτην, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ γενέσθαι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας.

---

* * *

1 α΄. Ἐὰν ᾖ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀναγραφῇ τυχόντα παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΔΕ ΒΓΖΗ, καὶ αἱ ΔΕ ΖΗ ἐκβληθῶσιν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ, γίνεται τὰ ΑΒΔΕ ΒΓΖΗ παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΘΒ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ἐν γωνίᾳ ἥ ἐστιν ἴση συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ΔΘΒ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ διὰ τῶν Α Γ τῇ ΘΚ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΑΛ ΓΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστιν τὸ ΑΛΘΒ, αἱ ΑΛ ΘΒ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι. ὁμοίως καὶ αἱ ΜΓ ΘΒ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι, ὥστε καὶ αἱ ΛΑ ΜΓ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι. καὶ αἱ ΛΜ ΑΓ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΛΜΓ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΓ, τουτέστιν συναμφοτέρῳ

---

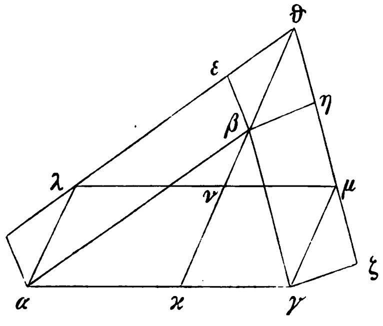
3. δείκνυται] γίνεται *Hu* 4. τοῦτο ABS, τοίνυν Paris. 2368, τὸ πρόβλημα Bredow 5. post εὐθεῖαι add. εὑρίσκονται Bredow 9. initio libri praeter titulum periit praefatio, id quod et aliorum librorum similitudo et cap. 78 docent α΄ manus recentissima in B, quae etiam βιβλίον δ΄ margini adscripsit, β΄ S, om. A 10. ἀναγραφῇ τυχόντα S, ἀναγραφη τυχον | τὰ σημεῖα A, ἀναγραφῆ τυχὸν τὰ σημεῖα B τὰ ΑΒ ΔΕ ΒΓ ΖΗ ABS, coniunx. *Co* 12. τὰ ΑΒ ΔΕ ΒΓ ΖΗ A, coniunx. B (ΒΓ om. S) 15. ἐκβληθῇ γὰρ ΘΒ A(BS), corr. *Hu* τῶν ΑΓ A, distinx. BS 17. ἐπεὶ S, ἐπι (sine acc.) A (B cod. *Co*)

quae in ratiocinando conclusio *dicitur* eadem est, sed quibus ex principiis utrumque efficiatur, non ad idem redit. Nam in organica quidem constructione, data proportione duarum rectarum inaequalium, in demonstratione autem, non data proportione rectarum, fit conclusio; quapropter hoc relinquitur quod quaeratur, quomodo in data proportione quattuor rectae *inveniantur*. Oportet enim, data proportione primae rectae ad quartam, in eadem proportione cubum ex prima fieri ad cubum ex secunda.

Pappi Alexandrini collectionis liber IV.

* * *

I. Si sit triangulum $\alpha\beta\gamma$, et a rectis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ quaelibet Prop. 1
parallelogramma $\alpha\beta\varepsilon\delta$ $\beta\gamma\zeta\eta$ describantur, et rectae $\delta\varepsilon$ $\zeta\eta$ producantur ad ϑ, et iungatur $\vartheta\beta$, summa parallelogrammorum $\alpha\beta\varepsilon\delta$ $\beta\gamma\zeta\eta$ aequalis fit parallelogrammo quod rectis $\alpha\gamma$ $\vartheta\beta$ continetur sub angulo qui summae angulorum $\beta\alpha\gamma$ $\delta\vartheta\beta$ aequalis est.



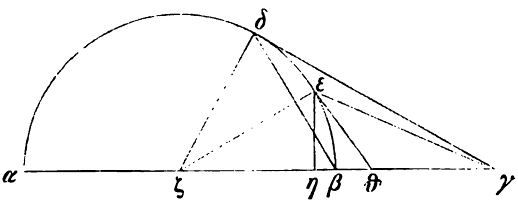
Producatur enim $\vartheta\beta$ ad $\varkappa$, et per α γ ipsi $\vartheta\varkappa$ parallelae ducantur $\alpha\lambda$ $\gamma\mu$, et iungatur $\lambda\mu$. Quia parallelogrammum est $\alpha\lambda\vartheta\beta$, rectae $\alpha\lambda$ $\vartheta\beta$ aequales et parallelae sunt. Item $\mu\gamma$ $\vartheta\beta$ aequales et parallelae sunt; itaque etiam $\alpha\lambda$ $\mu\gamma$ aequales et parallelae sunt. Ergo etiam $\lambda\mu$ $\alpha\gamma$ aequales et parallelae. Parallelogrammum igitur est $\alpha\lambda\mu\gamma$ sub

17. 18. αἱ $\overline{A\Lambda\Theta B}$ A, om. B[1], distinx. B[3]S 18. 19. ὁμοίως — παράλληλοι om. S 18. $\overline{\Theta B}$ Co pro $\overline{OB}$ 20. καὶ αἱ $\overline{\Lambda M}$ non satis perspicua in A 22. $\overline{\Lambda\Lambda}$ $\overline{M\Gamma}$ AB, coniunx. S τοῦ**|τέστιν A

τῇ τε ὑπὸ ΒΑΓ καὶ ὑπὸ ΔΘΒ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΘΒ τῇ ὑπὸ ΑΑΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΑΒΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΑΒΘ ἴσον ἐστίν (ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν τῆς ΑΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΒ ΔΘ), ἀλλὰ τὸ ΑΑΒΘ τῷ ΑΑΚΝ ἴσον ἐστὶν (ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν τῆς ΑΑ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΑ ΘΚ), καὶ τὸ ΑΔΕΒ ἄρα τῷ ΑΑΚΝ ἴσον ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΒΗΖΓ τῷ ΝΚΓΜ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΔΑΒΕ ΒΗΖΓ παραλληλόγραμμα τῷ ΑΑΓΜ ἴσα ἐστίν, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΓ ΘΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΑΓ, ἥ ἐστιν ἴση συναμφοτέραις ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ ΒΘΔ. καὶ ἔστι τοῦτο καθολικώτερον πολλῷ τοῦ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἐπὶ τῶν τετραγώνων ἐν τοῖς στοιχείοις δεδειγμένου.

2 β'. Ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς ΑΒ ῥητὴν ἔχον τὴν διάμετρον, καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση καὶ τῇ ΑΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ δίχα ἡ ΒΔ περιφέρεια τῷ Ε σημείῳ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΔ ΖΕ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΔΓ, ἐν ἡμι-



κυκλίῳ ἐστὶν τῷ ἐπὶ τῆς ΖΓ, οὗ κέντρον ἐστὶν τὸ Β. καὶ τῆς ΒΔ ἐπιζευχθείσης ἰσόπλευρον γίνεται τὸ ΒΖΔ τρίγωνον, ὥστε διμοίρου μέν ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΖΒ γωνία, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ ΕΖΒ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ διάμετρον ἡ ΗΕ· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΓΖΔ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ

1. τε ὑπὸ ΑΒΓ AB, corr. S 2. τὸ ἀπὸ ΛΑΒΕ AB[1] cod. Co, τὸ ἀπὸ λαβε S, ἀπὸ del. B[3] Co 2. 3. τῶι ΛΑ ΘΒ AS(B), corr. Co 5. τὸ ΛΑ ΘΒ τῶι ΛΑ ΚΝ AB, coniunx. S, corr. Co post ἐπί τε

angulo $\lambda\alpha\gamma$, id est summâ angulorum $\beta\alpha\gamma$ $\delta\vartheta\beta$; nam angulus $\delta\vartheta\beta$ angulo $\lambda\alpha\beta$ aequalis est. Et quoniam parallelogrammum $\delta\alpha\beta\varepsilon$ parallelogrammo $\lambda\alpha\beta\vartheta$ aequale est (sunt enim in eadem basi $\alpha\beta$ et in iisdem parallelis $\alpha\beta$ $\delta\vartheta$), itemque $\lambda\alpha\beta\vartheta$ ipsi $\lambda\alpha\varkappa\nu$ aequale (sunt enim in eadem basi $\lambda\alpha$ et in iisdem parallelis $\lambda\alpha$ $\vartheta\varkappa$), ergo etiam parallelogrammum $\delta\alpha\beta\varepsilon$ parallelogrammo $\lambda\alpha\varkappa\nu$ aequale est. Eadem ratione etiam $\beta\eta\zeta\gamma$ ipsi $\nu\varkappa\gamma\mu$ aequale est; ergo summa parallelogrammorum $\delta\alpha\beta\varepsilon$ $\beta\eta\zeta\gamma$ parallelogrammo $\lambda\alpha\gamma\mu$ aequalis est, id est ei quod rectis $\alpha\gamma$ $\beta\vartheta$ continetur sub angulo $\lambda\alpha\gamma$, qui quidem summae angulorum $\beta\alpha\gamma$ $\delta\vartheta\beta$ aequalis est. Atque hoc multo est generalius quam illud quod in *triangulis* orthogoniis de quadratis in elementis demonstratum est[1]).

II. *Sit* semicirculus in recta $\alpha\beta$, rationalem diametrum habens, et radio aequalis in productâ $\alpha\beta$ *sit* $\beta\gamma$, et *ducatur* tangens $\gamma\delta$, et bifariam *secetur* circumferentia $\beta\delta$ in puncto ε, et iungatur $\gamma\varepsilon$; dico $\gamma\varepsilon$ irrationalem esse, quae minor vocatur. Prop. 2

Sumatur semicirculi centrum ζ, et iungantur $\zeta\delta$ $\zeta\varepsilon$. Quoniam angulus $\zeta\delta\gamma$ rectus est, idem in semicirculo est cuius basis $\zeta\gamma$ et centrum β. Et iunctâ $\beta\delta$ triangulum $\zeta\beta\delta$ fit aequilaterum, itaque angulus $\delta\zeta\beta$ est duarum tertiarum recti, et angulus $\varepsilon\zeta\beta$ tertia pars recti. Ducatur ab ε ad diametrum $\alpha\beta$ perpendicularis $\varepsilon\eta$; ergo triangulum $\gamma\zeta\delta$ ipsi $\varepsilon\zeta\eta$ aequiangulum est (*quoniam angulus* $\varepsilon\zeta\eta$ *angulo* $\zeta\gamma\delta$ *aequalis*

1) "Videlicet in 47. primi lib. elementorum. Idem etiam demonstratur in 31. sexti libri de aliis figuris similibus; sed illud in triangulo rectangulo tantum, hoc (*quod Pappus exhibet*) in omni triangulo; illud de quadratis tantum vel figuris similibus, hoc universe de omnibus parallelogrammis etiam inter se dissimilibus" *Co.*

γὰρ A¹ expunxit αυ   7. τὸ $\overline{AA}$ $\overline{EB}$ ἄρα τῶι $\overline{AA}$ $\overline{KN}$ AS, coniunx. B³ *Co*, ac similiter in proximis versibus   8. τῶι $\overline{KN}$ $\overline{\Gamma M}$ A(BS), τῷ *KNMΓ Co*, corr. *Hu*   12. τοῦτο καὶ ὁλικώτερον A(BS), corr. *Hu* auctore *Co*   13. post τετραγώνων add. V² "καὶ τῶν ὁμοίων καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένων lib. 6. Elem."   14. β' add. B   15. ἴσηι AB, corr. S   τῇ *AB* add. *Co*   ἔστω ante ἡ *BΓ* add. S   16. τετμήσθω ante ἡ *BΔ* add. *Sca*   17. ὅτι *Co Sca* pro οὕτως *τριγώνῳ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἐπίτριτον δὲ τὸ ἀπὸ ΖΓ τοῦ ἀπὸ ΓΔ· ἐπίτριτον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ὃν ις' πρὸς ιβ', τοῦ δὲ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ ὃν ξδ' πρὸς ις'. καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ἐστὶν ὃν ξδ' πρὸς ιβ'. ἔστω δ' ἡ ΖΒ τετραπλασία τῆς ΒΘ· καὶ ἔστιν τῆς ΒΖ διπλασίων ἡ ΖΓ· λόγος ἄρα τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΖΘ, ὃν η' πρὸς ε', καὶ τῆς ΖΘ πρὸς ΘΓ ὃν ε' πρὸς γ'· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγος ἐστὶν ὃν ξδ' πρὸς κε'. ἐδείχθη δὲ τοῦ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ὃν ξδ' πρὸς ιβ'· καὶ τοῦ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ἐστὶν ὡς κε' πρὸς ιβ'· αἱ ΘΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρός ἐστιν ῥητῇ τῇ ΔΒ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΘΗ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΓ καὶ ἡ διπλῆ αὐτῆς· ἡ ἄρα δυναμένη τὸ δὶς ὑπὸ ΖΓ ΗΘ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. καὶ δύναται τὸ δὶς ὑπὸ ΓΖ ΗΘ ἡ ΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ.*

3 *Ὅτι δὲ ἡ ΓΕ δύναται τὸ δὶς ὑπὸ ΓΖ ΗΘ, οὕτως ἔσται δῆλον· ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΘ ΘΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΘ ΘΗ, ἔστιν δὲ καὶ τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΖ ἴσα τῷ ἀπὸ ΕΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΖΘ ΘΗ [ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΓΘΗ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΖΘΗ. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, πάντα* πρὸς πάντα. *καὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΓΕ τοῖς ἀπὸ ΕΘΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΘΗ], ἴσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ ΓΕ ΕΘ ΘΖ τοῖς ἀπὸ ΕΘ ΘΓ ΕΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΘΗ μετὰ τοῦ*

---

1. *ἡ ΕΖ Co Sca* pro *ἡ* $\overline{EH}$ 2. *ἐπὶ τρίτον* utroque loco A, corr. BS 5. *τὸ* ante *ἀπὸ ΕΖ* add. S 6. *ἔσται δὴ* A, *ἔσται δὴ ἡ* BS, corr. V² (*ἔστω δὴ ἡ Sca, sit Co*) 7. *διπλασίων* S, *δ//////ίων* A, *διπλάσιον* B 8. 9. *τὴν* $\overline{Z\Theta}$ *ον* $\overline{H}$ *πρὸς* //// *τῆς* extremo folio A, *τὴν* $\overline{\zeta\vartheta}$ *ὃν ἡ πρὸς* .. *καὶ τῆς* S, corr. B *Sca* 15. *ὅλῃι ἡ* AB, corr. S 17. *καὶ διπλῇ αὐτῆς* del. *Sca*, *ἡ* ante *διπλῇ* add. *Hu* *δὶς* add. *Co*

est; uterque enim tertia pars recti), atque est $\zeta\gamma : \gamma\delta = \varepsilon\zeta : \zeta\eta$. Sed est $\zeta\gamma^2 = \frac{4}{3}\gamma\delta^2$*); ergo etiam $\varepsilon\zeta^2 = \frac{4}{3}\zeta\eta^2$, itaque $\varepsilon\zeta^2 : \zeta\eta^2 = 16 : 12$, et $\zeta\gamma^2 : \varepsilon\zeta^2 = 64 : 16$ (*quia ex constructione* $\zeta\gamma = 2\varepsilon\zeta$). Sit autem $\beta\vartheta = \frac{1}{4}\zeta\beta$; et est $\zeta\beta = \frac{1}{2}\zeta\gamma$; ergo $\zeta\gamma : \zeta\vartheta = 8 : 5$, et $\zeta\vartheta : \vartheta\gamma = 5 : 3$; itaque $\zeta\gamma^2 : \zeta\vartheta^2 = 64 : 25$. Sed demonstravimus etiam $\zeta\gamma^2 : \zeta\eta^2 = 64 : 12$, itaque $\zeta\vartheta^2 : \zeta\eta^2 = 25 : 12$; ergo rectae $\zeta\vartheta$ $\zeta\eta$ rationales sunt potentia solum commensurabiles, et quadratorum ex $\zeta\vartheta$ $\zeta\eta$ differentia quadratum est ex recta quadam sibi ipsi incommensurabili[1]). Et tota $\zeta\vartheta$ commensurabilis est rationali $\alpha\beta$**); ergo $\vartheta\eta$ apotome quarta est (*elem. 10 defin. tertiarum 4*). Sed $\zeta\gamma$ rationalis est, itemque dupla $\zeta\gamma$; ergo recta, cuius quadratum duplo rectangulo ex $\zeta\gamma$ $\vartheta\eta$ aequale est, irrationalis est, quae minor vocatur (*elem. 10, 95*). Et est $2\,\zeta\gamma\cdot\vartheta\eta = \gamma\varepsilon^2$; ergo $\gamma\varepsilon$ minor est.

Esse autem $\gamma\varepsilon^2 = 2\,\zeta\gamma\cdot\vartheta\eta$ sic apparebit. Iungatur $\varepsilon\vartheta$. Quoniam *propter elem. 2, 12* est

$\gamma\varepsilon^2 = \varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\gamma^2 + 2\,\gamma\vartheta\cdot\vartheta\eta$, atque

$\varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\zeta^2 = \varepsilon\zeta^2 + 2\,\zeta\vartheta\cdot\vartheta\eta$***), sunt igitur

$$\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\zeta^2 = \varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\gamma^2 + \varepsilon\zeta^2 + 2\,\gamma\vartheta\cdot\vartheta\eta + 2\,\zeta\vartheta\cdot\vartheta\eta,$$

id est (*quia* $\gamma\vartheta + \zeta\vartheta = \zeta\gamma$)

*) Est enim $\zeta\gamma = 2\,\zeta\delta$, ideoque $\zeta\gamma^2 = 4\,\zeta\delta^2$. Sed est etiam $\zeta\gamma^2 = \zeta\delta^2 + \delta\gamma^2$; ergo $\zeta\delta^2 = \frac{1}{3}\gamma\delta^2$, et $\zeta\gamma^2 = \frac{4}{3}\gamma\delta^2$ (*Co*).

1) Scilicet $25 - 12 = 13$, et $\sqrt{13}$ irrationalis est.

**) Est enim $\zeta\vartheta = \zeta\beta + \beta\vartheta = \frac{1}{2}\,\alpha\beta + \frac{1}{8}\,\alpha\beta = \frac{5}{8}\,\alpha\beta$.

***) Hoc efficitur ex elem. 2, 13 cum commentariis Commandini (fol. 35) vel Clavii (p. 199 sq.). Nimirum illud theorema, quod Euclides de oxygonio tantum triangulo posuit, valet etiam de orthogonio et amblygonio.

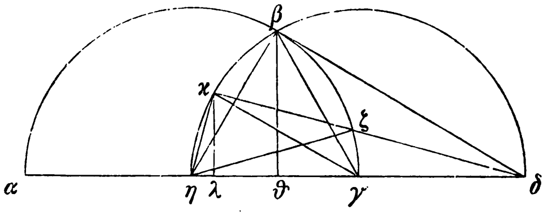
---

18. post *ἐλάσσων* add. *ἐστιν* A, *ἐστὶ* B³S, om. B¹ *Sca* 21. *ἐπεὶ* BS, *ἐπὶ* A 22. 23. *καὶ τὸ ἀπὸ* A, corr. BS 24. *ἀνάλογον* — 28. *δὶς ὑπὸ ΓΘΗ*, manifestum interpretamentum, del. *Hu* *πρὸς τὸ ἀπὸ* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 25. *οὕτως τὸ ἀπὸ* A Paris. 2368, *οὕτω τὸ ἀπὸ* B, corr. S (an forte *Sca?*) 26. *ὑπὸ ΖΘΗ Sca* pro *ὑπὸ* $\overline{ZH\Theta}$ 27. *πρὸς πάντα* add. *Hu* auctore *Co* 28. *ὑπὸ ΓΘΗ Sca*, *ὑπὸ* $\overline{\Gamma E\Theta H}$ AS, *ὑπὸ* $\overline{\gamma\varepsilon}$ $\overline{\vartheta\eta}$ B 29. *ὑπὸ ΓΘΗ Sca* pro *ὑπὸ* $\overline{\Gamma H\Theta}$

δὶς ὑπὸ ΖΘΗ, τουτέστιν τῷ δὶς ὑπὸ ΓΖ ΗΘ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἀπὸ ΕΓ ΖΘ ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΕΖ ΘΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΖ ΗΘ. ὧν τὸ ἀπὸ ΖΘ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΖ ΘΓ (τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΘ ἐστὶν κε', τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΓ ϑ', καὶ τὸ ἀπὸ ΕΖ ις')· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΖΓ ΗΘ.

4 *γ'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΛΓ ῥητὴν ἔχον τὴν διάμετρον, καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΒ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία ὑπὸ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ ΔΖ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης.*

Εἰλήφθω γὰρ τὸ Η κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΗΒΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ *Κ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ* ΚΗ. *ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΛΓ ἡ ΚΛ.*



καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου ἐστὶν πλευρὰ ἡ ΒΗ, ἡμίσεια δὲ τῆς ἑξαγώνου ἡ ΚΛ (ἐκβαλλομένη γὰρ τὴν διπλῆν τῆς ΚΗ περιφερείας ὑποτείνει), διπλασία ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῆς ΚΛ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΚΛΓ· ἐπίτριτον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΚΓ τοῦ ἀπὸ ΓΛ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ *ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΛ· αἱ ΔΓ ΓΛ ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΛ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ῥητῇ τῇ ΛΓ· ἐκ δύο ὀνομάτων ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΛΔ, ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ· ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΗΔΛ χωρίον*

---

6. *ὑπὸ* $\overline{ZΓNΘ}$ AS, *ὑπὸ* $\overline{γζ}$ $\overline{ηϑ}$ B[1], corr. B[3] *Co Sca* 7. $\overline{Γ}$ A[1] in marg. (BS) *ἐπὶ Co* pro *ἀπὸ* 9. *γωνία η ὑπὸ* A, *γωνία ἡ ὑπὸ* B[3]S,

$= \varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\gamma^2 + \varepsilon\zeta^2 + 2\,\zeta\gamma\cdot\vartheta\eta$. Commune auferatur $\varepsilon\vartheta^2$; restant igitur

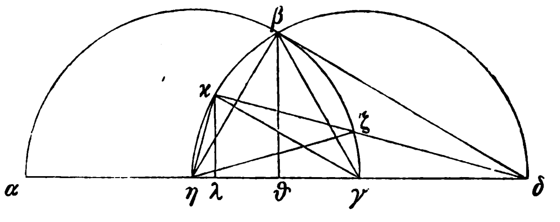
$\gamma\varepsilon^2 + \vartheta\zeta^2 = \vartheta\gamma^2 + \varepsilon\zeta^2 + 2\,\zeta\gamma\cdot\vartheta\eta$. Et est $\vartheta\zeta^2 = \varepsilon\zeta^2 + \vartheta\gamma^2$ (quia *quadrato ex* $\beta\vartheta$ *pro unitate supposito demonstravimus* esse $\vartheta\zeta^2 = 25$, $\varepsilon\zeta^2 = 16$, $\vartheta\gamma^2 = 9$); per subtractionem igitur est

$\gamma\varepsilon^2 = 2\,\zeta\gamma\cdot\vartheta\eta$.

III. *Sit* semicirculus in recta $\alpha\gamma$, diametrum rationalem habens, et *producatur* $\alpha\gamma$ *ac* semidiametro aequalis sit $\gamma\delta$, et *ducatur* tangens $\delta\beta$, et angulus $\gamma\delta\beta$ rectà $\delta\zeta$ bifariam secetur; dico rectam $\delta\zeta$ differentiam esse qua recta ex binis nominibus (*elem. 10 defin. secund.*) eam superat quae cum rationali medium totum efficit (*elem. 10, 96*). Prop. 3

Sumatur enim semicirculi centrum η, et iungatur $\beta\eta$, et in recta $\eta\delta$ describatur semicirculus $\eta\beta\delta$, et producatur $\delta\zeta$ ad $\varkappa$ *punctum circumferentiae*; ergo circumferentiae $\beta\varkappa$ $\varkappa\eta$ inter se aequales sunt. Ducatur $\varkappa\lambda$ perpendicularis ad $\alpha\gamma$. Et quia $\beta\eta$ hexagoni *circulo inscripti* latus est (*elem. 4, 15 coroll.*), eiusque dimidia pars est $\varkappa\lambda$ (quoniam $\varkappa\lambda$ producta circumferentiam duplam ipsius $\varkappa\eta$ *et aequalem circumferentiae* $\beta\varkappa\eta$ subtendit), est igitur $\beta\eta = 2\,\varkappa\lambda$, id est $\gamma\varkappa = 2\,\varkappa\lambda$. Et rectus est angulus $\varkappa\lambda\gamma$; ergo est $\varkappa\gamma^2 = \frac{4}{3}\gamma\lambda^2$ (*propos. 2*), id est $\delta\gamma^2 = \frac{4}{3}\gamma\lambda^2$; itaque $\delta\gamma$ $\gamma\lambda$ rationales sunt potentia solum commensurabiles, et quadratum ex $\delta\gamma$ superat quadratum ex $\gamma\lambda$ quadrato ex recta sibi ipsi commensurabili, et maior $\delta\gamma$ *longitudine* commensurabilis est rationali $\alpha\gamma$; ergo $\lambda\delta$ est ex binis nominibus prima (*10 def. sec. 1*), et rationalis $\eta\delta$; itaque recta, cuius quadratum rectangulo sub $\eta\delta$ $\delta\lambda$ *contento*

γωνία τῇ ὑπὸ B¹, corr. *Sca* 10. *ὅτι Co Sca* pro *οὕτως* 11. *ποιούσης* S, item A, nisi quod *ούσης* paene evanuit, *ποιοῦσα* B, *π*...... V 13. 14. *τὸ HBΔ* B *Sca*, *τὸ* $\overline{HB}$∗ A, *τὸ* $\overline{\eta\beta}$ S *Co* 14. *ἡ ΔZ ἐπὶ τὸ K Hu*, *ἡ* $\overline{Z\Delta K}$ ABS, *ἡ ΔZK Co* 15. *τῇ KH* add. *Sca* (*τῇ KH περιφερείᾳ* voluit *Co*) 20. *ἐπεὶ τρίτον* A¹, corr. A²(BS) 21. *τὸ ἀπὸ Sca*, *ἡ* B¹, om. AB³S 23. *ἀπὸ ἀσυμμέτρου* AS, *ἀπὸ τῆς ασυμμέτρου* B, corr. *Co Sca* 24. *ῥητὴ* AB, corr. S *δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. δύναται δὲ αὐτὸ ἡ ΔΚ (διὰ γὰρ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΗΔΚ τρίγωνον τῷ ΔΛΚ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΛ)· ἡ ΔΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ διμοίρου ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία καὶ ἴση ἡ ΗΒ τῇ ΗΓ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶν τὸ ΒΗΓ τρίγωνον. ἤχθω δὴ κάθετος ἡ ΒΘ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΓ, τῆς ΓΘ. καὶ ἐδείχθη τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἐπίτριτον·*



τὸ ἄρα ἀπὸ ΛΓ τριπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΓΘ· αἱ ΛΓ ΓΘ ἄρα ῥηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΛΓ τῆς ΓΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλασσον ὄνομα τὸ ΓΘ σύμμετρόν ἐστιν ῥητῇ τῇ ΛΓ· ἡ ΛΘ ἄρα ἀποτομή ἐστιν πέμπτη. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΗ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΒΗΘ ΒΗΔ τρίγωνα, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΚΗ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΚΗΛ ΚΗΔ τρίγωνα, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΔΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΗΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἐναλλάξ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ [κοινὸν γὰρ ὕψος τὸ ΔΗ]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· διελόντι

---

2. *ἡ ΔΚ Sca*, *ΗΔΚ* A, *ηδκ* BS 3. *τῷ ΔΛΚ Co* pro *τῶι ΗΛΚ* 4. *ἡ δὲ ΔΚ ἄρα* ABS, corr. *Sca* 5. *ἐπι διμοίρου* AB, corr. S *ἴση *** τῆι* A[1], *ἴση ΗΒ τῆι* A[2]S, *ἡ* add. B 7. *καθετος ΗΒΔΘ* AB, *κάθετος ηβδ* S, corr. *Sca* 8. *ἐπὶ τρίτον* A[1], corr. A[2](BS) 13. *καὶ ἐπεὶ* — p. 186, 2. *τὸ ἀπὸ ΗΚ* iniuria om. *Co* (conf. adnot. ad p. 186, 2) 13. *μὲν ὑπὸ ΛΗΘ* AB[1]S, corr. B[3] *Sca* 15. *ὑπὸ ΔΗΛ Sca* pro

aequale est, irrationalis est quae ex binis nominibus vocatur (*elem. 10, 55*). Sed est $\delta\varkappa^2 = \eta\delta \cdot \delta\lambda$ (nam propter triangulorum $\eta\delta\varkappa$ $\varkappa\delta\lambda$ similitudinem est $\eta\delta : \delta\varkappa = \delta\varkappa : \delta\lambda$); ergo recta $\delta\varkappa$ est ex binis nominibus. Et quia angulus $\beta\eta\gamma$ duarum tertiarum *recti* est et $\eta\beta$ $\eta\gamma$ aequales sunt[1], triangulum igitur $\beta\eta\gamma$ aequilaterum est. Iam ducatur perpendicularis $\beta\vartheta$; est igitur $\eta\gamma = \delta\gamma = 2\gamma\vartheta$. Et demonstratum est $\delta\gamma^2 = \frac{4}{3}\gamma\lambda^2$; ergo $4\gamma\vartheta^2 = \frac{4}{3}\gamma\lambda^2$, *id est* $3\gamma\vartheta^2 = \gamma\lambda^2$; itaque $\gamma\lambda$ $\gamma\vartheta$ rationales sunt potentia solum commensurabiles, et quadratum ex $\gamma\lambda$ superat quadratum ex $\gamma\vartheta$ quadrato ex recta sibi ipsi incommensurabili, et minus nomen $\gamma\vartheta$ commensurabile est rationali $\alpha\gamma$; ergo $\lambda\vartheta$ apotome quinta est (*elem. 10 def. tert. 5*). Et quoniam propter triangulorum $\beta\eta\vartheta$ $\delta\eta\beta$ similitudinem est $\beta\eta : \eta\vartheta = \delta\eta : \beta\eta$, *id est*

$$\delta\eta \cdot \eta\vartheta = \beta\eta^2,$$

et propter triangulorum $\varkappa\eta\lambda$ $\delta\eta\varkappa$ similitudinem $\varkappa\eta : \eta\lambda = \delta\eta : \varkappa\eta$, *id est*

$$\delta\eta \cdot \eta\lambda = \varkappa\eta^2, \text{ est igitur}$$

$$\frac{\delta\eta \cdot \eta\vartheta}{\beta\eta^2} = \frac{\delta\eta \cdot \eta\lambda}{\varkappa\eta^2}, \text{ et vicissim}$$

$$\frac{\delta\eta \cdot \eta\vartheta}{\delta\eta \cdot \eta\lambda} = \frac{\beta\eta^2}{\varkappa\eta^2}. \text{ Sed est } \frac{\delta\eta \cdot \eta\vartheta}{\delta\eta \cdot \eta\lambda} = \frac{\vartheta\eta}{\eta\lambda}; \text{ ergo etiam}$$

$$\frac{\vartheta\eta}{\eta\lambda} = \frac{\beta\eta^2}{\varkappa\eta^2} = \frac{\zeta\eta^2}{\varkappa\eta^2}; \text{ dirimendo igitur est}$$

1) Angulum $\beta\eta\gamma$ duarum tertiarum recti esse scriptor inde effecisse videtur, quod antea demonstravit $\beta\eta$ latus hexagoni esse; praeterea elem. 1, 5 adhibuit, ut aequiangulum, ideoque aequilaterum triangulum esse ostenderet. Sed rectius, nisi fallor, in superiore propositione idem demonstratum est.

ὑπὸ $\overline{BHA}$ ἀπὸ *KH* idem pro ἀπὸ $\overline{KA}$ 16. ἔστιν ἄρα idem pro ἄρα ἔστιν 17. ὑπὸ (ante *ΔHA*) add. idem 18. καὶ add. idem ἐναλλάξ] ἐναλλὰξ *ὡς τὸ ὑπὸ ΔHΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔHA, οὕτως τὸ ἀπὸ BH πρὸς τὸ ἀπὸ KH Sca*, quae nos ab ipso scriptore, tanquam tacite supplenda, omissa esse censemus ideoque in Latinam versionem reiecimus *ὡς δὲ Sca* pro *δὲ ὡς* 19. 20. *κοινὸν — τὸ ΔH* del. *Hu* 21. *πρὸς τὸ ἀπὸ HK Sca* pro *πρὸς τὸ* $\overline{AHK}$

ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ. καὶ ἐδείχθη ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗΛ τῷ ἀπὸ ΗΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗ ΛΘ τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΛΘ ἀποτομὴ πέμπτη, ἡ δὲ ΔΗ ῥητή· ἡ ἄρα ΚΖ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΔΚ ἐκ δύο ὀνομάτων· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΖ ὑπεροχή ἐστιν ᾗ ὑπερέχει ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης.

6 δʹ. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ ΒΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΔ συμπίπτουσα τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚΗ ΗΛΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΕΛ.

Γεγονέτω καὶ ἤχθω τῇ ΚΛ παράλληλος ἡ ΘΞΜ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἡ ΕΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΝ τῇ ΝΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ τῇ ΜΖ· οὕτως

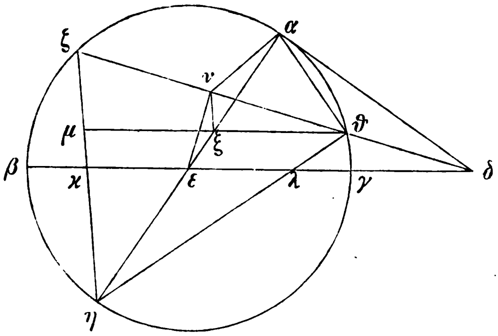
---

1. *ἐστὶν Hu* pro ἔσται 1. 2. τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ *Hu* auctore *Sca* pro τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗ ΛΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ 1. τὸ ἀπὸ ΚΖ — 3. τῷ ἀπὸ ΚΖ] τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΚΗ ἴσον ἐστι τῷ ὑπὸ ΔΗΛ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΗ, τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΗ, τὸ ὑπὸ ΔΗ ΛΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ. καὶ τὸ ὑπὸ ΔΗ ΛΘ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΚΖ τῷ ὑπὸ ΔΗ ΛΘ *Sca*, in quibus vir acutissimus iusto liberius scripturam traditam evagatus esse videtur (conf. adnot. ad p. 184, 18 et Lat. versionem) 2. καὶ ἐδείχθη — 3. τῷ ἀπὸ ΚΖ] *ostensum autem est rectangulum quod ΔΗ ΛΘ continetur quadrato ex ΚΖ aequale esse Co*, ad quae addit: *ubi hoc ostensum sit, nondum comperi, nisi fortasse ipse ostenderit in superioribus, quod tamen non apparet; nos autem illud ipsum ostendere sequenti lemmate nitemur* (sequitur languida demonstratio quaeque longe ab elegantia Graeci scriptoris a nobis restituta abhorreat) 5. μεταρητου ////// ὅ///|ποιοῦσα A, μετὰ τοῦ ῥητοῦ μέσον τὸν λόγον ποιοῦσα B[1], corr. B[3]S 6. ἡ ΔΚ ἐκ δ// ////////////// ΔΖ ὑπεροχή A, ἡ δκ ἐκ δύο ὀνομάτων ...... λζ B[1]S, ἡ ἄρα add. B[3], corr. *Sca* 7. ἡ (ante ἐκ δύο) add. *Sca* 9. Δ A[1] in marg. (BS) 11. κατὰ τὸ Α καὶ διήχθω ἡ ΑΖ *Sca* (quia paulo post pro ἡ ΑΕ, quod recte AB[3] praebent, in B[1]S ἡ δε legitur) 12. post ΗΛΘ add. αθζ S

$\frac{\vartheta\eta - \eta\lambda}{\eta\lambda} = \frac{\zeta\eta^2 - \varkappa\eta^2}{\varkappa\eta^2}$, *id est* $\frac{\vartheta\lambda}{\lambda\eta} = \frac{\varkappa\zeta^2}{\varkappa\eta^2}$. Et demonstravimus esse $\delta\eta \cdot \eta\lambda = \varkappa\eta^2$; *ergo etiam* $\frac{\vartheta\lambda}{\lambda\eta} = \frac{\varkappa\zeta^2}{\delta\eta \cdot \eta\lambda}$. *Sed est etiam* $\frac{\vartheta\lambda}{\lambda\eta} = \frac{\delta\eta \cdot \lambda\vartheta}{\delta\eta \cdot \eta\lambda}$; ergo $\delta\eta \cdot \lambda\vartheta = \varkappa\zeta^2$.

Et est $\lambda\vartheta$ apotome quinta, et $\delta\eta$ rationalis; ergo recta $\varkappa\zeta$ est quae cum rationali medium totum efficit (*elem. 10, 96*). Sed demonstravimus etiam rectam $\delta\varkappa$ esse ex binis nominibus; ergo per subtractionem recta $\delta\zeta$ differentia est qua recta ex binis nominibus eam superat quae cum rationali medium totum efficit.

IV. Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, cuius centrum sit ε, diametrus $\beta\gamma$, et tangens $\alpha\delta$, quae *productae* $\beta\gamma$ occurrat in δ, et *a puncto* δ *per circulum* ducatur recta $\delta\vartheta\zeta$, et iuncta $\alpha\varepsilon$ producatur ad η *punctum circumferentiae*, et iungantur rectae $\zeta\varkappa\eta$ $\eta\lambda\vartheta$; dico rectas $\varepsilon\varkappa$ $\varepsilon\lambda$ inter se aequales esse. Prop. 4



Factum iam sit, et ipsi $\varkappa\lambda$ parallela ducatur $\mu\xi\vartheta$; est igitur $\mu\xi = \xi\vartheta$. Ducatur ab ε ad $\zeta\vartheta$ perpendicularis $\varepsilon\nu$; est igitur $\zeta\nu = \nu\vartheta$ (*elem. 3, 3*). Sed erat etiam $\mu\xi = \xi\vartheta$;

---

13. ὅτι *Co Sca* pro οὕτως 17. παράλληλος et superscr. ἴση Paris. 2368, ἴση in contextu AB cod. *Co*, παράλληλος S *Co*

ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΘΝΞ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΖΜ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑΞ· οὕτως ἄρα ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Ν Ξ Θ σημεῖα· οὕτως ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΝΘ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΑΞΘ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ΑΕΛ· οὕτως ἄρα ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Ν Ε Δ σημεῖα. ἔστιν δέ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΔ ΕΝΔ.

7 Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΔ ΕΝΔ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Δ Ε Ν σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΝΔ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΑΞΘ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΕΔ ΞΘ· ἐν κύκλῳ ἄρα τὰ Α Ν Ξ Θ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΑΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΝΞ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΞ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΘΖΜ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΝΞ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΖΝ τῇ ΝΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ μὲν ΞΜ πρὸς ΕΚ, ἡ δὲ ΘΞ πρὸς ΛΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΜ πρὸς ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΞ πρὸς ΛΕ. καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΕ.

8 ε'. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖ, ἔστω δὲ ἡ ΕΗ ἴση τῇ ΗΖ· ὅτι καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση.

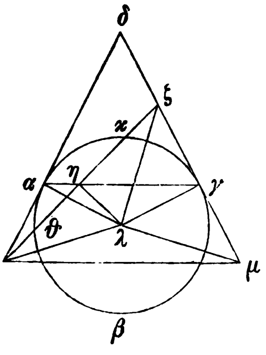
Ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΕΜ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ ΛΖ ΛΓ ΛΜ ΛΕ ΛΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΜΓ τῇ ΓΖ. καὶ ἔστιν ἡ ΜΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΛ·

2. τοῦτ' ἔστ A, τουτέστι BS 3. τὰ ΑΝΞΘ A, distinx. B (pro Α et hic et infra passim S habet δ: conf. ad p. 186, 11) 5. τὰ ΑΕΝ σημεῖα A, distinx. B, τὰ αενδ σημεῖα S, corr. *Hu* 8. τὰ ΑΔ ΕΝ AS, distinx. B 10. διὸ AB cod. *Co*, corr. S *Co* 10. 11. τὰς ΕΔ ΞΘ *Co*, τὰ ΕΞΘ A (B cod. *Co*), τὰς ελ ξϑ S 11. τὰ ΑΝΞΘ A, distinx. B (τὰ δνξϑ S) 13. ἐστιν τῆι ὑπὸ ΘΝΞ A(B cod. *Co*), ἐστὶ τῇ ὑπὸ ϑζη S, corr. *Co* ἡ ΖΜ *Co* pro ἡ ΖΗΜ 16. ΕΚ τῆι δὲ ΘΞ πρὸς *ΛΕ A (B cod. *Co*), corr. S *Co* 16. 17. πρὸς ΘΚ οὕτως AB cod. *Co*, corr. S *Co* 17. καὶ (ante ἴση) add. A^1 super vs. 19. Ε A^1 in marg. (S), om. B 20—22. ἔστω | /// /// //// /Ζ οὕτως καὶ | ////////// η ἤχθω A, ἔστω καὶ ἴση ἡ ηϑ τῇ ηκ (ηζ B^3) οὕτως κα

ergo parallelae sunt $\nu\xi$ $\zeta\mu$ (*elem. 6, 2*); itaque $\angle\,\vartheta\nu\xi = \angle\,\nu\zeta\mu = \angle\,\vartheta\alpha\xi$*). Ergo puncta ϑ α ν ξ sunt in circumferentia circuli (*ex elem. 3, 21 conversa*); itaque $\angle\,\alpha\nu\vartheta = \angle\,\alpha\xi\vartheta = \angle\,\alpha\varepsilon\lambda$. Ergo puncta α ν ε δ sunt in circumferentia circuli. Sunt vero; nam *ex constructione* uterque angulorum $\varepsilon\alpha\delta$ $\varepsilon\nu\delta$ rectus est.

Componetur hoc modo. Quoniam uterque angulorum $\varepsilon\alpha\delta$ $\varepsilon\nu\delta$ rectus est, in circuli igitur circumferentia sunt puncta α δ ε ν, ideoque $\angle\,\alpha\nu\delta = \angle\,\alpha\varepsilon\delta$. Sed propter parallelas $\varepsilon\delta$ $\xi\vartheta$ est $\angle\,\alpha\varepsilon\delta = \angle\,\alpha\xi\vartheta$; ergo puncta α ν ξ ϑ sunt in circuli circumferentia; itaque $\angle\,\vartheta\alpha\xi = \angle\,\vartheta\nu\xi$. Sed *ex constructione* est $\angle\,\vartheta\alpha\xi = \angle\,\vartheta\zeta\mu$ (*sunt enim in eodem segmento* $\eta\vartheta$); ergo $\angle\,\vartheta\zeta\mu = \angle\,\vartheta\nu\xi$, *ideoque* parallelae $\zeta\mu$ $\nu\xi$. Et est $\zeta\nu = \nu\vartheta$ (*elem. 3, 3*); ergo est $\mu\xi = \xi\vartheta$. Et, *quia ex constructione parallelae sunt* $\mu\vartheta$ $\varkappa\lambda$, est $\xi\eta : \varepsilon\eta = \mu\xi : \varkappa\varepsilon = \xi\vartheta : \varepsilon\lambda$, et vicissim $\mu\xi : \xi\vartheta = \varkappa\varepsilon : \varepsilon\lambda$. Et est $\mu\xi = \xi\vartheta$; ergo etiam $\varkappa\varepsilon = \varepsilon\lambda$.

V. Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, et tangentes $\alpha\delta$ $\delta\gamma$, et iungatur Prop. 5
$\alpha\gamma$, et *rectam* $\alpha\gamma$ *in* η *secans inter* $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ recta $\varepsilon\zeta$ ita ducatur, ut *portiones* $\varepsilon\eta$ $\eta\zeta$ inter se aequales sint; dico etiam $\vartheta\eta$ $\eta\varkappa$ (*id est portiones quae sunt intra circulum*) inter se aequales esse.

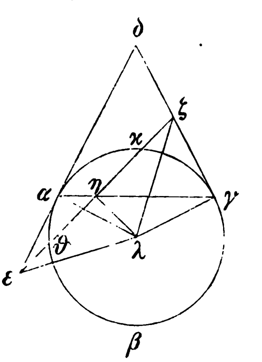


Ducatur rectae $\alpha\gamma$ parallela $\varepsilon\mu$, et sumatur circuli centrum λ, et iungantur $\lambda\alpha$ $\lambda\zeta$ $\lambda\gamma$ $\lambda\mu$ $\lambda\varepsilon$ $\lambda\eta$. Quoniam est $\varepsilon\eta = \eta\zeta$, *propter parallelas* $\eta\gamma$ $\varepsilon\mu$ est etiam $\mu\gamma = \gamma\zeta$. Et est $\mu\gamma$ ipsi $\gamma\lambda$ perpendicularis (*elem. 3, 18*); ergo est

*) Anguli enim $\nu\zeta\mu$ $\vartheta\alpha\xi$, id est $\vartheta\zeta\eta$ $\vartheta\alpha\eta$, in eodem sunt segmento (elem. 3, 21).

.... ἤχθω B, ἔστω δὲ ἡ $\overline{\varepsilon\eta}$ ἴση τῇ $\overline{\eta\zeta}$ οὕτως καὶ ἡ $\overline{\vartheta\eta}$ τῇ $\overline{\eta\varkappa}$ ἔσται ἴση. ἤχθω S, reliqua corr. *Cσ* 22. 23. τὸ $\overline{K}$ κέντρον AB[1], $\overline{\varkappa}$ del. B[3], om. S 24. *ΛΕ* add. S 25. ἡ *ΜΓ* add. S *ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΜΓ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ ἴση, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ τῶν ΕΑΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ τῶν ΜΓΔ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΜ, τουτέστιν τῇ ΔΖ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση· ἡ ΗΔ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΗΚ.*

9 *ϛʹ. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΑ ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ διήχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ὅτι καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση.*



Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ ΛΑ ΛΗ ΛΖ ΛΓ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΛ ΕΗΛ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Ε Α Η Λ σημεῖα· *ἴση* ἄρα *ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΕΛ γωνίᾳ. πάλιν ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΛΗΖ ΛΓΖ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Λ Η Ζ Γ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΓΛ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΑΛ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΕΛ, τῇ ὑπὸ τῶν ΗΖΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΖ. καὶ ἔστιν κάθετος ἡ ΛΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ.*

10 *Ἐὰν ὦσιν τρεῖς κύκλοι τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένοι καὶ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ ὁ περιλαμβάνων αὐτοὺς κύκλος δοθεὶς ἔσται τῷ μεγέθει. προγράφεται δὲ τάδε.*

11 *ζʹ. Τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν καὶ δοθεῖσαν ἑκάστην τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ εὐθειῶν· δεῖξαι δοθεῖσαν τὴν ἐπιζευγνύουσαν τὰ Δ Β σημεῖα* [*τὴν ΒΔ*].

5. *τῆι ΔΖ* A² ex *τῆι Δ** 7. ϛ A¹ in marg. (S), ε̄η B *αἱ* add. *Hu* 9. *ὅτι Co* pro *οὕτως* 12. *ΛΗ ΛΖ ΛΓ Hu, ΛΓ ΛΗ* ABS, *ΛΓ ΛΗ ΛΖ Co* 13. *τῶν ὑπὸ τῶν* S, *τῶν αὐτῶν* AB 14. 15. *ἐν κύκλῳ* — *σημεῖα* et *ἄρα* add. *Co* 18. *ΛΗΖ Hu* pro *ΛΗΚ* 18. 19. *ἐν κύκλῳ Co* pro *κύκλων* 19. *τὰ ΛΗΖΓ* A, distinx. BS 21. *τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΛΚ* ABS, corr. *Sca*, om. *Co* 24. numerum ζον prae-

$\lambda\zeta = \lambda\mu$ (*elem. 1, 4*). Et quoniam est $\alpha\delta = \delta\gamma$*), est *igitur propter parallelas* $\alpha\gamma$ $\varepsilon\mu$ $\Delta\, \alpha\delta\gamma \sim \Delta\, \varepsilon\delta\mu$, *ideoque* $\varepsilon\delta = \delta\mu$, *et subtrahendo* $\alpha\varepsilon = \gamma\mu$. Sed est etiam $\alpha\lambda = \lambda\gamma$, et $\angle\, \varepsilon\alpha\lambda = \angle\, \mu\gamma\lambda$ (uterque enim rectus est); ergo est $\varepsilon\lambda = \lambda\mu = \lambda\zeta$ (*ut statim demonstravimus*). Sed *ex hypothesi* est etiam $\varepsilon\eta = \eta\zeta$; ergo *triangula* $\varepsilon\lambda\eta$ $\zeta\lambda\eta$ *inter se aequalia sunt et similia, ideoque* $\lambda\eta$ perpendicularis est ipsi $\varepsilon\zeta$; itaque $\vartheta\eta = \eta\varkappa$ (*elem. 3, 3*).

VI. Sit circulus $\alpha\beta\gamma$, et tangentes $\alpha\delta$ $\delta\gamma$, et iungatur Prop. 6
$\alpha\gamma$, et *similiter atque in superiore theoremate* recta $\varepsilon\zeta$ ita ducatur, ut sit $\vartheta\eta = \eta\varkappa$; dico esse etiam $\varepsilon\eta = \eta\zeta$.

Sumatur circuli centrum λ, et iungantur $\varepsilon\lambda$ $\lambda\alpha$ $\lambda\eta$ $\lambda\zeta$ $\lambda\gamma$. Quoniam *propter elem. 3, 18 et 3* uterque angulorum $\varepsilon\alpha\lambda$ $\varepsilon\eta\lambda$ rectus est, in circuli circumferentia sunt puncta ε α η λ; ergo est $\angle\, \eta\alpha\lambda = \angle\, \eta\varepsilon\lambda$ (*elem. 3, 21*). Rursus quia uterque angulorum $\lambda\eta\zeta$ $\lambda\gamma\zeta$ rectus est, in circuli circumferentia sunt puncta λ η ζ γ; ergo est $\angle\, \eta\gamma\lambda = \angle\, \eta\zeta\lambda$. *Et est* $\angle\, \eta\gamma\lambda = \angle\, \eta\alpha\lambda = \angle\, \eta\varepsilon\lambda$ (*ut modo demonstravimus*); ergo $\angle\, \eta\varepsilon\lambda = \angle\, \eta\zeta\lambda$; itaque aequicrure est triangulum $\varepsilon\lambda\zeta$. Et est perpendicularis $\lambda\eta$; ergo est $\varepsilon\eta = \eta\zeta$.

Si sint tres circuli positione et magnitudine dati et inter se tangentes, circulus quoque qui eos comprehendit magnitudine datus erit[1]. Praemittuntur autem haec.

VII. Sit quadrilaterum $\alpha\beta\gamma\delta$, angulum $\alpha\beta\gamma$ rectum et Prop. 7
singulas $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\alpha$ *magnitudine* datas habens; demonstretur rectam quae puncta β δ coniungit *magnitudine* datam esse[2].

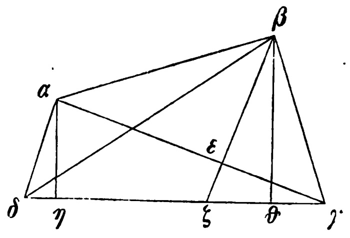
*) Nullum eiusmodi theorema in Euclidis elementis invenitur; et est corollarium ad 4 propos. 36, quod auctore Campano disertis verbis addidit Commandinus, veteres autem ut consentaneum omiserunt.

1) Vide infra propos. 10.

2) Sine dubio scriptor, ut supra iam significavimus, hoc agit, ut quadrilateri, cuius unus angulus rectus sit, lateribus magnitudine datis, nulla positionis laterum ratione habita, demonstret diagonalem, quae rectum angulum secat, magnitudine datam esse. Ceterum punctorum α β γ δ positionis plures sunt casus, e quibus unum tantum eligit, reliquos omittit. Conf. p. 195 adnot. *.

mittit B 25. ἐφαπτομένη A[1], corr. A[2](BS) 27. ζ' add. *Hu*
30. τὴν *ΒΔ* del. *Co*

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ μὲν τὴν ΓΔ ἡ ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΓ ἡ ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν [ἡ ἐν ἀριθμοῖς], καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετός ἐστιν ἡ ΒΕ, δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἑκάστη τῶν ΑΕ ΕΓ ΑΓ ΒΕ (καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσον ὂν τῷ ἀπὸ ΒΓ γίνεται δοθέν· καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΓ, ὥστε ἑκάστη τῶν ΑΕ ΕΓ ΒΕ ἔσται δοθεῖσα). πάλιν ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκάστη τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΑ εὐθειῶν, καὶ κάθετός ἐστιν ἡ ΑΗ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἑκάστη τῶν ΔΗ ΗΓ ΑΗ (καὶ γὰρ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ παρὰ τὴν ΓΔ παραβληθεῖσα ποιεῖ δοθεῖσαν τὴν τῆς ΓΔ πρὸς ΗΔ ὑπεροχήν, ὡς ἔστι λῆμμα· ὥστε καὶ ἑκάστην τῶν ΔΗ ΗΓ ΑΗ δεδόσθαι). καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστιν τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΓΕΖ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἥ τε ΑΓ πρὸς ΓΖ καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ. καὶ ἔστι δοθεὶς ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΕ λόγος· δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΖ ΖΕ. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ ΒΓ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΖΒ ΒΓ ΓΖ δοθεῖσα. ἤχθω δὴ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΖ ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΖΘ ΘΓ ΒΘ· ὥστε καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΘ ΘΒ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΘΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ.



1. ἐζεύχθω ABS, corr. *Hu* 2. ΑΓ ἡ ΒΕ — ἑκατέρα add. *Sca*, ΑΓ ἡ ΒΕΖ. καὶ ἑκάστη add. *Co* 3. ἡ ἐν ἀριθμοῖς interpolatori tribuit *Hu* ἡ] η A, η̄ B, ἡ S, del. *Co Sca* 6. καὶ γὰρ — 10. ἔσται δοθεῖσα, etsi vera ratione nituntur, tamen suspecta videntur; nam scriptor hanc demonstrationem tamquam consenteneam poterat omittere; at vero, si ponere malebat, debuit ex ordine demonstrare primum αγ, tum αε εγ, denique βε datas esse 9. τῶν ΑΕ *Co Sca* pro τῶν ΑΕ 10. ΒΕ add. *Hu* 13. ἡ ΑΗ *Co Sca* pro ἡ ΑΗ 14. ΑΗ add. *Hu* 15. 16. τὴν τῆς ΓΔ *Hu* pro τὴν τῆς ΓΗ 20. ἄρα add. *Sca* 21. ἑκατέρα *Hu* utroque loco pro ἑκάστη 22. ΓΖ (ante δοθεῖσα) *Hu* pro ΓΔ

Iungatur $\alpha\gamma$, et ducantur perpendiculares $\alpha\eta$ ad $\gamma\delta$ et $\beta\varepsilon$ ad $\alpha\gamma$, *et producta $\beta\varepsilon$ secet ipsam $\delta\gamma$ in ζ.* Iam quia utraque rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ *magnitudine* data, et angulus $\alpha\beta\gamma$ rectus, et $\beta\varepsilon$ perpendicularis est, singulae igitur $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\gamma$ $\alpha\gamma$ $\beta\varepsilon$ datae erunt — etenim rectangulum sub $\alpha\gamma$ $\gamma\varepsilon$, quippe quod quadrato ex $\beta\gamma$ aequale sit, datum est; et data $\alpha\gamma$; ergo etiam singulae $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\gamma$ $\beta\varepsilon$ datae erunt[3]. Rursus quia singulae $\alpha\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\alpha$ datae sunt et $\alpha\eta$ perpendicularis est, etiam singulae $\delta\eta$ $\eta\gamma$ $\alpha\eta$ datae sunt — etenim quadratorum ex $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ differentia ad rectam $\delta\gamma$ applicata efficit differentiam rectarum $\delta\gamma$ $\delta\eta$ datam, sicut lemmate *quodam demonstratum est*[4], ita ut singulae $\delta\eta$ $\eta\gamma$ $\alpha\eta$ datae sint[5]. Et quoniam triangulum $\alpha\eta\gamma$ simile est triangulo $\zeta\varepsilon\gamma$, est $\eta\gamma : \gamma\varepsilon = \alpha\gamma : \gamma\zeta = \alpha\eta : \varepsilon\zeta$. Et est proportio $\eta\gamma : \gamma\varepsilon$ data (*dat. 1*), *dataeque* $\alpha\gamma$ $\alpha\eta$; ergo etiam utraque $\gamma\zeta$ $\varepsilon\zeta$ data erit (*dat. 2*). Sed etiam utraque $\beta\varepsilon$ $\beta\gamma$; ergo *trianguli* $\zeta\beta\gamma$ singula *latera* data sunt. Iam ducatur perpendicularis $\beta\vartheta$ ad $\zeta\gamma$; ergo, *similiter ac modo demonstravimus*, singulae $\zeta\vartheta$ $\vartheta\gamma$ $\beta\vartheta$ datae sunt. *Et data est* $\delta\vartheta$ $(= \delta\gamma - \vartheta\gamma)$; ergo *trianguli* orthogonii $\delta\vartheta\beta$ *catheti* $\delta\vartheta$ $\vartheta\beta$ singulae datae sunt; data igitur est $\delta\beta$ (*adnot. 3*).

3) Est enim $\alpha\gamma \cdot \gamma\varepsilon = \beta\gamma^2$ propter elem. 10, 33 lemma; et data est $\beta\gamma$; ergo etiam $\beta\gamma^2$ (dat. 52); itaque rectangulum $\alpha\gamma \cdot \gamma\varepsilon$ magnitudine datum est. Sed quia est $\alpha\gamma^2 = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2$, et $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ magnitudine datae sunt, etiam quadratum ex $\alpha\gamma$ magnitudine datum est; ergo etiam recta $\alpha\gamma$ magnitudine data (dat. 55). Et datum erat rectangulum $\alpha\gamma \cdot \gamma\varepsilon$; ergo $\gamma\varepsilon$ data est (dat. 57); itaque etiam $\alpha\varepsilon$ (dat. 4). Denique, quia propter similitudinem triangulorum est $\alpha\beta : \beta\gamma = \beta\varepsilon : \varepsilon\gamma$, data est etiam $\beta\varepsilon$ (dat. 1. 2).

4) Hoc lemma nostra aetate non exstat; quod sic restituendum esse videtur. Propter elem. 2, 13 est

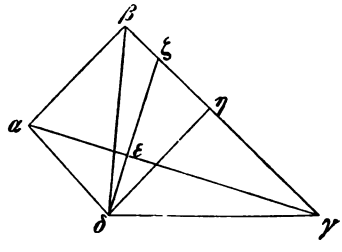
$$\alpha\gamma^2 = \alpha\delta^2 + \delta\gamma^2 - 2\,\delta\gamma \cdot \delta\eta, \text{ sive}$$
$$\alpha\gamma^2 - \alpha\delta^2 = \delta\gamma^2 - 2\,\delta\gamma \cdot \delta\eta = \delta\gamma\,(\delta\gamma - 2\,\delta\eta).$$

Et datae sunt rectae $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$; ergo etiam quadrata, et quadratorum differentia. Et data est $\delta\gamma$; ergo secundum dat. 57 differentia $\delta\gamma - 2\,\delta\eta$ data est; itaque etiam differentia $\delta\gamma - \delta\eta$.

5) Differentia $\delta\gamma - \delta\eta$, quam datam esse demonstravimus, est ipsa $\eta\gamma$. Et data est $\delta\gamma$; ergo etiam $\delta\eta$ data (dat. 4). Et est $\alpha\eta^2 = \alpha\gamma^2 - \eta\gamma^2$; ergo data est $\alpha\eta$ (adnot. 3 med.).

Ἄλλως.

12 *η'. Ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΔΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκάστη τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΑ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, δοθεῖσα ἔσται καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΓ.*



καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστιν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΓΕΖ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ λόγος· δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΖ λόγος. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΓΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΔΕ δοθεῖσα· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΔΖ ἔσται δοθεῖσα. κατὰ ταὐτὰ δοθήσεται καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΖ ΖΓ (*ὡς γὰρ ἡ ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΕ. καὶ δοθεὶς ὁ τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ λόγος*). *ἤχθω δὴ πάλιν ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἡ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΖΗ ΗΓ, ὥστε καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΗ ΗΔ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ Η γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΔ.*

13 *θ'. Ἴσοι κύκλοι τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δοθέντες, ὧν κέντρα τὰ Α Β, καὶ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐφαπτόμενος τῶν κύκλων, ὧν κέντρα τὰ Α Β, γεγράφθω ὁ ΓΕΖ· ὅτι δοθεῖσά ἐστιν αὐτοῦ ἡ διάμετρος.*

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖΗ ΓΖΘ ΓΜΠ ΑΒ ΓΕ ΠΖΚ ΘΚ ΘΗ· *γίνεται δὴ παράλληλος ἡ ΗΘ τῇ ΓΕ διὰ τὸ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΖΓ ΗΖΘ ἴσας εἶναι, καὶ ὁμοίας*

2. ηόν B, ζ AS 4. *καὶ* (ante *ἑκατέρα*) add. *Co* *ἑκάστη τῶν ΑΕ ΕΓ ΕΔ* coni. *Hu* 17. post *ΓΒ λόγος* add. *δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΖΓ πρὸς ΓΕ λόγος. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΓΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΓΖ* *Co* (at haec tacite suppleri voluit scriptor) 18. 19. *ἑκατέρα τῶν* //// *ὥστε* A, in lacuna *δη ηζ* add. B *Co*, *ΖΗ ΗΔ Sca*, corr. *Hu* 21. Θ A¹ in marg. (BS) 22. *τὰ ΑΒ* AB, distinx. S 23. *τὰ ΑΒ* A, distinx. BS, item p. 196, 4 25. *ΑΒΓ Ε Π Ζ Κ Θ Κ* A, *αβγ επζ κθκ* BS, *ΑΒ ΓΕ ΠΖ ΖΗΘ Sca*, corr. *Co* 26. *ΘΗ* add. *Hu*

ALITER.

VIII. Ducatur ad $\alpha\gamma$ perpendicularis $\delta\varepsilon$, quae producatur ad ζ *punctum sectionis cum* $\beta\gamma$*). Quoniam singulae $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\gamma\alpha$ magnitudine datae sunt[6]), et $\delta\varepsilon$ perpendicularis est, singulae $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\gamma$ $\varepsilon\delta$ datae erunt (*adnot. 4. 5*). Et quoniam triangulum $\alpha\beta\gamma$ simile est trianqulo $\zeta\varepsilon\gamma$, est $\gamma\varepsilon : \varepsilon\zeta = \gamma\beta : \beta\alpha$. Sed data est proportio $\gamma\beta : \beta\alpha$ (*dat. 1*); ergo etiam $\gamma\varepsilon : \varepsilon\zeta$ data. Et data est $\gamma\varepsilon$; ergo etiam $\varepsilon\zeta$ data (*dat. 2*). Sed erat etiam $\delta\varepsilon$ data; ergo tota $\delta\zeta$ data erit (*dat. 3*). Eadem ratione utraque $\beta\zeta$ $\zeta\gamma$ data esse *demonstrabitur* (est enim $\alpha\gamma : \gamma\beta = \zeta\gamma : \gamma\varepsilon$; et data est proportio $\alpha\gamma : \gamma\beta$, *ac data recta* $\gamma\varepsilon$; *ergo data* $\zeta\gamma$, *itemque* $\beta\gamma - \zeta\gamma = \beta\zeta$). Iam rursus a δ ducatur perpendicularis $\delta\eta$; ergo singulae $\zeta\eta$ $\eta\gamma$ $\delta\eta$ datae sunt. Et data est $\beta\eta$ $(= \beta\zeta + \zeta\eta)$; ergo *trianguli* orthogonii $\beta\eta\delta$ *catheti* $\beta\eta$ $\eta\delta$ singulae datae sunt; itaque $\beta\delta$ data est (*adnot. 3*).

IX. *Sint duo* aequales circuli positione et magnitudine dati, quorum centra α β; et *extra sit* datum punctum γ, per quod circulus $\gamma\varepsilon\zeta$ describatur, tangens eos, quorum centra α β, *in punctis* ζ ε; dico circuli $\gamma\varepsilon\zeta$ diametrum datam esse[1]). Prop. 8

Iungantur $\varepsilon\zeta\eta$ $\gamma\zeta\vartheta$ $\gamma\mu\pi$ $\alpha\beta$ $\gamma\varepsilon$ $\pi\zeta\varkappa$ $\vartheta\varkappa$ $\vartheta\eta$**). Fiunt igitur $\eta\vartheta$ $\gamma\varepsilon$ parallelae, quia ad verticem anguli $\varepsilon\zeta\gamma$ $\eta\zeta\vartheta$ inter

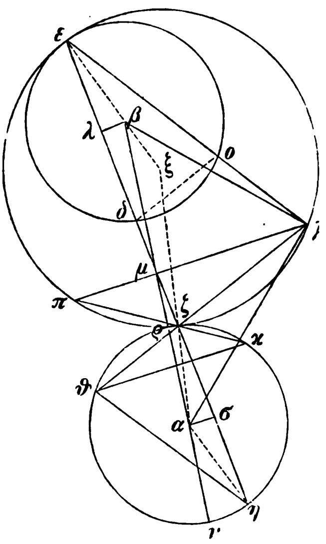
*) Hic unus casus est ex pluribus quos licet statuere. Punctum enim ε aut extra quadrilaterum in productam $\gamma\alpha$ cadit, aut in ipsum punctum α, aut inter α γ; atque in hoc quidem casu rectae $\delta\varepsilon$ productae punctum ζ aut inter β γ cadit (quod supra supponitur), aut in ipsum β, aut inter α β. Et huius extremi casus demonstrationem addit Commandinus, quam Graecus scriptor neutiquam omisit incuria; sed uno casu demonstrato reliquos consentaneos esse existimavit.

6) Scilicet $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ ex hypothesi, et $\gamma\alpha$ secundum adnot. 8.

1) Nonnulla eaque graviora scriptor huius theorematis silentio omisit, quae a nobis, quantum probabili coniectura adsequi potuimus, restituta sunt. In figura lineas punctis notatas et litteras ξ o addidimus.

**) Vult igitur scriptor puncta η ϑ $\varkappa$ esse in circumferentia circuli cuius centrum α, item π in circumferentia circuli $\gamma\varepsilon\zeta$; denique μ statuit punctum sectionis rectarum $\beta\alpha$ $\varepsilon\zeta\eta$.

τὰς ΕΠΖ ΗΚΖ περιφερείας καὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΠΓ ἐστὶν παράλληλος. καὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ κύκλοι, ὧν τὰ κέντρα τὰ Α Β· ἴση ἄρα ἡ ΖΗ τῇ ΔΕ. ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΣ ΒΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΣ τῇ ΒΛ· ὥστε καὶ ἡ μὲν ΒΜ τῇ ΜΑ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΜΣ (δύο γὰρ τρίγωνά ἐστιν τὰ ΒΛΜ ΑΣΜ τὰς δύο γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν ἴσας ἔχοντα καὶ τὰς πρὸς τοῖς Λ Σ σημείοις ὀρθάς, ἔχει δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ΒΛ τῇ ΑΣ). καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκάστη τῶν ΜΛ ΛΒ ΜΣ ΣΑ [οὕτως καὶ ἡ ΖΗ ΔΕ καὶ ΒΛ ΛΣ]· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΜ ΜΑ εὐθειῶν. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΓ ΓΒ



δοθεῖσά ἐστιν (θέσει γὰρ τὰ Α Β Γ σημεῖα)· δοθὲν ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· καὶ ἡ ΓΜ ἄρα δοθεῖσα ἔσται (καθέτου ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ). καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΝΡ διάμετρος τοῦ ΗΘΚ κύκλου, ἀλλὰ καὶ

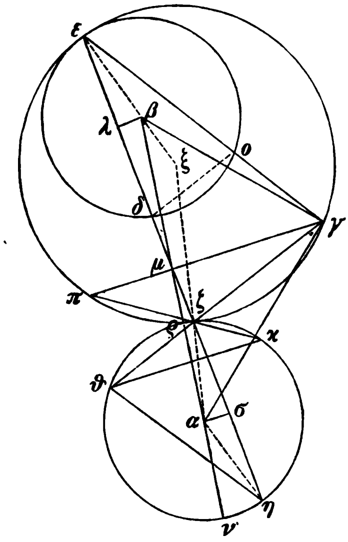
1. *ΗΚΖ* (ante *περιφερείας*) *Co* pro $\overline{ΗΝΘ}$ 2. 3. *τῇ ΠΓ Co* pro *τῆι ΠΤ* 9. *δύο γὰρ* — 16. *τῇ ΑΣ* interpolatori tribuit *Hu* (scilicet scriptor huius theorematis alia multo difficiliora omittit) 16. post *τὴν ΒΛ* add. *καὶ κάθετον* ABS, om. *Co* (interpolator *κάθετον καθέτῳ* voluisse videtur, quae vera quidem sunt, at certe abundant) 18. $\overline{MC}$ $\overline{CΛ}$ A, $\overline{μς}$ $\overline{ςλ}$ B, $\overline{μς}$ $\overline{σλ}$ S, corr. *Hu* 18. 19. *οὕτως* — *ΒΛ ΛΣ*, manifestam interpolationem, del. *Hu* 22. 23. *τῶν* $\overline{ΑΓ}$ $\overline{ΓΒ}$ *δοθεῖσα ἐστιν* bis scripta in A(S), corr. B 23. *θέσει* A[2] in marg. B[1], *εὐθεῖα* A[1]B[3], *θέσει εὐθεῖα* S 24. *τὸ ΑΒ τρίγωνον* ABS, corr. *Co* 25. *καθέτου* — *ἐπὶ τὴν ΑΒ* forsitan interpolata sint

se aequales, et circumferentiae $\varepsilon\pi\zeta$ $\eta\varkappa\zeta$ similes [2], ideoque triangula $\varepsilon\gamma\zeta$ $\eta\vartheta\zeta$ aequiangula sunt. Atque eadem ratione $\vartheta\varkappa$ $\pi\gamma$ parallelae esse *demonstrantur*. Et *ex hypothesi* circuli, quorum centra α β, aequales sunt; ergo recta $\zeta\eta$ ipsi $\varepsilon\delta$ aequalis est [3]. Ducantur *ad rectam* $\varepsilon\eta$ perpendiculares $\alpha\sigma$ $\beta\lambda$; hae igitur inter se aequales sunt (*nam propter elem. 3, 14 in aequalibus circulis aequales rectae distant a centris aequali intervallo*); itaque etiam $\alpha\mu$ $\beta\mu$, itemque $\sigma\mu$ $\lambda\mu$ inter se aequales sunt (nam duo triangula $\alpha\sigma\mu$ $\beta\lambda\mu$ binos angulos ad verticem aequales, et angulos ad σ λ rectos, et unum latus $\alpha\sigma$ uni lateri $\beta\lambda$ aequale habent). Et datae sunt singulae $\mu\lambda$ $\lambda\beta$ $\mu\sigma$ $\sigma\alpha$; ergo etiam utraque $\beta\mu$ $\mu\alpha$ data est [4]. Sed data est etiam utraque $\alpha\gamma$ $\gamma\beta$ (*dat. 26*; nam puncta α β γ positione *data sunt*); ergo triangulum $\alpha\beta\gamma$ specie datum

2) Hoc tamquam consentaneum scriptor omisit demonstrare. Et sumpto circuli $\gamma\varepsilon\zeta$ centro ξ iūnctisque rectis $\alpha\xi$ $\xi\varepsilon$ $\alpha\eta$ facile apparet, quoniam recta $\xi\alpha$ per ζ transit (elem. 3, 12), et radii sunt $\varepsilon\xi$ $\xi\zeta$ $\eta\alpha$ $\alpha\zeta$, triangula $\varepsilon\xi\zeta$ $\eta\alpha\zeta$ aequiangula esse. Unde nos statim concludimus angulos, qui sunt ad peripheriam, $\varepsilon\gamma\zeta$ $\eta\vartheta\zeta$ aequales (elem. 3, 20), ideoque triangula $\varepsilon\gamma\zeta$ $\eta\vartheta\zeta$ aequiangula esse. Verum Graecus scriptor, Euclidis elementa liberius egrediens et centri ξ mentionem evitans, lemmate nititur huius modi: Si duo circuli extrinsecus se tangant, et per contactûs punctum quaelibet recta, velut $\varepsilon\zeta\eta$, ducatur, similes circulorum circumferentiae abscinduntur (quod quidem lemma similiter, ac modo significavimus, demonstratur; nec minus valet, si circuli intus se tangant, et a contactûs puncto quaelibet recta, velut $\varepsilon\delta\zeta$, ducatur, ut recte adnotat *Co*). Porro ex arcuum $\varepsilon\pi\zeta$ $\eta\varkappa\zeta$ similitudine efficit eos, qui in his insistunt, ad peripheriam angulos $\varepsilon\gamma\zeta$ $\eta\vartheta\zeta$ aequales esse. Denique conferatur libri VII propos. 102, ubi auxilio tangentis rectas, velut $\eta\vartheta$ $\gamma\varepsilon$, parallelas esse demonstratur.

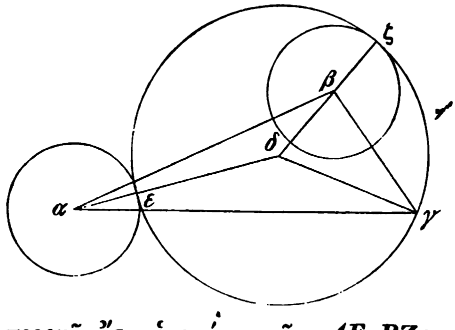
3) Hoc loco scriptor sic concludere videtur: Quoniam, ut supra demonstratum est, parallelae sunt $\vartheta\eta$ $\varepsilon\gamma$, aequales sunt anguli $\zeta\eta\vartheta$ $\zeta\varepsilon\gamma$. Sed sit o punctum sectionis rectae $\varepsilon\gamma$ et circuli, cuius centrum β, circumferentiae, et iungatur δo. Ergo triangula $\zeta\eta\vartheta$ $\delta\varepsilon o$ similia sunt (utrumque enim triangulo $\zeta\varepsilon\gamma$ simile). Sed eadem etiam aequalia, quia circuli circumscripti aequales sunt (elem. 3, 26. 28); ergo est $\zeta\eta = \delta\varepsilon$. (At vero brevius, ut videtur, demonstrari poterat rectas $\beta\delta$ $\xi\zeta\alpha$ parallelas, ideoque triangula $\varepsilon\beta\delta$ $\eta\alpha\zeta$ similia et aequalia esse. Alia rursus ratione Commandinus ex lemmate, quod in adnot. 2 attulimus, arcûs $\varepsilon\delta$ $\varepsilon\pi\zeta$ similes, itaque arcus $\varepsilon\delta$ $\eta\varkappa\zeta$ similes et aequales; ergo etiam rectas $\varepsilon\delta$ $\eta\zeta$ aequales esse demonstrat. Quod si verum esse statuamus, supra abundet demonstratio de rectarum $\varepsilon\gamma$ $\vartheta\eta$ parallelismo.)

4) Argumentatio scriptoris haec esse videtur: Propter dat. 88 singulae $\varepsilon\delta$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ magnitudine datae sunt, ideoque etiam tota $\varepsilon\eta$. Et datae sunt $\varepsilon\lambda$ $(= \frac{1}{2}\varepsilon\delta)$, $\eta\sigma$ $(= \frac{1}{2}\eta\zeta)$; ergo per subtractionem data est recta $\lambda\sigma$, ideoque etiam utraque $\lambda\mu$ $\mu\sigma$ (dat. 7). Tum rectas $\beta\lambda$ $\alpha\sigma$ datas esse inde effecisse videtur, quod in triangulis orthogoniis $\varepsilon\lambda\beta$ $\eta\sigma\alpha$ datae sunt singu-



ἡ *ΜΑ* δοθεῖσα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ *ΜΡ* δοθεῖσά ἐστιν. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν τὸ ὑπὸ *ΝΜΡ*, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ *ΗΜΖ*, τουτέστιν τὸ ὑπὸ *ΕΜΖ*, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΜΠ*. καὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ *ΓΜ*· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ *ΓΠ*. ἐπεὶ οὖν θέσει καὶ μεγέθει ἐστὶν κύκλος, οὗ κέντρον τὸ *Α*, καὶ δοθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει ἡ *ΓΠ*, καὶ διηγμέναι αἱ *ΠΖΚ ΓΖΘ*, ὥστε παράλληλον εἶναι τῇ *ΓΠ* τὴν *ΚΘ*, δοθεῖσά ἐστιν ἡ διάμετρος τοῦ περὶ τὸ *ΓΖΠ* τρίγωνον κύκλου, τουτέστιν τοῦ *ΓΕΖ*.

14 ι΄. Τρίγωνον τὸ *ΑΒΓ* ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν δοθεῖσαν, καὶ σημεῖον ἐντὸς τὸ *Δ*, καὶ ᾧ ὑπερέχει ἡ *ΑΔ* τῆς *ΓΔ*, τούτῳ ὑπερεχέτω καὶ ἡ *ΓΔ* τῆς *ΔΒ*, καὶ ἔστω ὑπεροχὴ δοθεῖσα· ὅτι ἑκάστη τῶν *ΑΔ ΔΓ ΔΒ* δοθεῖσά ἐστιν.



Ἐπεὶ ἡ τῶν *ΑΔ ΔΓ* ὑπεροχὴ δοθεῖσά ἐστιν, ἔστω τῇ ὑπεροχῇ ἴση ἑκατέρα τῶν *ΑΕ ΒΖ*· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ *ΕΔ ΔΓ ΔΖ* ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. γεγράφθω περὶ κέντρον τὸ

3. 4. τὸ ὑπὸ *ΝΜΡ* *Co* pro τὸ ὑπὸ ΗΜΡ 6. τουτέστιν τὸ add. *Hu* auctore *Co* 15. 16. τῆι ΓΠ τῆι ΚΘ AB¹S, τὴν *ΓΠ* τῇ *ΚΘ* voluit *Co*, corr. B³ 19. Ι A¹ in marg. (BS) 20. εν τοῖς | τὸ A(S), corr. B *Sca*

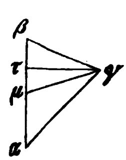
est (*dat. 39*); itaque etiam $\gamma\mu$ data erit[5]. Et quia circuli $\eta\vartheta\varkappa$ diametrus $\nu\varrho$ (*dat. def. 5*), itemque $\mu\alpha$ datae sunt, reliqua igitur $\mu\varrho$ data est[6]. Et quia datum est $\nu\mu\cdot\mu\varrho$, datum igitur etiam $\eta\mu\cdot\mu\zeta$ (*utrumque enim rectangulum propter elem. 3, 36 quadrato ex tangente aequale est*), id est $\varepsilon\mu\cdot\mu\zeta$, id est (*elem. 3, 35*) $\gamma\mu\cdot\mu\pi$. Et data est $\gamma\mu$; ergo etiam $\mu\pi$ (*dat. 57*) *itemque* $\gamma\pi$ data est. Iam quia positione ac magnitudine *datus* est circulus, cuius centrum α, et positione ac magnitudine data est recta $\pi\gamma$, et rectae $\pi\zeta\varkappa$ $\gamma\zeta\vartheta$ ita ductae sunt, ut $\vartheta\varkappa$ ipsi $\pi\gamma$ parallela sit, data est diametrus circuli circa $\gamma\zeta\pi$ triangulum *descripti*[7]), id est circuli $\gamma\varepsilon\zeta$.

X. *Sit* triangulum $\alpha\beta\gamma$ singula latera data habens, et intus punctum δ, et sit $\alpha\delta - \delta\gamma = \delta\gamma - \delta\beta$, sitque ea differentia data; dico unamquamque rectarum $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\delta\beta$ datam esse. Prop. 9

Quoniam data est differentia $\alpha\delta - \delta\gamma$, sit ei differentiae utraque rectarum $\alpha\varepsilon$ $\beta\zeta$*) aequalis; ergo tres $\varepsilon\delta$ $\delta\gamma$ $\delta\zeta$ inter se aequales sunt. Describatur circa centrum δ circulus $\gamma\varepsilon\zeta$;

lae $\varepsilon\lambda$ $\eta\sigma$ (ut statim demonstravimus), itemque $\varepsilon\beta$ $\beta\eta$ (sunt enim radii circulorum magnitudine datorum: dat. defin. 5). Omnino igitur scriptor eadem ratione quam supra propos. 7 adnot. 2 et 3 demonstravimus sic procedit, ut omissa punctorum α β positione rectas $\alpha\mu$ $\mu\beta$ magnitudine datas esse ostendat. At multo brevius dicere poterat secundum dat. def. 6 puncta α β positione data esse (id quod paulo post diserte scribit); ergo rectam $\alpha\beta$ magnitudine (dat. 26), ideoque utramque etiam rectarum $\alpha\mu$ $\mu\beta$, quippe quae inter se aequales sint, magnitudine datam esse (dat. 7).

5) Hoc aut ex ipsis datis efficitur, quoniam triangulum $\mu\beta\gamma$ specie datum est (41); sed idem etiam magnitudine (52); ergo $\gamma\mu$ magnitudine data (55), — aut, sicut vel ipse huius theorematis scriptor vel interpolator quidam significavit, a puncto γ perpendiculari ad $\alpha\beta$ ductâ, quae si sit $\gamma\tau$, secundum ea quae propos. 7 adnot. 4 et 5 demonstravimus datae erunt $\tau\alpha$ $\tau\gamma$; et data etiam $\tau\mu$ ($= \tau\alpha - \mu\alpha$); ergo trianguli orthogonii $\gamma\tau\mu$ singulae catheti datae sunt, itaque etiam $\mu\gamma$ (ibid. adnot. 3).



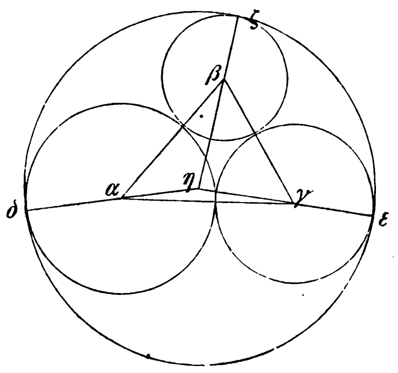
6) Circuli enim $\eta\vartheta\varkappa$ datus est radius $\varrho\alpha$ (dat. def. 5); et data $\mu\alpha$; ergo etiam $\mu\varrho$ data (dat. 4). Sed pro radio $\varrho\alpha$ scriptor diametrum $\nu\varrho$ ponit, quia statim in proximis tota $\nu\mu$ ($= \nu\varrho + \varrho\mu$) tamquam data utitur; itaque sic concludit: Data $\nu\varrho$; ergo etiam dimidia $\varrho\alpha$; et data $\mu\alpha$; ergo datae etiam $\mu\alpha - \varrho\alpha = \mu\varrho$, et $\mu\varrho + \nu\varrho = \nu\mu$.

7) Vide append.

*) Qualem punctorum ε ζ positionem scriptor intellexerit, statim ex proximis elucet.

Δ κύκλος ὁ ΓΕΖ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΖ. ἧς ἡ ΒΖ ἐστὶν δοθεῖσα· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ ἐστὶν δοθεῖσα. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΔ ΔΓ δοθεῖσά ἐστιν· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΔ *ΔΓ ΔΒ ἐστὶν δοθεῖσα.*

15 *ια'. Τὰ μὲν οὖν λήμματα ταῦτα, τὸ δὲ ἀρχαϊκόν· τρεῖς κύκλοι ἄνισοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων δοθείσας ἔχοντες τὰς διαμέτρους, ὧν κέντρα τὰ Α Β Γ, καὶ περὶ αὐτοὺς κύκλος ἐφαπτόμενος αὐτῶν ὁ ΔΕΖ, οὗ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν διάμετρον.*



Ἔστω δὲ αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Η, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τὰ Α Β Γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ ΓΒ καὶ ἔτι αἱ ΗΑΔ ΗΒΖ ΗΓΕ. ἐπεὶ οὖν αἱ διάμετροι τῶν κύκλων, ὧν κέντρα τὰ Α Β Γ, δοθεῖσαί εἰσιν, γενήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ δοθεῖσα. καὶ αἱ τῶν ΑΗ ΗΓ ΗΒ διαφοραὶ δοθεῖσαι· διὰ ἄρα τὸ προγεγραμμένον δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΗ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ δοθεῖσά ἐστιν, ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ διάμετρος τοῦ ΔΕΖ κύκλου. καὶ τοῦτο μὲν ἐνθάδε μοι πέρας ἔχει, τὰ δὲ λοιπὰ ὑπογράψω.

1. *ὁ γεζ* B *Co*, *ὁ* $\overline{ΓΖ}$ A[8]S 2. *ἧς* vel *ἀλλὰ καὶ Hu* pro *ὧν ἐστιν δοθεῖσα ἐστιν ἡ λοιπὴ* A(B[3]S), prius *ἐστιν* om. B[1], alterum *Hu* 3. *ἑκατέρα Hu* pro *ἡ* 3. 4. *δοθεῖσά ἐστιν — τῶν ΑΔ* add. *Hu* (alterum *ΔΓ*, quod exstat in A, omittunt insuper BS) 5. $\overline{ΙΑ}$ A[1] in marg. (BS) 7. *τὰ* $\overline{ΑΒΓ}$ A, distinx. BS, item vs. 12 11. *κέντρον τὸ ν* B *Co* 14. 15. *ΗΑΔ ΗΒΖ ΗΓ* A (sed *Η* simile *Ν*), $\overline{ναδ}$ $\overline{ηβζ}$ $\overline{νγ}$ B, $\overline{ναδ}$ $\overline{νβζ}$ $\overline{νγ}$ S, ter *η* corr. *Sca*, *ΝΑΔ ΝΒΖ ΝΓΕ Co* 17. 18. *τὰ* $\overline{ΑΒΓ}$ AS, distinx. B 18. *δοθεῖσαι ἐστιν* A(B[1]), *δοθεῖσα ἐστὶ* B[3](S), corr. *Hu* auctore *Co* 21. 22. *τῶν ΑΝ ΝΓ ΝΒ* ABS *Co*, corr. *Hu* 23. *ἡ ΑΝ Co* 25. 26. *ταῦτα μὲν — ἐχέτω* coni. *Hu*

ergo propter superius *lemma* data est $\delta\zeta$. Cuius *portio* $\beta\zeta$ data est; ergo reliqua $\beta\delta$ data est. Sed etiam utraque rectarum $\alpha\delta$ ($= \delta\zeta + \beta\zeta$) et $\delta\gamma$ ($= \delta\zeta$) data est; ergo unaquaeque rectarum $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\delta\beta$ data est.

XI. Haec igitur sunt lemmata; *theorema* autem ab initio *propositum* (*cap. 10*) *iam demonstratur hunc in modum.*

Sint tres circuli inaequales, inter se tangentes, quorum Prop. 10
diametri datae sint, et centra α β γ, et circa eos describatur tangens ipsos circulus $\delta\varepsilon\zeta$, cuius diametrum invenire oporteat[1]).

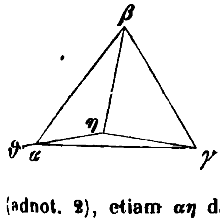
Sit eius centrum η, et centra α β γ iungantur rectis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$, item iungantur $\eta\alpha$ $\eta\beta$ $\eta\gamma$ *producanturque* ad δ ζ ε *puncta circumferentiae circuli, cuius centrum* η. Iam quia diametri circulorum, quorum centra α β γ, datae sunt, singulae etiam $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$ datae erunt (*elem. 3, 12*). Et sunt rectarum $\alpha\eta$ $\eta\gamma$ $\eta\beta$ differentiae datae[2]); ergo propter superius *lemma* recta $\alpha\eta$ data est[3]). Sed etiam $\delta\alpha$ data est, itaque diametrus circuli $\delta\varepsilon\zeta$ data est. Et haec quidem iam finem habeant; reliqua autem subiungam.

1) Accuratius, nisi fallor, scribebatur "dico eius diametrum datam esse". Praeterea scriptor determinare omittit, quibus finibus radiorum $\delta\alpha$ $\zeta\beta$ $\varepsilon\gamma$ proportiones contineantur, ut circa tres circulos α β γ unus $\delta\zeta\varepsilon$ describi possit.

2) Nam quia ex hypothesi η centrum est circuli circa circulos α β γ descripti, est $\eta\alpha + \alpha\delta = \eta\gamma + \gamma\varepsilon = \eta\beta + \beta\zeta$, ideoque $\eta\beta - \eta\gamma = \gamma\varepsilon - \beta\zeta$, et $\eta\beta - \eta\alpha = \alpha\delta - \beta\zeta$, et $\eta\gamma - \eta\alpha = \alpha\delta - \gamma\varepsilon$. Et datae sunt $\gamma\varepsilon$ $\beta\zeta$ $\alpha\delta$; ergo etiam differentiae.

3) Etenim in producta $\eta\alpha$ ponatur $\alpha\vartheta = 2\eta\gamma - \eta\beta - \eta\alpha$; ergo est

$$\eta\beta - \eta\gamma = \eta\gamma - (\eta\alpha + \alpha\vartheta)$$
$$= \eta\gamma - \eta\vartheta.$$



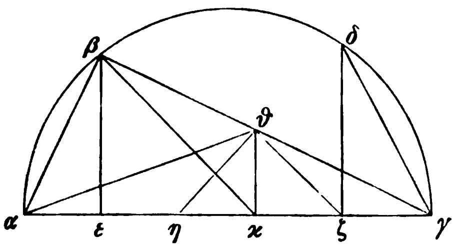
Iam vero, ut propositio 9 adhiberi possit, demonstrari oportet trianguli $\vartheta\beta\gamma$ singula latera data esse; quod etsi neutiquam dubium videtur, tamen qua ratione effectum sit a scriptore, non satis liquet. Porro adhibitâ propos. 9 apparet datam esse $\vartheta\eta$, et, quia data est $\vartheta\alpha$ (adnot. 2), etiam $\alpha\eta$ datam esse.

16 ιβ'. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ κεκλάσθω ἡ ΓΒΑ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἴση ἔστω ἡ ΓΒ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΓ αἱ ΒΕ ΔΖ· ὅτι ἡ ΑΖ διπλασίων ἐστὶν τῆς ΒΕ.

Κείσθω γὰρ τῇ μὲν ΑΕ ἴση ἡ ΕΗ, τῇ δὲ ΑΒ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΘ ΘΗ ΘΖ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ. ἐπεὶ ἡ ΓΒ ἴση ἐστὶν συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ, ὧν ἡ ΒΘ τῇ ΒΑ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΓ λοιπῇ τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΖ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΖ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΖΘΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑΗ γωνίᾳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΑΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΗ, ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΓΖ γωνίᾳ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΘΑΗ ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΖΘΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΗΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΖΗ ἐστὶν ἴση. καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΘΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΑΒΘ ΑΚΘ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὸ ΑΒΘΚ τετράπλευρον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΒΚΑ. ἡμίσους δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΘΑ· ἡμίσους ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΑ. ὀρθὴ δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΕΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΚ. τῆς

1. ΙΒ A[1] in marg. (BS) 1—5. τὸ ΑΒΓ κεκλα|σθω ἡ ΓΒ/ καὶ διήχθω ἡ ΓΔ καὶ | ////////////// συναμφοτέρωι | ////////////// κάθετοι ἤχθωσαν | ////////////////// διπλασίων | ἐστιν τῆς ΒΗ καὶ κείσθω γὰρ Α, similesque lacunae in BS, nisi quod κεκλάσθω ἡ γβα B, κεκλασθω ἡ γβδ S, et καὶ ante κάθετοι atque ἡ δζ ante διπλασίων add. S 1. καὶ (ante κεκλάσθω) add. *Sca* 2. 3. ἴση συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ ἡ ΒΓ *Sca*, ἔστω ἴση ἡ ΓΒ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ *Co* 3. ἐπὶ τὴν ΑΓ αἱ add. *Sca* ΒΕ ΔΖ· ὅτι ἡ ΑΖ add. *Co Sca* 4. τῆς ΒΕ *Co Sca* pro τῆς ΒΗ 5. 6. ἡ ΒΟ καὶ A, ἡ βε καὶ B, corr. S 6. ἐπιζεύχθωσαν A, corr. BS 7. επιζεύχθω A, corr. BS ἡ ΓΒ *Co* pro ἡ ΓΖ

XII. Sit semicirculus $\alpha\beta\gamma$, *cuius diametrus* $\alpha\gamma$, et ducatur angulus $\alpha\beta\gamma$, et *a puncto* γ *ad circumferentiam* ducatur $\gamma\delta$ ita, ut sit $\gamma\beta = \alpha\beta + \delta\gamma$, et ducantur ad $\alpha\gamma$ perpendiculares $\beta\varepsilon$ $\delta\zeta$; dico esse $\alpha\zeta = 2\,\beta\varepsilon$. Prop. 11



Ponatur enim $\varepsilon\eta = \alpha\varepsilon$, et $\beta\vartheta = \alpha\beta$, et iungantur rectae $\alpha\vartheta$ $\vartheta\eta$ $\vartheta\zeta$, et ducatur perpendicularis $\vartheta\varkappa$, et iungatur $\beta\varkappa$. Quoniam *ex hypothesi* est $\gamma\beta = \alpha\beta + \delta\gamma$, et *ex constructione* $\beta\vartheta = \beta\alpha$, subtrahendo igitur est

$\vartheta\gamma = \delta\gamma$, ideoque $\vartheta\gamma^2 = \delta\gamma^2$. Sed est $\delta\gamma^2 = \alpha\gamma \cdot \gamma\zeta$ (*elem. 10, 33 lemma*); ergo

$\vartheta\gamma^2 = \alpha\gamma \cdot \gamma\zeta$, *id est* $\vartheta\gamma : \alpha\gamma = \gamma\zeta : \vartheta\gamma$; itaque

$\angle\, \vartheta\alpha\gamma = \angle\, \zeta\vartheta\gamma$. Rursus quia est (*elem. l. c.*)

$\alpha\beta^2 = \gamma\alpha \cdot \alpha\varepsilon$, est igitur $2\,\alpha\beta^2 = 2\,\gamma\alpha \cdot \alpha\varepsilon$, id est (*quia ex constructione* $\beta\vartheta = \alpha\beta$, *et* $\varepsilon\eta = \alpha\varepsilon$)

$\alpha\vartheta^2 = \gamma\alpha \cdot \alpha\eta$; *id est* $\alpha\vartheta : \gamma\alpha = \alpha\eta : \alpha\vartheta$; itaque

$\angle\, \vartheta\gamma\alpha = \angle\, \eta\vartheta\alpha$. Sed *demonstravimus* etiam

$\angle\, \zeta\vartheta\gamma = \angle\, \vartheta\alpha\gamma$; ergo *triangulorum* $\vartheta\gamma\zeta$ $\alpha\vartheta\eta$ reliqui quoque anguli aequales sunt, *id est*

$\angle\, \vartheta\zeta\gamma = \angle\, \alpha\eta\vartheta$; ergo etiam

$\angle\, \vartheta\zeta\eta = \angle\, \vartheta\eta\zeta$. Et perpendicularis ducta est $\vartheta\varkappa$; ergo

$\zeta\varkappa = \varkappa\eta$. Et quia uterque angulorum $\alpha\beta\vartheta$ $\alpha\varkappa\vartheta$ rectus est, circulo inscriptum est quadrilaterum $\alpha\beta\vartheta\varkappa$; itaque (*elem. 3, 21*)

$\angle\, \beta\vartheta\alpha = \angle\, \beta\varkappa\alpha$. Sed est angulus $\beta\vartheta\alpha$ dimidius *rectus*; ergo etiam angulus $\beta\varkappa\alpha$ dimidius *rectus* est. Et est rectus angulus $\beta\varepsilon\varkappa$; ergo est

---

19. 20. καὶ ἡ $\overline{H\Theta}$ ἄρα τῇ $\overline{\Theta Z}$ ἐστιν A(BS), corr. *Hu* 22. καὶ κύκλῳ B (voluit καὶ ἐν κύκλῳ, quod expressit *Co*) 23. ἄρα add. *Hu*

δὲ ΕΚ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΖ (ἐπείπερ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΗ)· καὶ τῆς ΕΒ ἄρα διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΖ, ὅπερ: ~

17 *ιγʹ. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ κεκλάσθω ἡ ΑΒΔ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, καὶ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ τὸ κέντρον τὸ Η, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ· ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ γωνίᾳ.*

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΒΕ κάθετος ἡ ΗΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΒΚ ΚΔ ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΚ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεὶ ἐζήτουν τὴν ὑπὸ τῶν ΚΕΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ γωνίᾳ ἴσην, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΕ, ὅτι ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ ἴση ἐστίν, ὅτι ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΚ τῇ ΕΘ.

Ἤχθω καὶ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΔΕ ἐστὶν παράλληλος, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΕΖ, ζητεῖται δὲ καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΕΘ παράλληλος, ὅτι ἄρα διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ μὲν ΚΛΗ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΔΚΗ τῷ ΕΘΖ, ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΕ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ· ὅτι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΔ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ (δι᾽ ἴσου γάρ)· ὅτι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΛΔ πρὸς τὴν ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ (διελόντι γάρ). ὑπέκειτο δὲ καὶ ὡς ἡ ΔΘ πρὸς

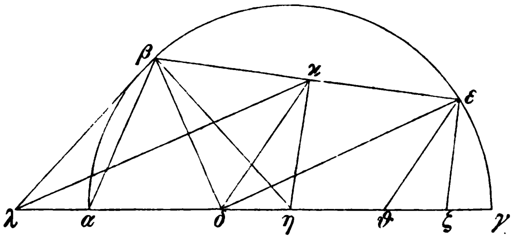
---

4. $\overline{ΙΓ}$ A[1] in marg. (BS) *Ἔστω* etc.] hoc theorema posteriore demum aetate Pappi collectioni insertum esse videtur 13. *ἐπὶ ἐζη/ῆν τὴν* A neque haec satis perspicua, *ἐπεζεύχθωσαν τὴν* B (sed *εζεύχθωσαν* expunctum), *ἐπει* ..... S, *ἐπεὶ ἐστιν ἡ Sca, quoniam est Co*, corr. *Hu* 14. *γωνίαν τῆι ὑπὸ τῶν ΔΕΘ γωνίαν ἴσην* ABS, *γωνία τῇ — γωνίᾳ ἴση Sca* (*Co*) 16. *ὑπὸ* $\overline{ΔΕC}$ *ἴση* AB cod. *Co*, corr. S *Co* 18. 19. *ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ* coni. *Hu* 20. fortasse *ἔτι ζητεῖται* legendum esse adnotat *Sca* 24. *ὥστε δὲ ἡ* $\overline{ΚΗ}$ A[1], *τε* del. A[2]

$\beta\varepsilon = \varepsilon\varkappa$. Sed est $\varepsilon\varkappa = \frac{1}{2}\alpha\zeta$ (quia *ex constructione* est $\alpha\varepsilon = \varepsilon\eta$, et, *ut modo demonstravimus*, $\zeta\varkappa = \varkappa\eta$); ergo est

$\alpha\zeta = 2\,\beta\varepsilon$, q. e. d.

XIII. Sit semicirculus $\alpha\beta\gamma$, et ducatur angulus $\alpha\beta\delta$ ita, ut sit $\alpha\beta = \beta\delta$, et ipsi $\beta\delta$ perpendicularis ducatur $\delta\varepsilon$ *ad circumferentiam*, et iungatur $\beta\varepsilon$, eique perpendicularis ducatur $\varepsilon\zeta$ *ad basim*, et *sumatur* centrum η, fiatque $\delta\vartheta : \vartheta\zeta = \alpha\eta : \eta\delta$ *), et iungatur $\vartheta\varepsilon$; dico angulum $\beta\varepsilon\delta$ angulo $\delta\varepsilon\vartheta$ aequalem esse. Prop. 12



Ducatur ab η ipsi $\beta\varepsilon$ perpendicularis $\eta\varkappa$; ergo est $\beta\varkappa = \varkappa\varepsilon$ (*elem.* 3, 3). Et angulus $\beta\delta\varepsilon$ rectus est; ergo tres $\beta\varkappa$ $\varkappa\delta$ $\varkappa\varepsilon$ inter se aequales sunt (*elem.* 3, 31). Ac parallelae sunt $\eta\varkappa$ $\zeta\varepsilon$; et quia propositum est demonstrare angulum $\beta\varepsilon\delta$ angulo $\delta\varepsilon\vartheta$ aequalem esse, atque est $\delta\varkappa = \varkappa\varepsilon$, dico igitur angulum $\varkappa\varepsilon\delta$ angulo $\varkappa\delta\varepsilon$ aequalem esse, itaque, *si propositum iam factum esse statuamus*, angulum $\varkappa\delta\varepsilon$ angulo $\delta\varepsilon\vartheta$ aequalem, itaque rectas $\delta\varkappa$ $\vartheta\varepsilon$ parallelas esse.

Ducatur ipsi $\delta\varepsilon$ parallela $\varkappa\lambda$, et producatur $\gamma\alpha$ ad λ, et iungatur $\beta\lambda$. Iam quia parallelae sunt $\lambda\varkappa$ $\delta\varepsilon$, $\varkappa\eta$ $\varepsilon\zeta$, et propositum est demonstrare rectas $\varkappa\delta$ $\varepsilon\vartheta$ parallelas esse, dico igitur, quia triangulum $\lambda\varkappa\eta$ triangulo $\delta\varepsilon\zeta$, et triangulum $\delta\varkappa\eta$ triangulo $\vartheta\varepsilon\zeta$ est simile, esse

$\lambda\eta : \eta\varkappa = \delta\zeta : \zeta\varepsilon$, et

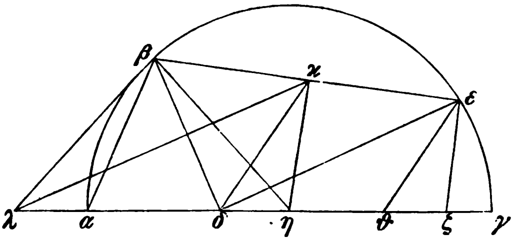
$\varkappa\eta : \eta\delta = \varepsilon\zeta : \zeta\vartheta$; itaque ex aequali

$\lambda\eta : \eta\delta = \delta\zeta : \zeta\vartheta$; ergo dirimendo

$\lambda\delta : \delta\eta = \delta\vartheta : \vartheta\zeta$. Sed ex hypothesi erat

*) Id est, recta $\delta\zeta$ iuxta proportionem $\alpha\eta : \eta\delta$ secetur in ϑ.

ΘΖ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΔ· ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, τουτέστιν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΔ· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΛΗ· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΛΑ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΒΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΛΔ ΛΗ ἐστὶν ἴση· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΒΛ τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση. ἔστιν δέ· ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ,



καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΛ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΚΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΔ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΚΛ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΛ ἄρα τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση.

18 *Καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΚΕΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΔΚΛ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΚΕΔ τῇ ὑπὸ ΒΚΛ ἐστὶν ἴση διὰ τὰς ΚΛ ΕΔ παραλλήλους· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΚΛ ἐστὶν ἴση. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΒΚ εὐθεῖα τῇ ΚΔ ἴση· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΒΛ βάσει τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΛΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΛ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΔΛΒ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΛΒΗ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΛΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΒΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ τῇ ὑπὸ ΒΛΛ ἐστὶν ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστιν τὰ ΒΔΗ ΒΛΛ τὰς δύο γωνίας ταῖς δύο γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΛΒ τῇ ΒΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΛΛ, ὥστε καὶ ἡ ΛΔ τῇ ΛΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, ἴση δὲ*

3. ἡ ΛΔ τῆι ΛΗ AB, corr. S   15. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΔΕ AB, corr. S
16. τῆι ὑπὸ ΚΛΔ AB cod. *Co*, corr. S *Co*   18. ἡ ante *γωνία* addi-

$\alpha\eta : \eta\delta = \delta\vartheta : \vartheta\zeta$; itaque
$\lambda\delta : \delta\eta = \alpha\eta : \eta\delta$; ergo est $\lambda\delta = \alpha\eta$; itaque
$\lambda\alpha = \delta\eta$. Sed *ex hypothesi* est etiam $\alpha\beta = \beta\delta$; ergo
$\lambda\beta = \beta\eta$. Sed est $\beta\eta = \alpha\eta$, et *demonstravimus* $\alpha\eta = \lambda\delta$; ergo
$\lambda\beta = \lambda\delta$.

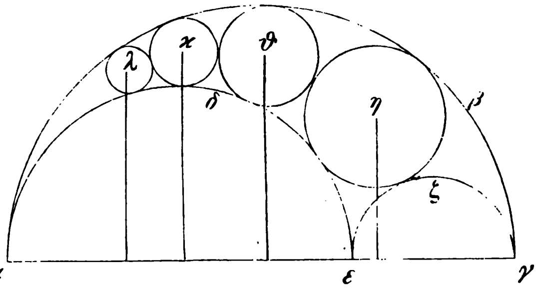
Est vero; nam quia parallelae sunt $\lambda\varkappa$ $\delta\varepsilon$, atque, *ut demonstravimus*, $\delta\varkappa$ $\varkappa\varepsilon$ aequales, angulus igitur $\beta\varkappa\lambda$ angulo $\lambda\varkappa\delta$ aequalis est (*est enim* $\angle\, \beta\varkappa\lambda = \angle\, \beta\varepsilon\delta = \angle\, \varepsilon\delta\varkappa = \angle\, \lambda\varkappa\delta$). Iam quia *demonstravimus* esse $\beta\varkappa = \varkappa\delta$, et $\angle\, \beta\varkappa\lambda = \angle\, \lambda\varkappa\delta$, est igitur $\lambda\beta = \lambda\delta$.

Et compositio congruenter analysi *decurrit*. Quoniam enim est
$\delta\varkappa = \varkappa\varepsilon$, est etiam
$\angle\, \varkappa\delta\varepsilon = \angle\, \varkappa\varepsilon\delta$. Sed propter parallelas $\lambda\varkappa$ $\delta\varepsilon$ est $\angle\, \varkappa\delta\varepsilon = \angle\, \lambda\varkappa\delta$, et $\angle\, \varkappa\varepsilon\delta = \angle\, \beta\varkappa\lambda$; ergo etiam
$\angle\, \beta\varkappa\lambda = \angle\, \lambda\varkappa\delta$. Sed *triangulorum* $\beta\varkappa\lambda$ $\delta\varkappa\lambda$ *commune est latus* $\lambda\varkappa$, *et* aequalia latera $\beta\varkappa$ $\delta\varkappa$; ergo etiam bases aequales, id est
$\beta\lambda = \lambda\delta$, itaque etiam $\angle\, \lambda\beta\delta = \angle\, \beta\delta\alpha$. Et est $\angle\, \beta\delta\alpha = \angle\, \beta\alpha\delta$, et $\angle\, \beta\alpha\delta = \angle\, \alpha\beta\eta$; *ergo*
$\angle\, \lambda\beta\delta = \angle\, \alpha\beta\eta$. Communis auferatur angulus $\alpha\beta\delta$; restat igitur
$\angle\, \lambda\beta\alpha = \angle\, \delta\beta\eta$. Sed (*quoniam ex hypothesi* $\alpha\beta = \beta\delta$) est etiam
$\angle\, \lambda\alpha\beta = \angle\, \eta\delta\beta$; sunt igitur duo triangula $\lambda\alpha\beta$ $\eta\delta\beta$, quae binos angulos binis aequales et unum latus $\alpha\beta$ lateri $\delta\beta$ aequale habeant; ergo est $\beta\lambda = \beta\eta$, et $\lambda\alpha = \eta\delta$; itaque etiam
$\lambda\delta = \alpha\eta$. Iam quia ex hypothesi est $\alpha\eta : \eta\delta = \delta\vartheta : \vartheta\zeta$, et $\alpha\eta = \lambda\delta$, est igitur

---

tum in ABS del. *Hu* 19. τῇ ὑπὸ $B\Delta A$] τῆι ὑπὸ $\overline{B\Delta}$ $\overline{\Delta A}$ AB, corr. S 24. τὴν $\overline{AB}$ τῆς $\overline{B/}$ A, τὴν $\overline{\alpha\beta}$ τῆς $\overline{\beta\delta}$ S, corr. B 25. τῆι $\overline{AB}$ ἐστὶν AB, corr. S *ἡ ΑΗ τῇ ΑΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΕ· ἐξ ἴσου ἄρα καὶ ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΘ τῇ ὑπὸ ΚΗΔ διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ ΚΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΖ τῇ ὑπὸ ΚΔΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΔΕ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΘ.*

19 *ιδ'. Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον,*



ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον, ἐγγεγράφθωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν τε ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ κέντρα τὰ Η Θ Κ Λ· δεῖξαι τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Η κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Θ κάθετον διπλασίαν τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Θ κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Κ κάθετον τριπλασίαν, καὶ τὰς ἑξῆς καθέτους τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλασίας κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμοὺς ἐπ' ἄπειρον γινομένης τῆς τῶν κύκλων ἐγγραφῆς. δειχθήσεται δὲ πρότερον τὰ λαμβανόμενα.

20 *ιε'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΖΒ ΒΜ περὶ κέντρα τὰ Α Γ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Β, καὶ μείζων ἔστω ὁ ΒΜ, ἄλλος δέ τις ἐφαπτόμενος αὐτῶν κατὰ τὰ Κ Λ περὶ κέντρον τὸ Η ὁ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ ΑΗ*

$\lambda\delta : \delta\eta = \delta\vartheta : \vartheta\zeta$; componendo igitur

$\lambda\eta : \eta\delta = \delta\zeta : \zeta\vartheta$. Sed *propter parallelas* $\eta\varkappa$ $\zeta\varepsilon$ *et* $\lambda\varkappa$ $\delta\varepsilon$ est etiam

$\lambda\eta : \eta\varkappa = \delta\zeta : \zeta\varepsilon$; ex aequali igitur

$\eta\varkappa : \eta\delta = \zeta\varepsilon : \zeta\vartheta$. Et propter parallelas $\varkappa\eta$ $\varepsilon\zeta$ est $\angle\,\varkappa\eta\delta = \angle\,\varepsilon\zeta\vartheta$; ergo *propter elem. 6, 6* est

$\angle\,\varkappa\delta\eta = \angle\,\varepsilon\vartheta\zeta$; itaque parallelae sunt $\varkappa\delta$ $\varepsilon\vartheta$; ergo

$\angle\,\varkappa\delta\varepsilon = \angle\,\delta\varepsilon\vartheta$. Et est $\angle\,\varkappa\delta\varepsilon = \angle\,\varkappa\varepsilon\delta$ *sive* $\beta\varepsilon\delta$; *ergo*

$\angle\,\beta\varepsilon\delta = \angle\,\delta\varepsilon\vartheta$.

XIV. Circumfertur in quibusdam *libris* antiqua propositio huius modi. Supponantur tres semicirculi inter se tangentes $\alpha\beta\gamma$ $\alpha\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta\gamma$, et in spatium inter circumferentias interiectum, quod ἄρβηλον *sive scalprum* vocant, inscribantur circuli quotcunque, qui et semicirculos et sese invicem tangant, velut circa centra η ϑ $\varkappa$ λ; demonstretur perpendicularem quae a centro η ad $\alpha\gamma$ ducitur aequalem esse diametro circuli η, et perpendicularem a ϑ duplam diametri circuli ϑ, et perpendicularem a $\varkappa$ triplam *diametri circuli* $\varkappa$, et, quae deinceps perpendiculares *ex centris ducuntur*, eas diametrorum, quae cuiusque sunt circuli, multiplas esse secundum numerorum seriem per unitates progredientem, et ita quidem, ut circulorum inscriptio in infinitum fiat. Sed prius *lemmata*, quae *ad eam propositionem* adhibentur, demonstrabuntur.

XV. Sint duo circuli $\zeta\beta$ $\beta\mu$ circa centra γ α, sese in Prop. 13
puncto β tangentes, sitque maior $\beta\mu$, alius autem *circulus* $\lambda\varkappa$ circa centrum η tangat eos in punctis λ $\varkappa$, et iungantur $\gamma\eta$

---

2. ἄρα add. *Hu* auctore *Co* 4. ἐξ ἴσου ἄρα add. *Hu* 5. τῆι ὑπὸ $\overline{KH\Lambda}$ ABS, corr. *Co* 8. ὑπὸ (ante $K\Delta E$) add. *Hu* $\overline{K\Delta E}$ τουτινη ὑπὸ A¹, τέσ superscr. A², plane corr. BS 9. $\overline{I\Delta}$ A¹ in marg. (BS) 13. ὅσοι δήποτ᾽ οὖν A, coniunx. BS 14. τὰ $\overline{ZH}$ $\overline{\Theta K\Lambda}$ A, distinx. BS, *Z* del. *Co* 21. ἐγγραφῆς A² ex **γγραφῆς τὰ ante πρότερον additum in AB del. S 22. $\overline{\iota\varepsilon}^{o}$ add. B 22. 23. τὰ $\overline{\Lambda\Gamma}$ A, distinx. BS 24. τὰ $\overline{K\Lambda}$ et similiter posthac A, distinx. BS 25. ὁ *KΛ* *Hu* auctore *Co* pro $\overline{\Theta K\Lambda}$

(πεσοῦνται δὴ διὰ τῶν Κ Δ), καὶ ἡ ἐπὶ τὰ Κ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τεμεῖ μὲν τὸν ΖΒ κύκλον, συμπίπτει δὲ τῇ διὰ τῶν Α Γ κέντρων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ΑΚ πλευρὰν τῆς ΓΔ τοῦ ΑΚΔΓ τραπεζίου· συμπιπτέτω οὖν κατὰ τὸ Ε τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Δ· δεῖξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ.

Ἔστιν δὲ φανερόν [ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΔ]· γίνεται γὰρ ἰσογώνια τὰ ΓΔΑ ΑΚΗ τρίγωνα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας [πρὸς τῷ Δ] ἴσας ἔχοντα καὶ περὶ τὰς Γ Η γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον [ἔχοντα], ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ ΔΓΗ ΓΗΑ γωνίας ἐναλλάξ, καὶ παράλληλον τὴν ΓΔ τῇ ΑΗ, καὶ ὡς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΓ, τὴν ΑΚ πρὸς ΓΔ, τουτέστιν τὴν ΑΒ πρὸς ΒΓ.

21 Καὶ τὸ ἀναστρόφιον δὲ φανερόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΔ ἐπ' εὐθείας γίνεται τῇ ΔΕ.

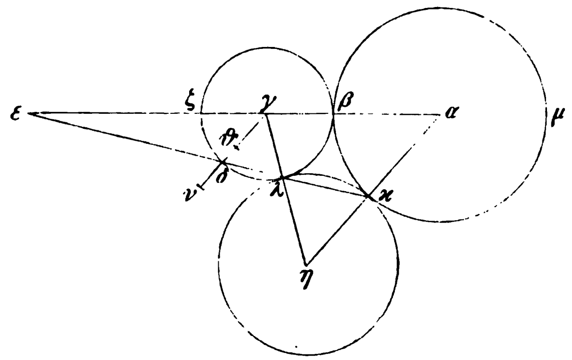
Παράλληλός τε γάρ ἐστιν ἡ ΑΚ τῇ ΓΔ καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ τῇ ΔΕ. εἰ γὰρ ἡ διὰ τῶν Κ Ε οὐχ ἥξει καὶ διὰ τοῦ Δ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, γίνεται ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΘ, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως οὐδὲ τοῦ Δ ἐκτὸς ἥξει τέμνουσα τὴν ΓΔ ἐκ-

---

1. πεσουνται A[2](BS), πεσουται correctum ex πεσουσαι A[1], διιοῦσαι coni. *Hu* 2. τὸν ΖΒ κύκλον A, τὸν β κύκλον B[1], τὸν βμ κύκλον B[3], τὸν ηθλ κύκλον S, corr. *Hu* 3. συμπεσεῖται voluit *Co* 3. 4. ἐκβαλλομενηι εὐθεῖα /// | τὸ μείζονα A, εὐθεία (sic) corr. altera manus in Paris. 2368, διὰ add. BS 4. 5. τῆς ΓΛ τοῦ ΑΚ ΛΓ τραπεζείου A, τῆς γλ τοῦ ακλγ τραπεζίου BS, corr. *Hu* 5. τὴν κυκλον A, corr. BS 8. ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΔ interpolatori tribuit *Hu* (nam iungendam esse δγ scriptor iam supra verbis τοῦ ΑΚΔΓ τραπεζίου significavit) 10. πρὸς τῶι Λ A[s], πρὸς τὸ λ BS, del. *Hu* τὰς ΓΗ A, distinx. BS 11. ἔχοντα interpolatori tribuit *Hu* ὑπὸ ΔΓΗ *Sca* (ὑπὸ ΗΓΔ *Co*) pro ὑπὸ ΔΗΓ 12. τῇ ΑΗ] καὶ τῆι ΑΚ AS cod. *Co*, καὶ del. B *Co Sca*, ΑΗ corr. *Hu* 13. post τὴν ΕΓ add. τ^ζ Paris. 2368 S (voluerunt οὕτως) 19. ἡ ΑΕ A[2] ex ἡ Α* 20. ἡ ΚΔ *Co Sca* pro ἡ ΓΔ 23. τέ|μνουσα*τὴν A

$\alpha\eta$, quae scilicet per λ $\varkappa$ transibunt (*elem.* 3, 12), et recta $\varkappa\lambda$, si producatur, circulum $\zeta\beta$ secabit ac rectae $\alpha\gamma$ productae occurret propterea quod trapezii $\alpha\varkappa\delta\gamma$*) latus $\alpha\varkappa$ maius est quam $\gamma\delta$; occurrat igitur in ε, circulum $\zeta\beta$ *iterum* secans in δ; demonstretur esse $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$.

Est autem manifestum; triangula enim $\lambda\delta\gamma$ $\lambda\varkappa\eta$ similia sunt, quia angulos ad verticem aequales et circa angulos γ η



latera proportionalia habent (*elem.* 6, 7); itaque anguli $\delta\gamma\eta$ $\gamma\eta\alpha$ aequales, et, quia alterni sunt, rectae $\delta\gamma$ $\eta\alpha$ parallelae sunt, ideoque $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta = \alpha\beta : \beta\gamma$.

Atque etiam conversa *propositio* manifesta est. Si enim sit $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$, *dico* puncta $\varkappa$ δ ε in eâdem rectâ esse.

Est enim $\alpha\varkappa$ ipsi $\gamma\delta$ parallela[1]), et $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta$ (*quia* $\alpha\beta = \alpha\varkappa$, *et* $\beta\gamma = \gamma\delta$). *Sed ex hypothesi* est $\alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$; ergo $\alpha\varkappa : \gamma\delta = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma$; itaque puncta $\varkappa$ δ ε in eadem recta sunt[2]). Nam si recta, quae per $\varkappa$ ε ducta erit, non transibit per δ, sed per ϑ, erit $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\vartheta$, quod fieri non potest[3]). Similiter *recta* $\varkappa\varepsilon$ neque extra punctum δ

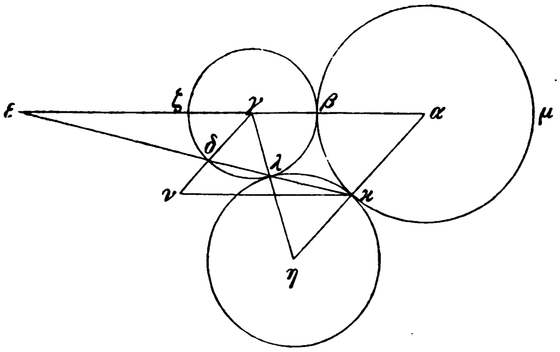
*) Rectas $\alpha\varkappa$ $\gamma\delta$ parallelas esse ex proxima demum demonstratione efficitur.

1) Id similiter atque in prima demonstratione (cap. 20) ex triangulorum $\lambda\delta\gamma$ $\lambda\varkappa\eta$ similitudine ostenditur.

2) Conf. infra VII propos. 128 adnot. *

3) Quoniam enim ex hypothesi est $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta$, fieret $\gamma\vartheta = \gamma\delta$, cum tamen sit $\gamma\vartheta < \gamma\delta$.

βληθεῖσαν, οἷον κατὰ τὸ Ν· ἔσται γὰρ πάλιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΝ, ὅπερ ἀδύνατον· ἔστιν γὰρ πρὸς τὴν ΓΔ.



Ἢ οὕτως. διὰ τοῦ Κ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΚΝ ἤχθω, καὶ γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΝΚ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΓΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΚ, τουτέστιν ἡ ΓΝ, πρὸς ΓΔ, διελόντι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΝΔ πρὸς ΔΓ. ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΝ, πρὸς ΝΔ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΔ. καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Ν Γ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΕΔΓ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΚ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΓΝ· εὐθεῖα ἄρα καὶ ἡ ΚΔΕ.

22 *Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΚΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΒ.*

Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν πρὸς ΓΖ, ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΕΛ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΖ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ ΕΛ τῷ ὑπὸ ΒΕ ΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΕΛ τῷ ἀπὸ ΕΒ.

23 *ιϛʹ. Δύο ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΕΔ, καὶ ἐφαπτόμενος αὐτῶν κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Α κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῶν ἡμικυκλίων ἡ ΑΜ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ*

transibit, rectam $\gamma\delta$ productam, velut in ν, secans; erit enim rursus $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\nu$, quod fieri non potest; est enim $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta$.

Vel sic *demonstratur*. Ducatur per $\varkappa$ ipsi $\alpha\varepsilon$ parallela $\varkappa\nu$, ac fit parallelogrammum $\alpha\gamma\nu\varkappa$, et $\alpha\varkappa = \gamma\nu$. Et quoniam est

$\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta$, id est $= \gamma\nu : \gamma\delta$, dirimendo est

$\alpha\gamma : \gamma\varepsilon = \nu\delta : \delta\gamma$. *Et* vicissim

$\alpha\gamma : \nu\delta = \gamma\varepsilon : \delta\gamma$, id est (*quia* $\alpha\gamma = \varkappa\nu$)

$\varkappa\nu : \nu\delta = \gamma\varepsilon : \delta\gamma$. Et circa aequales angulos $\varkappa\nu\gamma$ $\varepsilon\gamma\nu$ *triangulorum* $\varkappa\nu\delta$ $\varepsilon\gamma\delta$ latera proportionalia sunt; ergo $\Delta\, \varkappa\nu\delta \sim \Delta\, \varepsilon\gamma\delta$; itaque

$\angle\, \varepsilon\delta\gamma = \angle\, \varkappa\delta\nu$. Atque *ex constructione* recta est $\gamma\delta\nu$; ergo etiam recta est quae per $\varkappa$ δ ε transit [4]).

Dico insuper esse $\varkappa\varepsilon \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\beta^2$.

Quoniam enim est $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\beta : \beta\gamma = \alpha\beta : \zeta\gamma$, per subtractionem erit $\alpha\varepsilon - \alpha\beta : \varepsilon\gamma - \zeta\gamma$, *id est* $\beta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \varkappa\varepsilon : \varepsilon\delta$. Sed est $\varkappa\varepsilon : \varepsilon\delta = \varkappa\varepsilon \cdot \varepsilon\lambda : \varepsilon\delta \cdot \varepsilon\lambda$, et $\beta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \beta\varepsilon^2 : \beta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta$, et est $\lambda\varepsilon \cdot \varepsilon\delta = \beta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta$ (*elem.* 3, 36); ergo etiam $\varkappa\varepsilon \cdot \varepsilon\lambda = \varepsilon\beta^2$.

XVI. *Sint* duo semicirculi $\beta\eta\gamma$ $\beta\varepsilon\delta$ *sese tangentes in* Prop. 14
puncto β, et tangens eos circulus $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, cuius a centro α ad $\beta\gamma$ basim semicirculorum ducatur perpendicularis $\alpha\mu$, *et sit* $\alpha\zeta$ circuli $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ radius; dico esse in prima figura

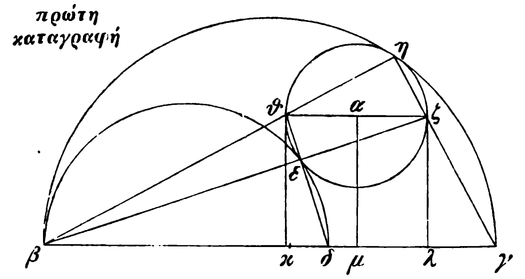
4) Quia recta est $\gamma\delta\nu$, anguli $\gamma\delta\varkappa + \varkappa\delta\nu$ duobus rectis aequales sunt. Sed est $\angle\, \varkappa\delta\nu = \angle\, \varepsilon\delta\gamma$; ergo etiam anguli $\varepsilon\delta\gamma + \gamma\delta\varkappa$ duobus rectis aequales sunt, itaque recta est quae per $\varkappa$ δ ε transit (*Co*).

---

5. τὸ $\overline{AΓKN}$ ABS, corr. *Co* 10. τοῖς $\overline{NΓ}$ AS, distinx. B 19. τὸ ὑπὸ $\overline{AE}$ $\overline{EΔ}$ AB cod. *Co*, corr. S (τὸ ὑπὸ ΛΕΔ *Co*) 20. πρὸς τὸ ὑπὸ $\overline{//Z}$ A, πρὸς τὸ *** $\overline{βεζ}$ B[1], corr. B[3] (τὸ ὑπὸ τῶν $\overline{βεζ}$ S) 21. ἄρα καὶ // ὑπὸ $\overline{///}$ τῶι A, integram scripturam servarunt BS 22. $\overline{Iϛ}$ A[1] in marg. (BS) τὰ $\overline{HBΓ}$ AB, τὰ $\overline{αβγ}$ S, corr. *Co* 23. ὁ $\overline{EZ}|\overline{HΘ}$ A(S), coniunx. B 25. ὡς add. *Hu* auctore *Co*

κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς ἀμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης οὕτως ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφότερον τὴν ΓΒ ΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι οἱ ΒΗΓ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Η, καὶ διάμετροι ἐν αὐτοῖς παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ ΖΘ, εὐθεῖα ἔσται ἥ τε διὰ τῶν Η Θ Β καὶ ἡ διὰ τῶν Η Ζ Γ.

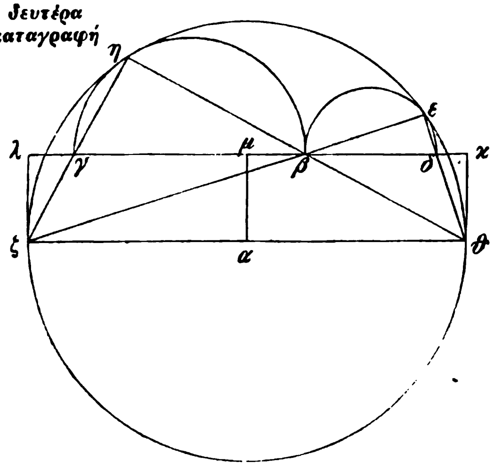


πάλιν ἐπεὶ δύο κύκλοι οἱ ΒΕΔ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐν αὐτοῖς παράλληλοι διάμετροί εἰσιν αἱ ΘΖ ΒΔ, εὐθεῖα ἔσται ἥ τε διὰ τῶν Ζ Ε Β καὶ ἡ διὰ τῶν Θ Ε Δ. ἤχθωσαν καὶ ἀπὸ τῶν Θ Ζ σημείων κάθετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΗΓ ΒΘΚ τριγώνων ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΒΚ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΒ ΒΘ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΖΛ ΒΕΔ τριγώνων ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΛ, καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ ΒΛ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΒ ΒΘ τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ τῷ ὑπὸ ΔΒ ΒΛ, ἂν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὸ Δ

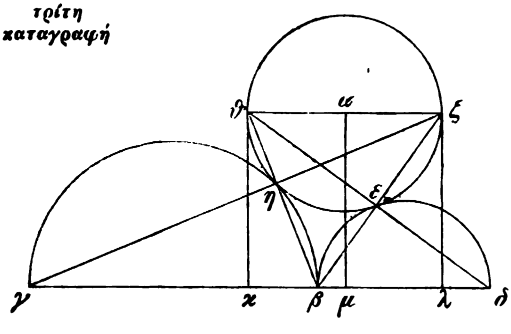
4. *τουτέστιν τὴν ΓΔ* add. *Hu* 6. ΕΖ ΗΘ A, coniunx. BS, item vs. 9 8. *τῶν* ΗΘΒ ABS, distinx. *Hu* *ἡ* (ante *διὰ*) add. S *τῶν* ΗΖΓ AS, distinx. B 11. 12. *τῶν* ΖΕΒ — *τῶν* ΘΕΔ AS, distinx. B 12. *τῶν* ΘΖ A, distinx. S (*τῶν ζ ϑ* B) 14. 15. *πρὸς τὴν* ΘΚ *καὶ* AB cod. *Co*, corr. S *Co* 15. *ἴσον τὸ* AB, corr. S 20. *ἂν δὲ* — p. 216, 1 *ἀπὸ τῆς ΒΔ* a Graeco scriptore addita sunt propter propos. 17

$\beta\mu : \alpha\zeta = \beta\gamma + \beta\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\gamma + \beta\delta : \gamma\delta$, in secunda autem et tertia *figura*
$= \beta\gamma - \beta\delta : \beta\gamma + \beta\delta = \beta\gamma - \beta\delta : \gamma\delta$.

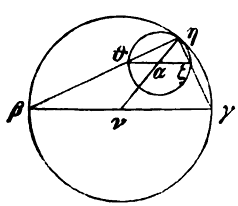
δευτέρα καταγραφή



τρίτη καταγραφή



Ducatur per α ipsi $\beta\gamma$ parallela $\vartheta\zeta$. Iam quia duo circuli $\beta\eta\gamma$ $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ inter se tangunt in puncto η, in iisque diametri $\beta\gamma$ $\zeta\vartheta$ parallelae sunt, recta erit et quae per $\eta\ \vartheta\ \beta$, et quae per $\eta\ \zeta\ \gamma$ *transit*[1]). Rursus quia circuli $\beta\varepsilon\delta$ $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ inter se tangunt in puncto ε, in iisque diametri $\vartheta\zeta$ $\beta\delta$ parallelae sunt, recta erit et quae per $\zeta\ \varepsilon\ \beta$, et quae per $\vartheta\ \varepsilon\ \delta$ *transit.* Ducantur a punctis $\vartheta\ \zeta$ *ad basim* perpendiculares $\vartheta\varkappa\ \zeta\lambda$; erit igitur propter triangulorum $\beta\eta\gamma$ $\beta\varkappa\vartheta$ similitudinem $\beta\gamma : \beta\eta = \beta\vartheta : \beta\varkappa$, et



1) Iungatur enim (in prima figura) $\eta\alpha$; haec igitur producta transit per ν circuli $\beta\eta\gamma$ centrum. Iam ducantur $\beta\eta$ $\vartheta\eta$; ergo, quia $\vartheta\alpha$ $\beta\nu$ parallelae sunt, estque $\vartheta\alpha : \beta\nu = \alpha\eta : \nu\eta$, secundum ea quae supra propos. 13 cap. 21 demonstrata sunt recta $\vartheta\eta$ ipsius $\beta\eta$ pars est. Item puncta $\eta\ \zeta\ \gamma$ in eâdem rectâ esse ostenditur. Ac similis est demonstratio in reliquis figuris.

πίπτῃ, τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης καταγραφῆς ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ συναμφότερος ἡ ΛΒ ΒΚ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΚΛ. καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς ΛΒ ΒΚ ἡμίσεια ἡ ΒΜ (διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΚΜ τῇ ΜΛ), τῆς δὲ ΛΚ ἡμίσεια ἡ ΜΚ· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΜΚ, τουτέστιν πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καταγραφῆς, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΒΚ ἴσον ἐδείχθη [καὶ κοινῶς] τῷ ὑπὸ ΔΒΛ, ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ. συνθέντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΚΛ πρὸς ΚΒ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχήν, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχήν. καὶ ἔστι τῆς μὲν ΚΛ ἡμίσεια ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου [ἀντὶ τῆς ΛΜ], ἡ δὲ ΒΜ ἡμίσεια τῆς τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχῆς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΛΜ τῇ ΜΚ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς συναμφότερος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφότερον τὴν ΓΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ [ἀνάπαλιν γάρ].

---

4. 5. οὕτως καὶ — αὐτῶν τὴν add. *Co*, item *Sca*, nisi quod οὕτω et ἡ $\overline{\lambda\rho\kappa}$ scripsit (voluit ἡ $\overline{\lambda\beta\kappa}$) 5. ἐστι (sic) AS, ἔστι B, item vs. 15 6. 7. τῇ ΜΛ *Sca*, τῆι ΜΛ ABS, τῇ ΜΛ *vel potius* τῇ ΘΛ *Co* 7. ἡμίσειαν τὴν $\overline{ΜΚ}$ ABS, corr. *Hu* 9. τουτέστιν B, τουτέστι A[s]S τοῦ $\overline{ΕΖ}$ $\overline{ΗΘ}$ A, coniunx. BS 10. ἐπεὶ A[2] ex ἐπὶ 11. καὶ κοινῶς interpolatori tribuit *Hu* 15. 16. ἡμίσεια ἐκ τοῦ κέντρου $\overline{ΕΖ}$ $\overline{ΗΘ}$ A(BS), ἡ add. *Sca*, τοῦ (post κέντρου) add. *Hu*, $\overline{εζηθ}$ coniunx. BS 16. ἀντὶ τῆς ΛΜ interpolatori tribuit *Hu* 18. τῇ ΜΚ *Sca*, τῆι ΛΚ ABS cod. *Co*, τῇ ΛΖ *Co* 19. οὕτως ἐπὶ *Co Sca* pro ὅπως ἡ 21. τῶν add. *Sca* 23. τὴν add. *Hu* ἀνάπαλιν γάρ interpolatori (qui significavit proportionem quae vs. 13 legitur e contrario mutatam esse in eam quae est vs. 18 sqq.) tribuit *Hu*

$\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\eta \cdot \beta\vartheta$, et propter triangulorum $\beta\lambda\zeta$ $\beta\varepsilon\delta$ similitudinem $\beta\zeta : \beta\lambda = \beta\delta : \beta\varepsilon$, et

$\beta\delta \cdot \beta\lambda = \beta\zeta \cdot \beta\varepsilon$, et est $\beta\eta \cdot \beta\vartheta = \beta\zeta \cdot \beta\varepsilon$ (*elem.* 3, 36); ergo etiam

$\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$, vel, si perpendicularis a ζ in punctum δ cadat,

$= \beta\delta^2$. Ergo in prima figura est

$\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$, itaque etiam[2])

$\beta\gamma + \beta\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\lambda + \beta\varkappa : \beta\lambda - \beta\varkappa$, id est

$\beta\gamma + \beta\delta : \gamma\delta = \beta\lambda + \beta\varkappa : \lambda\varkappa$. Et est $\frac{1}{2}(\beta\lambda + \beta\varkappa) = \beta\mu$ (quia $\varkappa\mu = \mu\lambda$, *itaque* $\beta\lambda + \beta\varkappa = 2\beta\varkappa + 2\varkappa\mu = 2\beta\mu$), et $\frac{1}{2}\lambda\varkappa = \varkappa\mu$; ergo etiam

$\beta\gamma + \beta\delta : \gamma\delta = \beta\mu : \varkappa\mu$, id est

$= \beta\mu : \alpha\zeta$. In secunda autem et tertia figura, quia demonstratum est

$\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$, est igitur

$\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$. *Et* componendo $\gamma\delta : \beta\delta = \lambda\varkappa : \beta\varkappa$; itaque etiam[3])

$\gamma\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \lambda\varkappa : \beta\lambda - \beta\varkappa$. Et est $\frac{1}{2}\lambda\varkappa = \alpha\zeta$, et $\frac{1}{2}(\beta\lambda - \beta\varkappa) = \beta\mu$, quia $\beta\lambda - \beta\varkappa = \lambda\mu + \beta\mu - \mu\varkappa + \beta\mu$, *et* $\lambda\mu = \mu\varkappa$; itaque etiam

$\beta\gamma - \beta\delta : \gamma\delta = \beta\mu : \alpha\zeta$. Ergo est in prima figura

$\beta\mu : \alpha\zeta = \beta\gamma + \beta\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\gamma + \beta\delta : \gamma\delta$, in secunda autem et tertia figura

$= \beta\gamma - \beta\delta : \beta\gamma + \beta\delta = \beta\gamma - \beta\delta : \gamma\delta$.

2) Quoniam enim est $\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$, primum componendo, tum e contrario, denique convertendo sunt

$\beta\gamma + \beta\delta : \beta\delta = \beta\lambda + \beta\varkappa : \beta\varkappa$

$\beta\delta : \beta\gamma = \beta\varkappa : \beta\lambda$

$\beta\gamma : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\lambda : \beta\lambda - \beta\varkappa$; ergo ex aequali

$\beta\gamma + \beta\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\lambda + \beta\varkappa : \beta\lambda - \beta\varkappa$.

3) Est igitur

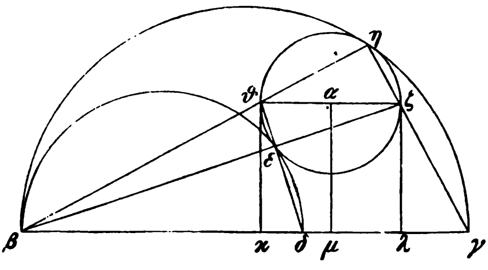
$\gamma\delta : \beta\delta = \lambda\varkappa : \beta\varkappa$, et e contrario, quia $\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$,

$\beta\delta : \beta\gamma = \beta\varkappa : \beta\lambda$, et convertenda eadem proportione

$\beta\gamma : \beta\gamma - \beta\delta = \beta\lambda : \beta\lambda - \beta\varkappa$; ergo ex aequali

$\gamma\delta : \beta\gamma - \beta\delta = \lambda\varkappa : \beta\lambda - \beta\varkappa$.

24 *Συνθεωρεῖται δ' ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΛΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΘΚ ΖΛΓ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΖΛ*



πρὸς τὴν ΛΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ ΖΛ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ.

Γίνεται δὲ καὶ διὰ μὲν τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΛ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ ΒΓ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛ ΔΓ, διὰ δὲ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΚ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ τῆς ΒΔ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΚ ΔΓ.

25 *ιζ΄. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων γεγράφθω κύκλος ὁ ΘΡΤ ἐφαπτόμενος τῶν τε ἐξ ἀρχῆς ἡμικυκλίων καὶ τοῦ ΕΗΘ κύκλου κατὰ τὰ Θ Ρ Τ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Λ Π κέντρων κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΛΜ ΠΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΛΜ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον.*

Ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ· ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΒΗΓ ἡμικυκλίου. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΠ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ διὰ τὸ προδειχθὲν ὡς συναμφότερος ἡ

1. *συνθεωρεῖται ταδ' ὅτι* A(BS), *συνθεωρεῖται. λέγω ὅτι* Co, corr. *Hu* 2. *ἐστιν τὸ ἀπὸ* A, corr. BS 4. *ΒΚ ΛΓ* Co pro *ΒΚ ΔΓ* 8. *τῶι ὑπὸ ΒΛ ΛΓ* ABS, corr. *Co* 12. *ΙΖ* A[1] in marg. (BS) 14. *τὰ ΘΡΤ — τῶν ΛΠ* A, distinx. BS 19. *Ἤχθω τῇ ΒΓ* coni. *Hu*

Simul etiam demonstratur esse $\beta\varkappa \cdot \lambda\gamma = \alpha\mu^2$. Nam propter triangulorum $\beta\varkappa\vartheta$ $\zeta\lambda\gamma$ similitudinem [1]) est

$\beta\varkappa : \varkappa\vartheta = \zeta\lambda : \lambda\gamma$, atque
$\beta\varkappa \cdot \lambda\gamma = \varkappa\vartheta \cdot \zeta\lambda$, id est (*quia* $\varkappa\vartheta = \zeta\lambda = \alpha\mu$)
$= \alpha\mu^2$.

Sed, quia est $\beta\gamma : \gamma\delta = \beta\lambda : \varkappa\lambda$ *), est etiam

$$\beta\gamma \cdot \varkappa\lambda = \beta\lambda \cdot \gamma\delta,$$

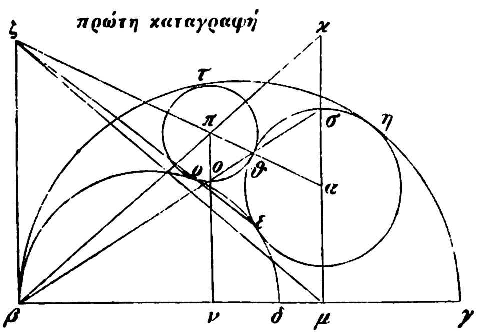
id est rectangulum ex $\beta\gamma$ et (*quia* $\varkappa\lambda = \vartheta\zeta$) circuli $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ diametro aequale rectangulo $\beta\lambda \cdot \gamma\delta$.

Denique, quia est $\beta\delta : \gamma\delta = \beta\varkappa : \varkappa\lambda$ **), est etiam

$$\beta\delta \cdot \varkappa\lambda = \beta\varkappa \cdot \gamma\delta,$$

id est rectangulum ex $\beta\delta$ et circuli $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ diametro aequale rectangulo $\beta\varkappa \cdot \gamma\delta$.

XVII. Iisdem suppositis describatur circulus $\vartheta\varrho\tau$, tangens et semicirculos initio *descriptos* et circulum $\varepsilon\vartheta\eta$ in punctis τ ϱ ϑ, et a centris α π ad basim $\beta\gamma$ perpendiculares ducantur $\alpha\mu$ $\pi\nu$; dico esse ut $\alpha\mu$ unà cum circuli $\varepsilon\vartheta\eta$ diametro ad ipsam diametrum, ita $\pi\nu$ ad circuli $\vartheta\varrho\tau$ diametrum (*vel brevius sic: si circulorum $\varepsilon\vartheta\eta$ $\vartheta\varrho\tau$ diametros notamus $D\alpha$ $D\pi$, esse* $\alpha\mu + D\alpha : D\alpha = \pi\nu : D\pi$). Prop. 15



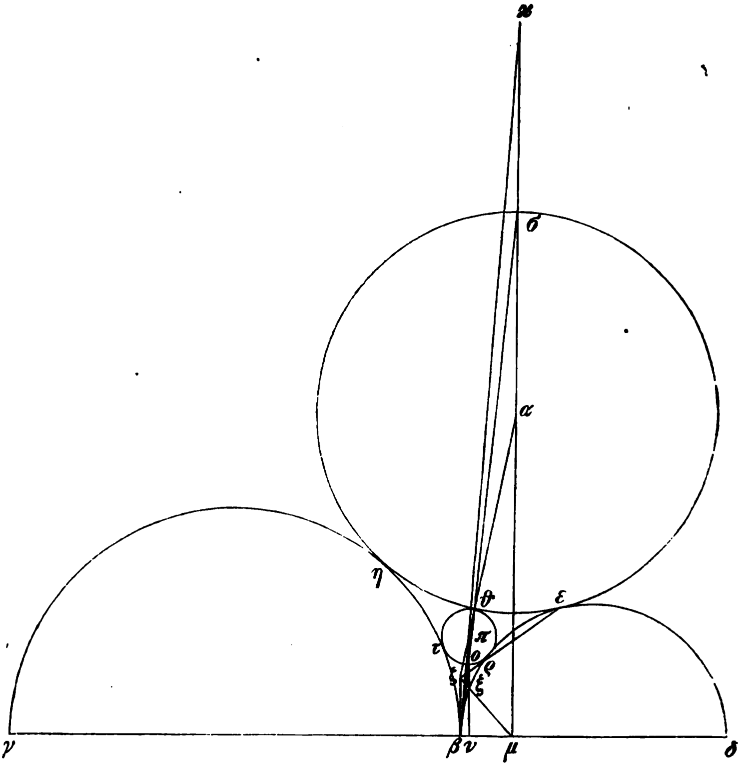
Ducatur ipsi $\beta\gamma$ perpendicularis $\beta\zeta$; haec igitur semicirculum $\beta\eta\gamma$ tangit. Et iuncta $\alpha\pi$ producatur ad ζ. Quoniam propter superius *lemma* est in prima figura

1) Utrumque enim triangulorum $\beta\varkappa\vartheta$ $\zeta\lambda\gamma$ simile est triangulo $\beta\eta\gamma$ (*Co*).

*) Nam supra demonstratum est $\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$; ergo est
$\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$, itaque in prima figura convertendo
$\beta\gamma : \gamma\delta = \beta\lambda : \varkappa\lambda$. Idem in secunda et tertia figura componendo et convertendo et e contrario demonstratur (*Co*).

**) Quoniam enim statim demonstratum est
$\beta\gamma : \gamma\delta = \beta\lambda : \varkappa\lambda$, in prima figura dirimendo, in secunda et tertia componendo fit
$\beta\delta : \gamma\delta = \beta\varkappa : \varkappa\lambda$.

δευτέρα καταγραφή

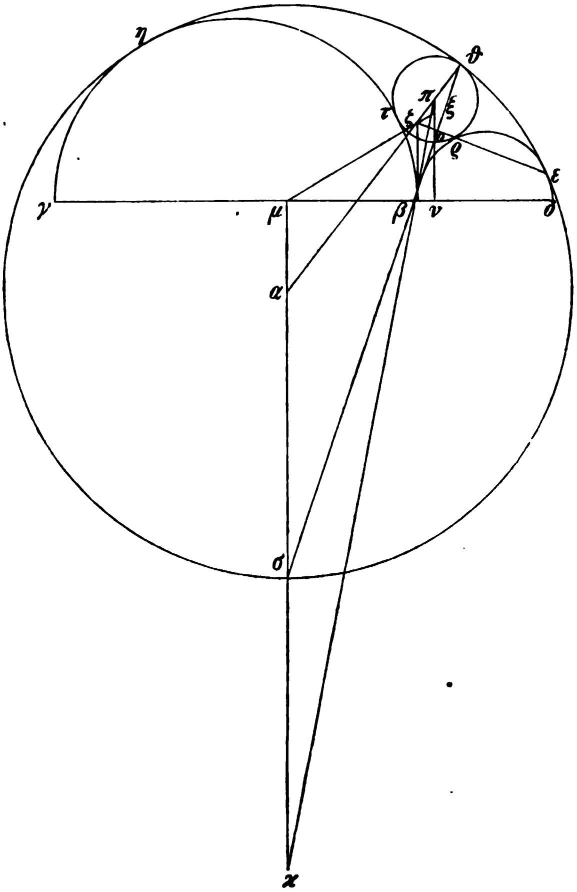


ΓΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ ἡ ΒΜ ἐπὶ μὲν *τῆς πρώτης καταγραφῆς* πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, *ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας* καὶ τρίτης *ὡς ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς συναμφότερον, τουτέστιν ὡς ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, καὶ ἡ ΒΝ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου, ἔσται ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἡ ΛΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν*

---

2. *μὲν* add. *Hu* 2. 3. *πρὸς τὴν — κύκλου* add. *Co Sca* 3. *καὶ τρίτης* add. *Co* 8. post *τὴν βν* add. S *οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ζξ καὶ ἡ αζ πρὸς τὴν ζπ οὕτως*

τρίτη καταγραφή



ut $\beta\gamma + \beta\delta$, in secunda autem et tertia ut $\beta\gamma - \beta\delta$ ad $\gamma\delta$, *id est*

$\beta\gamma \pm \beta\delta : \gamma\delta = \beta\mu : \alpha\vartheta$, et *propter idem lemma*

$= \beta\nu : \pi\vartheta$ (*nimirum* circulorum $\varepsilon\vartheta\eta$ $\vartheta\varrho\tau$ radii sunt $\alpha\vartheta$ $\pi\vartheta$, *perinde atque in superiore lemmate* $\alpha\zeta$ *circuli* $\varepsilon\vartheta\eta$), vicissim igitur erit

ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ (ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΖΜ ἔσται ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΞ). καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ, οὕτως ἡ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. καὶ τῶν ΕΗΘ ΡΘΤ κύκλων ἐφάπτεταί τις κύκλος ὁ ΒΡΕΔ κατὰ τὰ Ρ Ε σημεῖα· διὰ ἄρα τὸ προδειχθὲν ιε' θεώρημα ἡ τὰ Ρ Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον πεσεῖται, καὶ ἴσον ἔσται τὸ ὑπὸ ΕΖΡ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ τετραγώνῳ. ἔστιν δὲ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετραγώνῳ ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΖΡ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ τῷ ἀπὸ ΖΘ· ἴση ἄρα ἡ ΒΖ τῇ ΖΘ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ μὲν ΜΑ ἐκβληθεῖσα τέμνει τὴν τοῦ ΕΗΘ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Σ, ἡ δὲ ΠΝ τέμνει τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ο σημεῖον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΑΣ, ἡ δὲ ΠΟ τῇ ΠΘ, καὶ ἡ τὰ Ο Σ σημεῖα ἐπιζευγνύουσα ἥξει διὰ τοῦ Θ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΑΣ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΠΟ γωνίᾳ ἐναλλάξ, καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν τὸ ΑΘΣ τρίγωνον τῷ ΠΘΟ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΑΠ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ διὰ τῶν Σ Θ Ο σημείων ἀπαγομένη. ἥξει δὲ καὶ διὰ τοῦ Β· εὐθεῖα γὰρ ἡ ΘΟΒ διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὴν ΟΠ πρὸς τὴν ΠΘ, ἴσων οὐσῶν τῶν ὑπὸ ΒΖΘ ΟΠΘ γωνιῶν ἐν παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΟΠ· καὶ τοῦτο

---

1. *τοῦ* (ante *ΘΡΤ*) omissum in A add. BS 1. *ἀλλ' ὡς* — 5. 6. *ΘΡΤ κύκλου* om. S 1. *ὡς ἡ ΜΒ Co* pro *ὡς ἡ* $\overline{ME}$ 4. *ὡς ἄρα* add. *Hu* 5. *τὴν* add. *Hu* 7. *τὰ* $\overline{PE}$ A, distinx. BS, item proximo versu 7. 8. *διὰ ἄρα* — *σημεῖα* add. A[1] in marg. (BS) *ιε' θεώρημα* forsitan interpolator addiderit 9. *ἐπὶ τὸ Ζ Co Sca* pro *ἐπὶ τὸ* $\overline{H}$ 13. *ἐπεὶ Hu, ἔστιν* A, *ἔστι* BS 15. 16. *ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν Hu*, om. A[1], *ἴση μὲν* add. A[2] in marg. (BS) 16. *ἡ δὲ* $\overline{ΠΟ}$ A[2] ex *ἡ δὲ* $\overline{Π*}$ *ἡ* (ante *τὰ*) add. *Hu* *τὰ* $\overline{OC}$ A, distinx. BS 20. 21. *τῶν* $\overline{ςΘΟ}$ A[2] super evanidam primae manus scripturam, distinx. BS 21. *τοῦ Β Co Sca* pro *τοῦ* $\overline{BE}$ 21. 22. *ευθεῖ/ /// / /!/ /// | τὸ εἶναι* A[1], *α γὰρ η* $\overline{ΘΟΒ}$ *διὰ* add. A[2](S), *εὐθεῖα γὰρ ἡ* $\overline{θοξ}$ *διὰ τὸ εἶναι* B 23. *πρὸς τὴν* $\overline{ΠΘ}$ *ἴσων* | super evanidam primae manus scripturam A[2](B[3]S), *πρὸς τὴν* $\overline{πθ}$ .... B[1]

$\beta\mu : \beta\nu = \alpha\vartheta : \pi\vartheta$. Sed est

$\beta\mu : \beta\nu = \zeta\alpha : \zeta\pi$ (iunctâ enim rectâ $\zeta\xi\mu$ erit $\beta\mu : \beta\nu = \zeta\mu : \zeta\xi = \zeta\alpha : \zeta\pi$); ergo etiam

$\zeta\alpha : \zeta\pi = \alpha\vartheta : \pi\vartheta$. Et circulos $\varepsilon\vartheta\eta$ $\vartheta\varrho\tau$ tangit circulus $\beta\varrho\varepsilon\delta$ in punctis ε ϱ; ergo, secundum ea quae supra theoremate XV (*cap. 21*) demonstrata sunt, recta, quae puncta ε ϱ iungit, producta cadet in punctum ζ, atque erit (*ibid. cap. 22*)

$\varepsilon\zeta \cdot \zeta\varrho = \vartheta\zeta^2$. Sed est etiam *propter elem. 3, 36*

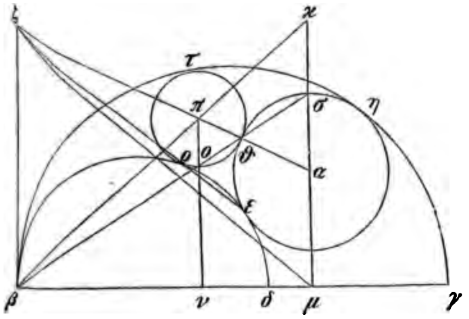
$\varepsilon\zeta \cdot \zeta\varrho = \zeta\beta^2$; ergo $\zeta\beta^2 = \vartheta\zeta^2$, et

$\zeta\beta = \zeta\vartheta$.

Sed quia $\mu\alpha$ producta circuli $\varepsilon\vartheta\eta$ circumferentiam secat in σ, et $\pi\nu$ circuli $\vartheta\varrho\tau$ circumferentiam secat in o, est igitur

$\alpha\sigma = \alpha\vartheta$, et $\pi o = \pi\vartheta$,

et recta, quae puncta σ o iungit, etiam per ϑ transibit; anguli enim alterni $\vartheta\alpha\sigma$ $\vartheta\pi o$ aequales sunt, *estque* $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \vartheta\pi : \pi o$, itaque *propter elem. 6, 7* triangula $\alpha\vartheta\sigma$ $\pi\vartheta o$ similia sunt; et recta est $\alpha\vartheta\pi$; ergo recta etiam est quae per o ϑ σ ducitur[1]. Sed eadem recta etiam per β transibit; nam recta est $\vartheta o\beta$, quia *supra demonstravimus* esse $\zeta\beta = \zeta\vartheta$ et



$\pi o = \pi\vartheta$, *itaque* est $\zeta\beta : \zeta\vartheta = \pi o : \pi\vartheta$, et propter parallelas $\zeta\beta$ πo anguli $\beta\zeta\vartheta$ $o\pi\vartheta$ aequales sunt; nam hoc quoque supra demonstratum est decimoquinto[2].

1) Hoc eadem ratione ac supra propos. 13 adnot. 4 demonstratur.

2) Vide supra p. 211 sub finem vel p. 213. Proportio autem $\zeta\beta : \zeta\vartheta = \pi o : \pi\vartheta$ transponenda est in $\zeta\vartheta : \vartheta\pi = \zeta\beta : \pi o$, ut respondeat illi $\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \alpha\varkappa : \gamma\delta$.

γὰρ προδέδεικται ιε'. ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΒΠ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΜΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἦν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΠ, ἡ ΑΣ πρὸς ΠΟ καὶ ἡ ΣΚ πρὸς ΠΟ· ἴση ἄρα ἡ ΑΣ τῇ ΣΚ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΑΚ ὅλῃ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΕΗΘ κύκλου ἐστὶν ἴση, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΣ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΟΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΑ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον, ὅπερ: ~

26 ιη'. Τούτων προτεθεωρημένων ὑποκείσθω ἡμικύκλιον τὸ ΒΗΓ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον εἰλήφθω τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῶν ΒΔ ΔΓ ἡμικύκλια γεγράφθω τὰ ΒΕΔ ΔΥΓ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τριῶν περιφερειῶν τὸν καλούμενον ἄρβηλον κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Α Π Ο, καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ ἤχθωσαν αἱ ΑΜ ΠΝ ΟΣ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΜ ἴση ἐστὶν τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ἡ δὲ ΠΝ διπλῆ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου, ἡ δὲ ΟΣ τριπλῆ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου, καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς.

Ἤχθω διάμετρος ἡ ΘΖ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ κά-

---

1. ιε'] ι'ε'* A, ι'ε' S, ἐν τῷ $\overline{\iota\varepsilon}^{\omega}$' B (conf. ad p. 222, 7. 8) 2. τῇ ΜΑ Co pro τῆι $\overline{ΜΑ}$ εκβληθειση̣ς A(BS), corr. *Sca* (*Co*) 4. οὕτως — $\overline{ΑΘ}$ πρὸς $\overline{ΘΠ}$ bis scripta in ABS, corr. *Co Sca* 5. 6. πρὸς $\overline{ΠΟ}$· ἴση ἄρα ἡ $\overline{ΑΣ}$ τῇ add. *Hu* auctore *Sca*, qui ἴση αρα ἡ $\overline{σκ}$ τῇ πσα adscripsit (πσα igitur pro codicum scriptura $\overline{ΣΚ}$ intulit) 7. καὶ ante ἔστιν super versum add. A prima, ut videtur, manu 8. ἡ ante ΝΠ om. AS, add. B[1], rursus del. B[3] 11. in fine huius lemmatis quaedam periise videntur: vide append. 12. $\overline{ΙΗ}$ A[1] in marg. (BS) 15. ἐγγράφθωσαν A[1], corr. A[2](BS) 17. ὅσοι δήποτ' οὖν AB, coniunx. S ὡς ὁ περὶ ABS, corr. *Hu* 18. τὰ $\overline{ΑΠΟ}$ A, distinx. BS 21. post διπλῆ add. ἐστι (sic) ABS, del. *Hu* τοῦ A[2] in rasura pro τῆς 22. αἱ ἑξῆς αἱ AS, ἑξῆς αἱ B, corr. *Hu*

Iuncta autem $\beta\pi$ producatur et rectae $\mu\alpha$ *productae* occurrat in $\varkappa$. Iam quia est

$\beta\mu : \beta\nu = \beta\varkappa : \beta\pi = \alpha\zeta : \zeta\pi$, et, *ut supra demonstravimus*

$\alpha\zeta : \zeta\pi = \alpha\vartheta : \pi\vartheta$, erit etiam

$\beta\varkappa : \beta\pi = \alpha\vartheta : \pi\vartheta = \alpha\sigma : \pi o$. Et *propter parallelas* $\varkappa\sigma$ πo *est*

$\beta\varkappa : \beta\pi = \varkappa\sigma : \pi o$; ergo

$\alpha\sigma = \varkappa\sigma$.

Iam quia tota $\alpha\varkappa$ $(= \alpha\sigma + \varkappa\sigma)$ circuli $\varepsilon\vartheta\eta$ diametro aequalis, et *propter parallelas* $\varkappa\mu$ $\pi\nu$ est $\varkappa\mu : \varkappa\sigma = \pi\nu : \pi o$, erit etiam (*quia* $\alpha\varkappa = 2\varkappa\sigma$)

$\varkappa\mu : \alpha\varkappa = \pi\nu : 2\pi o$,

id est, ut $\alpha\mu$ unà cum circuli $\varepsilon\vartheta\eta$ diametro ad ipsam diametrum, ita *erit* $\pi\nu$ ad circuli $\vartheta\varrho\tau$ diametrum (*sive, ut supra* *p. 219*, $\alpha\mu + D\alpha : D\alpha = \pi\nu : D\pi$), q. e. d.

Quodsi pro circumferentia semicirculi $\beta\eta\gamma$ *sit recta linea* $\beta\eta$ *ad ipsam* $\beta\delta$ *perpendicularis, nihilominus circa descriptos circulos eadem contingent*[3]).

XVIII. His praemonstratis supponatur semicirculus $\beta\eta\gamma$, Prop. 16 cuius in basi quodlibet punctum δ sumatur, et in rectis $\beta\delta$ $\delta\gamma$ describantur semicirculi $\beta\varepsilon\delta$ $\delta\upsilon\gamma$, et in spatium quod est inter tres circumferentias, quod ἄρβηλον vocant, inscribantur circuli quotcunque, qui et semicirculos et se invicem tangant, velut qui sunt circa centra α π o, et a centris ad $\beta\gamma$ ducantur perpendiculares $\alpha\mu$ $\pi\nu$ $o\sigma$; dico

$\alpha\mu$ aequalem esse diametro circuli α,

$\pi\nu$ duplam diametri circuli π,

$o\sigma$ triplam diametri circuli o,

reliquas deinceps perpendiculares multiplas diametrorum, quae cuiusque sunt *circuli*, secundum numerorum seriem per unitates progredientem.

Ducatur diametrus $\vartheta\alpha\zeta$ ipsi $\beta\gamma$ parallela, et *ad* $\beta\gamma$ per-

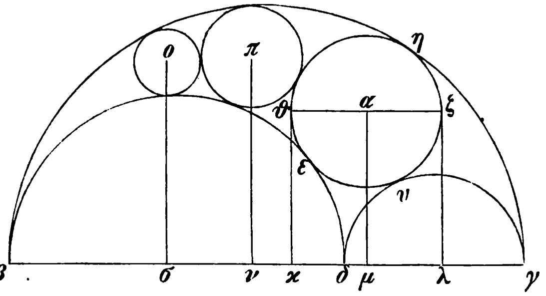
3) Haec addidit *Co*: vide append. ad h. l. et infra cap. 27.

---

22. τὸ O *Co* pro τὸ Θ

ϑετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ κατὰ τὰ προγεγραμμένα τὸ μὲν ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον ὀρϑογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ τῷ ὑπὸ ΚΓΔ. καὶ διὰ τοῦτο

πρώτη καταγραφή



ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΓ· ἑκάτερος γὰρ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΓ (ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΚ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς ΒΚ· διελόντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΒ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ· πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΓ ΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΛ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως *ἡ* ΚΛ *πρὸς τὴν ΛΓ) · ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΓΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. προδέδεικται δὲ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΑΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΚΛ, τουτέστιν τῇ ΖΘ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦτο*

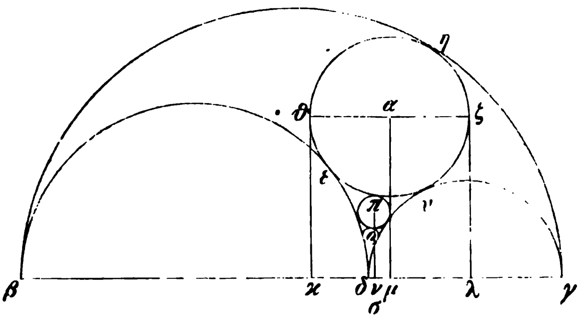
3. *τὸ δὲ ὑπὸ* $\overline{ΒΓ}$ $\overline{ΓΛ}$ *τὸ* A[1]S, *ΓΛ* restituit *Co*, *τῶ* corr. A[2] (*τῷ* B[s] Paris. 2368) 4. *πρὸς πρὸς* $\overline{ΛΓ}$ A, sed alterum *πρὸς* expunctum 6. 7. *ὡς ἡ ΓΒ — ἐναλλὰξ* et 11. 12. *ὡς ἡ ΒΓ — ἐναλλὰς* sive ab ipso huius theorematis scriptore praeter necessitatem posita sive ab alio inculcata, quia sine dubio abundant, omisimus in versione Lat.

pendiculares $\vartheta\varkappa$ $\zeta\lambda$; erit igitur secundum ea quae supra (*cap.* 23 *p.* 217) demonstrata sunt

$\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$, et

$\beta\gamma \cdot \gamma\lambda = \gamma\delta \cdot \gamma\varkappa$ *).

δευτέρα καταγραφή



Iam quia $\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$, est igitur

$\beta\gamma : \beta\delta = \beta\lambda : \beta\varkappa$, *et* dirimendo

$\delta\gamma : \beta\delta = \varkappa\lambda : \beta\varkappa$, *et* e contrario

$\beta\delta : \delta\gamma = \beta\varkappa : \varkappa\lambda$.

Rursus quia $\beta\gamma \cdot \gamma\lambda = \gamma\delta \cdot \gamma\varkappa$, est igitur

$\beta\gamma : \gamma\delta = \varkappa\gamma : \gamma\lambda$, *et* dirimendo

$\beta\delta : \delta\gamma = \varkappa\lambda : \lambda\gamma$.

Sed erat etiam $\beta\delta : \delta\gamma = \beta\varkappa : \varkappa\lambda$; ergo

$\beta\varkappa : \varkappa\lambda = \varkappa\lambda : \lambda\gamma$, itaque

$\beta\varkappa \cdot \lambda\gamma = \varkappa\lambda^2$.

Sed supra (*cap.* 24) demonstravimus esse

$\beta\varkappa \cdot \lambda\gamma = \alpha\mu^2$; ergo est

$\alpha\mu = \varkappa\lambda = \vartheta\zeta$, id est

$\alpha\mu$ aequalis diametro circuli α.

*) Scilicet circulus α non solum semicirculum $\beta\varepsilon\delta$ (unde demonstratur $\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$), sed etiam semicirculum $\gamma\nu\delta$ tangit ea ratione quae initio propositionis 14 supponitur; ergo, quo facilius appareat esse $\beta\gamma \cdot \gamma\lambda = \gamma\delta \cdot \gamma\varkappa$, pro litteris in priore casu ($\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta \cdot \beta\lambda$) ex propos. 14 repetitis

$\beta \;\; \varkappa \;\; \lambda \;\; \gamma$

in hoc altero casu ad figuram primam vel secundam supra descriptam apponantur

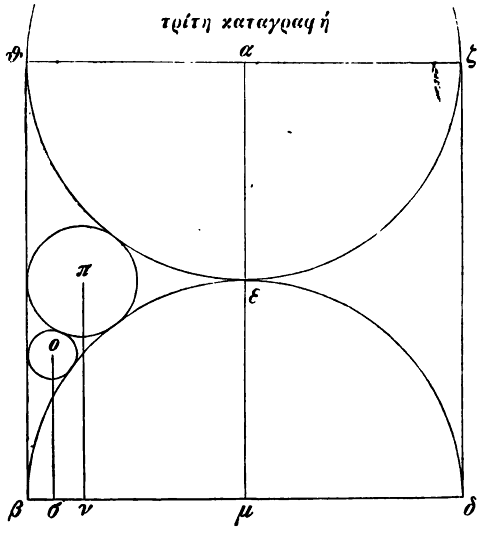
$\gamma \;\; \lambda \;\; \varkappa \;\; \beta$.

---

13. post διελόντι add. ὡς ABS, del. *Hu* 15. 16. οὕτως ἡ *KΛ* add. *Hu* auctore *Co* 18. ἐστιν ἄρα A(BS), transposuit *Hu*

προδέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ διπλῆ τῆς ΖΘ, ἔσται καὶ ἡ ΠΝ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διπλῆ. ἡ ΠΝ ἄρα μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου τριπλασία τῆς διαμέτρου, καὶ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἡ ΟΣ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου· καὶ ἡ ΟΣ ἄρα τριπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου. καὶ ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ ἑξῆς κύκλου κάθετος τῆς διαμέτρου τετραπλασία, καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν καθ' αὑτὰς διαμέτρων εὑρεθήσονται πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς, καὶ τοῦτο συμβαῖνον ἐπὶ τὸ ἄπειρον ἀποδειχθήσεται.

27 *Ἂν δ' ἀντὶ τῶν ΒΗΓ ΔΥΓ περιφερειῶν εὐθεῖαι ὦσιν ὀρθαὶ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης ἔχει καταγραφῆς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται περὶ τοὺς ἐγγραφομένους κύκλους· αὐτόθεν γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἴση γίνεται τῇ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου διαμέτρῳ.*



Ἂν δὲ αἱ μὲν ΒΗΓ ΒΕΔ μένωσιν περιφέρειαι, ἀντὶ δὲ τῆς ΔΥΓ περιφερείας εὐθεῖα ὑποτεθῇ (ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης ἔχει καταγραφῆς) ἡ ΔΖ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΒΓ, τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ τετραγωνικὸν ἐν ἀριθμοῖς λόγον ἐχούσης, σύμμετρος ἔσται ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος τῇ δια-

Sed quia superiore *lemmate* etiam hoc demonstravimus, esse

$\alpha\mu + \vartheta\zeta : \vartheta\zeta = \pi\nu$: diam. circ. π, estque

$\alpha\mu + \vartheta\zeta = 2\,\vartheta\zeta$, erit etiam

$\pi\nu$ dupla diametri circuli π.

Ergo $\pi\nu$ unà cum diametro circuli π tripla est *eiusdem* diametri, atque (*item propter superius lemma*) in eadem proportione est $o\sigma$ ad circuli o diametrum; ergo est etiam

$o\sigma$ tripla diametri circuli o**).

Et similiter perpendicularis, quae ex centro proximi circuli *ducitur*, quadrupla est *ipsius* diametri, et

reliquae deinceps perpendiculares invenientur multiplae diametrorum, quae cuiusque sunt *circuli*, secundum numerorum seriem per unitates progredientem,

et hoc in infinitum contingere demonstrabitur.

Quodsi pro circumferentiis $\beta\eta\gamma$ $\delta\upsilon\gamma$ rectae sint lineae perpendiculares ad $\beta\delta$, ut est in tertia figura, eadem circa inscriptos circulos contingent; nam statim perpendicularis, quae a centro α ad $\beta\delta$ *ducitur*, aequalis fit diametro circuli α***).

Sin vero circumferentiae $\beta\eta\gamma$ $\beta\epsilon\delta$ maneant, pro circumferentia autem $\delta\upsilon\gamma$ (ut est in quarta figura) recta linea $\delta\zeta$ supponatur ad $\beta\gamma$ perpendicularis, primum, si $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$ eandem proportionem habeat quam quadrata *quorumlibet* numerorum, perpendicularis ex α commensurabilis erit dia-

**) Haec, iisdem notis ac supra p. 219 adhibitis, distinctius sic describuntur: Quoniam $\pi\nu = 2\,D\pi$, est igitur

$\pi\nu + D\pi = 3\,D\pi$. Sed secundum propos. 15 (litteris scilicet convenienter mutatis) est

$\pi\nu + D\pi : D\pi = o\sigma : Do$; ergo $o\sigma = 3\,Do$

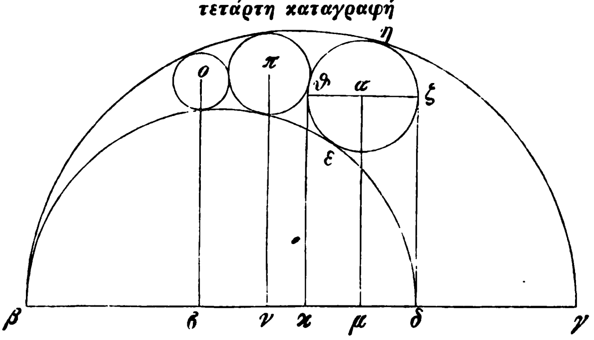
***) Significat igitur scriptor circulum $\vartheta\epsilon\zeta$ tangere semicirculum $\beta\epsilon\delta$ in ϵ et perpendiculares $\beta\vartheta$ $\delta\zeta$ in ϑ ζ; ergo diametrus $\vartheta\zeta$ ipsi $\beta\delta$ parallela est et aequalis; itaque $\alpha\mu$ diametro circuli α aequalis. Reliqua perinde ac supra initio huius paginae demonstrantur.

---

3. ἡ ante *ΑΜ* add. *Hu* 5. ἡ $\overline{ΠΝ}$ A[2] ex *** $\overline{ΠΝ}$ 10. *αἱ* add. *Hu* 12. αποδειχθήσονται ABS, corr. Paris. 2368 V 14. δ᾽ add. *Hu* auctore *Co* 16. *ΒΔ Co* pro *ΒΓ*, item vs. 25 21. αυτό*θεν A 27. διαμέτρου ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 29. μὲν add. A[1] super vs. 34. ἡ *ΔΖ Co* pro ἡ $\overline{ΔΞ}$, item p. 230, 3 et 5 36. συμμετρον (sine acc.) A(B), corr. Paris. 2368 V (utraque forma exstat in S)

μέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, εἰ δὲ μή, ἀσύμμετρος. καθόλου γὰρ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, τοῦτον ἔχει

τετάρτη καταγραφή



τὸν λόγον δυνάμει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ὡς ἑξῆς δείκνυται. οἷον ἐὰν ᾖ τετραπλασία μήκει ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, γίνεται διπλῆ μήκει ἡ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος, τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Π τριπλῆ, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ Ο τετραπλῆ, καὶ ἑξῆς κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς.

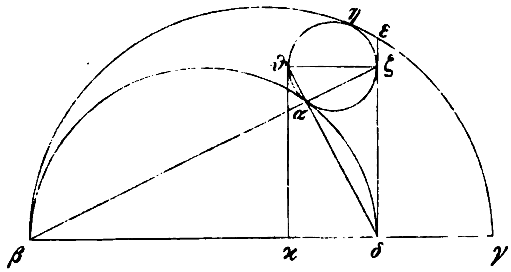
28 *ιϑ'. Τὸ ὑπερτεθὲν λῆμμα. ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΑΔ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΔΕ, καὶ κύκλος ἐφαπτόμενος ὁ ΘΗΖΑ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ μήκει, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ΘΗΖΑ* κύκλου *δυνάμει.*

Ἤχθω διάμετρος ἡ ΘΖ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΖΑΒ ΘΑΔ. κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ· ἔσται ἄρα διὰ τὰ προδεδειγμένα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΚ, τουτέστιν πρὸς ΘΖ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς ΘΖ, ἡ ΔΑ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

2. post *λόγον* add. *μήκει Co* 4—8. verba *οἷον ἐὰν* usque ad finem capitis forsitan alius atque ipse theorematis scriptor addiderit 9. *ΙΘ* A¹ in marg. (BS) 10. *ὁ ΘΗ ΖΑ* A, coniunx. BS, item vs. 12 et p. 232, 4 11. *ὡς* add. *Hu* auctore *Co* 12. *κύκλου* add. *Hu* auctore *Co* 14. *τὰ* omissum in AB add. S 15. *τῷ ἀπὸ* super evanidam primae manus scripturam A²(BS) 17. *ΔΚ τουτέστιν* A²(BS), // ///////

metro circuli α, at si non, incommensurabilis. Nam omnino quam proportionem habet $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$, eandem habet quadratum ex $\delta\zeta$ ad quadratum ex diametro circuli α, ut deinceps (*propos. 17*) demonstrabitur. Velut si recta $\beta\gamma$ quadrupla sit ipsius $\gamma\delta$, recta $\delta\zeta$, id est perpendicularis ex α, fit dupla diametri circuli α, et perpendicularis ex π tripla *diametri circuli* π, et perpendicularis ex o quadrupla *diametri circuli* o, et sic porro secundum numerorum seriem.

XIX. *Sequitur* lemma quod *supra* dilatum est. Sint semicirculi $\beta\eta\gamma$ $\beta\alpha\delta$, et perpendicularis $\delta\varepsilon$, et circulus $\vartheta\eta\zeta\alpha$, qui semicirculos et perpendicularem tangat in η α ζ; dico esse ut rectam $\beta\gamma$ ad $\gamma\delta$, ita quadratum ex $\delta\zeta$ ad quadratum ex diametro circuli $\vartheta\eta\zeta\alpha$. Prop. 17



Ducatur diametrus $\vartheta\zeta$ *ipsi* $\beta\gamma$ *parallela*; ergo rectae lineae sunt $\zeta\alpha\beta$ $\vartheta\alpha\delta$*). Ducatur perpendicularis $\vartheta\varkappa$; ergo propter ea quae supra (*cap. 23 p. 217*) demonstravimus erit

$\beta\gamma \cdot \beta\varkappa = \beta\delta^2$; ergo

$\beta\gamma : \beta\delta = \beta\delta : \beta\varkappa$, *et convertendo*

$\beta\gamma : \gamma\delta = \beta\delta : \delta\varkappa$, id est

$= \beta\delta : \vartheta\zeta$. Sed *propter parallelas* $\beta\delta$ $\vartheta\zeta$ est

$\beta\delta : \vartheta\zeta = \delta\alpha : \vartheta\alpha$; *ergo etiam*

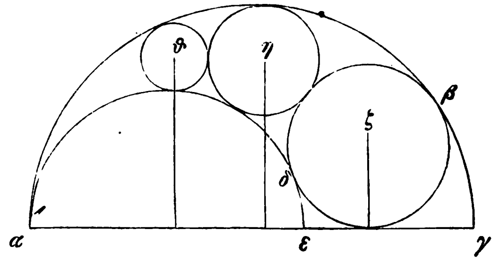
$\beta\gamma : \gamma\delta = \delta\alpha : \vartheta\alpha$. Sed, quia triangulum $\vartheta\zeta\delta$ orthogonium est, et perpendicularis ad hypotenusam ducta $\zeta\alpha$, est igitur

*) Vide supra propos. 14 cum adnot. 1.

A[1] 18. ὡς / /$\overline{A}$ //// // //τως A[1], ὡς δὲ ἡ $\overline{\Delta A}$ πρὸς $\overline{\Lambda\Theta}$ οὕτως A[2], ως δὲ ἡ $\overline{\delta}$ πρὸς $\overline{\lambda\vartheta}$ S, corr. B

ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΖ (ὀρθογώνιον γάρ ἐστιν τὸ ΘΖΔ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΖΔ)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΘΗΖΔ κύκλου.

29 *κʹ. Ἔτι καὶ τοῦτο διὰ τῶν προγεγραμμένων λημμάτων τεθεώρηται. ἔστω ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ, καὶ γεγράφθωσαν ἐφαπτόμενοι τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κύκλοι οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Ζ Η Θ, καὶ οἱ συνεχεῖς αὐτοῖς ὡς ἐπὶ τὸ Α. ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Ζ κύκλου δῆλον, λέγω δʼ ὅτι καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τριπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Θ πενταπλασία, καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς.*



Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος πρὸς τὴν ἰδίαν διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου ἡμιολία τῆς διαμέτρου, τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται τριπλασία. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δʼ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ δύο, ἕξει καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον τὸν αὐτὸν λόγον· τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται πενταπλασία. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ ἑξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἑξῆς περισσοὺς ἀριθμούς.

$\delta\alpha : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \vartheta\alpha$; *itaque* (*elem.* 5 *def.* 10. 8. 11)
$\delta\alpha : \vartheta\alpha = \delta\alpha^2 : \alpha\zeta^2$. *Sed est* $\delta\alpha : \alpha\zeta = \delta\zeta : \zeta\vartheta$; *ergo*
$\delta\alpha : \vartheta\alpha = \delta\zeta^2 : \zeta\vartheta^2$; ergo etiam
$\beta\gamma : \gamma\delta = \delta\zeta^2 : \zeta\vartheta^2$, *id est*, ad quadratum ex diametro circuli $\vartheta\eta\zeta\alpha$.

XX. Praeterea ex lemmatis quae modo perscripta sunt Prop. 18
hoc quoque *facile* demonstratum erit. Sint semicirculi $\alpha\beta\gamma$ $\alpha\delta\varepsilon$, et describatur circa centrum ζ circulus, qui *et basim* $\alpha\gamma$ *et* semicirculos tangat, tum circa centrum η circulus, qui *et circulum* ζ *et* semicirculos tangat, tum *similiter* circulus ϑ et alii continuo se excipientes usque ad punctum α. Iam vero perpendicularem ex ζ ad $\alpha\gamma$ *ductam* aequalem esse radio circuli ζ manifestum est; sed dico etiam

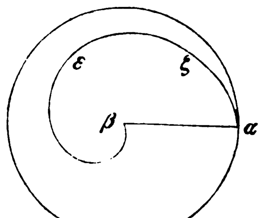
perpendicularem ex η esse triplam radii circuli η, et perpendicularem ex ϑ quintuplam *radii circuli* ϑ, et reliquas deinceps perpendiculares multiplas radiorum, *qui cuiusque sunt circuli*, secundum impares deinceps numeros.

Quoniam enim supra (*propos.* 15) demonstravimus ut perpendicularem ex ζ unà cum diametro *circuli* ζ ad ipsam diametrum, ita esse perpendicularem ex η ad diametrum circuli η, atque perpendicularis ex ζ unà cum diametro ad diametrum proportionem habet 3 : 2, *perpendicularis* igitur *ex* η radii *circuli* η erit tripla. Rursus quia ut perpendicularis ex η unà cum diametro *circuli* η ad ipsam diametrum, ita est perpendicularis ex ϑ ad diametrum *circuli* ϑ, et perpendicularis ex η unà cum diametro ad diametrum proportionem habet 5 : 2, etiam perpendicularis ex ϑ ad diametrum *circuli* ϑ eandem proportionem habebit; radii igitur erit quintupla. Similiter demonstrabitur reliquas quoque perpendiculares multiplas esse radiorum, *qui cuiusque sunt circuli*, secundum impares deinceps numeros.

---

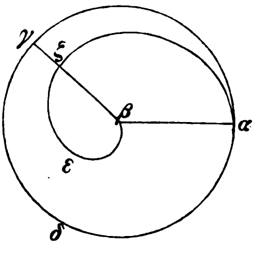
5. $\overline{K}$ A[1] in marg. (BS) 8. τὰ ΖΗΘ A, distinx. BS 13. 14. καὶ ἑξῆς κάθετος — πολλαπλασια (sine acc.) A(BS), corr. *Hu* auctore *Co* 23. πρὸς τὰς | δύο AB[3], corr. B[1]S 26. αἱ add. A[1] super vs.

30 *κα'. Τὸ ἐπὶ τῆς ἕλικος τῆς ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένης θεώρημα προὔτεινε μὲν Κόνων ὁ Σάμιος γεωμέτρης, ἀπέδειξεν δὲ Ἀρχιμήδης θαυμαστῇ τινι χρησάμενος ἐπιβολῇ. ἔχει δὲ γένεσιν ἡ γραμμὴ τοιαύτην.*



31 *Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον μὲν τὸ B, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ BA. κεκινήσθω ἡ BA εὐθεῖα οὕτως ὥστε τὸ μὲν B μένειν, τὸ δὲ A ὁμαλῶς φέρεσθαι κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἅμα δὲ αὐτῇ ἀρξάμενόν τι σημεῖον ἀπὸ τοῦ B φερέσθω κατ' αὐτῆς ὁμαλῶς ὡς ἐπὶ τὸ A, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τό τε* ἀπὸ τοῦ *B σημεῖον τὴν BA διερχέσθω καὶ τὸ A τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· γράψει δὴ τὸ κατὰ τὴν BA κινούμενον σημεῖον ἐν τῇ περιφορᾷ γραμμὴν οἵα ἐστὶν ἡ BEZA, καὶ ἀρχὴ μὲν αὐτῆς ἔσται τὸ B σημεῖον, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ἡ BA, αὐτὴ δὲ ἡ γραμμὴ ἕλιξ καλεῖται. καὶ τὸ ἀρχικὸν αὐτῆς ἐστι σύμπτωμα τοιοῦτον.*

32 *Ἥτις γὰρ ἂν διαχθῇ πρὸς αὐτὴν ὡς ἡ BZ καὶ ἐκβληθῇ, ἔστιν ὡς ἡ ὅλη τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν AΔΓ περιφέρειαν, οὕτως ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ.*



Τοῦτο δὲ συνιδεῖν ῥᾴδιον ἐκ τῆς γενέσεως· ἐν ᾧ μὲν γὰρ τὸ A σημεῖον τὴν ὅλην κύκλου περιφέρειαν διέρχεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ *B τὴν BA, ἐν ᾧ δὲ τὸ A τὴν AΔΓ περιφέρειαν, ἐν τούτῳ καὶ τὸ* ἀπὸ τοῦ *B τὴν BZ εὐθεῖαν. καὶ εἰσὶν αἱ κινήσεις αὗται ἑαυταῖς ἰσοταχεῖς, ὥστε καὶ ἀνάλογον εἶναι.*

33 *Φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο ὅτι, αἵτινες ἂν διαχθῶσιν ἀπὸ*

---

1. $\overline{KA}$ A[1] in marg. (BS) 2. *Κόνων Hu* pro *κώνων* 14. *ἀπὸ τοῦ* add. *Hu*, item vs. 27 16. *ἡ* $\overline{BZ}$ $\overline{EA}$ ABS, corr. *Co* 17. *περιφορᾶς Hu* auctore *Co* pro *περιφερείας* 21. *ἔσται* voluit *Co*, *ἐστιν* A, *ἔστιν* BS 29. *τὸ ἀπὸ τοῦ B*] *τὸ* $\overline{B}$ *τὴν* $\overline{B}$ AB, *τὸ* $\overline{\beta}$ S *Co*, corr. *Hu*

XXI. Theorema de helice *sive linea spirali* in plano descripta, a Conone Samio geometra propositum, Archimedes [1]) admirabili ratione, cum *punctorum aequabiliter procedentium motus* adhiberet, demonstravit. Hunc autem ortum linea habet [2]).

Sit circulus, cuius centrum β et radius $\beta\alpha$. Moveatur recta $\beta\alpha$ ita, ut punctum β maneat et punctum α aequabiliter in circuli circumferentia procedat, simul autem cum recta $\beta\alpha$ punctum quoddam in eà ipsà a β ad α procedere incipiat, et aequali tempore hoc punctum rectam $\beta\alpha$, ac punctum α circuli circumferentiam permeet: describet igitur punctum in recta $\beta\alpha$ procedens, cum ipsa $\beta\alpha$ circumagetur, lineam qualis est $\beta\varepsilon\zeta\alpha$, et initium eius erit punctum β, circumversionis autem initium recta $\beta\alpha$, ipsa autem linea helix vocatur [3]), cuius principalis proprietas (*quod σύμπτωμα Graeci vocant*) haec est.

Si enim quaelibet recta, velut $\beta\zeta$, ad helicem et porro *ad γ circuli circumferentiae punctum* ducatur, est ut tota circuli circumferentia ad $\alpha\delta\gamma$ circumferentiam, ita recta $\alpha\beta$ ad $\beta\zeta$ *). Prop. 19

Hoc autem facile ex ortu *spiralis lineae* perspicitur. Quo enim tempore punctum α totam circuli circumferentiam, eodem punctum a β procedens rectam $\beta\alpha$ permeat, et quo tempore punctum α circumferentiam $\alpha\delta\gamma$, eodem punctum a β procedens rectam $\beta\zeta$ permeat. Et fiunt *punctorum* motus aequabili celeritate; ergo etiam *lineae quas diximus* sunt inter se proportionales [4]).

Atque hoc etiam apparet, si quaelibet rectae sub aequa- Prop. 20

1) De helicibus p. 217 sqq. ed. Torelli.

2) Conf. l. c. p. 219.

3) Ibidem p. 230.

*) Conf. Archim. propos. 14.

4) Propriam et accuratam demonstrationem scriptor propterea omisisse videtur, quod ea facile ex Archimedis propositione 2 suppleri posset.

τοῦ Β πρὸς τὴν γραμμὴν εὐθεῖαι ἴσας περιέχουσαι γωνίας, τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν.

34 κβ'. Δείκνυται δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐν ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς τρίτον μέρος τοῦ περιλαμβάνοντος αὐτὴν κύκλου.

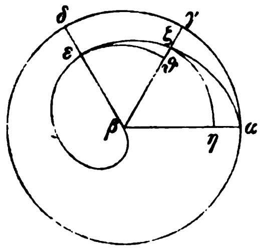
Ἔστω γὰρ ὅ τε κύκλος καὶ ἡ προειρημένη γραμμή, καὶ ἐκκείσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΚΝΛΠ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ μὲν ΑΓ περιφέρεια μέρος τι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἡ δὲ ΚΡ εὐθεῖα τῆς ΚΠ τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥ τε ΓΒ καὶ ἡ ΒΑ, καὶ τῇ μὲν ΚΝ παράλληλος ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΚΠ ἡ ΩΜ, καὶ περὶ τὸ Β κέντρον περιφέρεια ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΖ, οὕτως ἡ ὅλη τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ (τοῦτο γάρ ἐστιν τὸ ἀρχικὸν τῆς ἕλικος σύμπτωμα), ὡς δὲ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ, ἡ ΠΚ πρὸς ΚΡ, ὡς δὲ ἡ ΠΚ πρὸς τὴν ΚΡ, ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΩ, τουτέστιν ἡ ΡΤ πρὸς τὴν ΡΩ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ ΤΡ πρὸς ΡΩ. καὶ ἀναστρέψαντι· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΩ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, οὕτως ὁ ΑΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΖΒΗ τομέα. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΩ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΚΤ παραλληλογράμμου κύλινδρος περὶ ἄξονα τὸν ΝΤ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΜΤ παραλληλογράμμου κύλινδρον περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΓΒΑ τομεὺς πρὸς τὸν ΖΒΗ τομέα, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΚΤ παραλληλογράμμου κύλινδρος περὶ ἄξονα τὸν

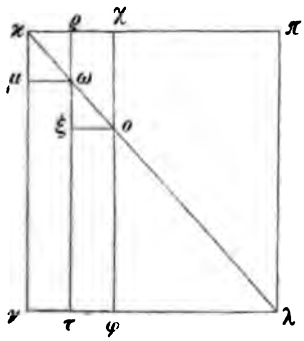
---

2. ὑπερέχουσι (sic) omissum in AB add. S 3. ΚΒ A[1] in marg. (BS) 3. 4. τῆς ἕλικος καὶ τῆς εὐθείας bis scripta in ABS 7. τὸ κν, λπ B, ΚΝ ΛΠ (sine τὸ) A, κλνπ S 8. ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια μέρος ἐστὶν τί A(BS), corr. *Co* et manus quaedam recentior (non Scaligeri) in S 10. ἡ ΒΑ *Co* pro ἡ ΚΑ 11. τῇ δὲ ΚΠ *Hu* pro τῆι δὲ ΚΜ (τῇ δὲ ΚΡ *Co* S man. rec.) 13. οὕτως ἡ add. S man. rec. 22. πρὸς τὸν *ΖΒ.Η τομεα A 26. τὸν ΖΒΗ A[2] ex τὸν *ΒΗ ὁ omissum in AB add. S

libus angulis a puncto β ad *spiralem* lineam ducantur, harum inter se differentias aequales esse [1]).

XXII. Demonstratur etiam figuram quae helice et rectâ, unde circumversionis est initium, continetur tertiam partem esse circuli helicem comprehendentis [2]). Prop. 21





Sit enim et circulus et spiralis linea, atque exponatur parallelogrammum rectangulum $\varkappa\nu\lambda\pi$, et sumatur circuli circumferentiae pars quaedam $\alpha\gamma$, ac rectae $\varkappa\pi$ eadem pars $\varkappa\varrho$, et iungantur $\gamma\beta$ $\beta\alpha$, et rectae $\varkappa\nu$ parallela *ducatur* $\varrho\tau$, et rectae $\varkappa\pi$ *parallela* $\mu\omega$, et circa β centrum circumferentia $\zeta\eta$. Iam quia est ut recta $\alpha\beta$ ad $\alpha\eta$, id est $\beta\gamma$ ad $\gamma\zeta$, ita tota circuli circumferentia ad circumferentiam $\gamma\alpha$ (haec enim principalis helicis qualitas est), et ut circuli circumferentia ad circumferentiam $\gamma\alpha$, ita $\pi\varkappa$ ad $\varkappa\varrho$, et ut $\pi\varkappa$ ad $\varkappa\varrho$, ita $\lambda\varkappa$ ad $\varkappa\omega$, id est $\tau\varrho$ ad $\varrho\omega$, ergo etiam ut $\beta\gamma$ ad $\gamma\zeta$, ita $\tau\varrho$ ad $\varrho\omega$, et convertendo *ut* $\beta\gamma$ *ad* $\beta\zeta$, *ita* $\varrho\tau$ *ad* $\tau\omega$, ideoque ut $\beta\gamma^2$ ad $\beta\zeta^2$, ita $\varrho\tau^2$ ad $\tau\omega^2$. Sed ut $\beta\gamma^2$ ad $\beta\zeta^2$, ita est sector $\gamma\beta\alpha$ ad sectorem $\zeta\beta\eta$ *). Ut autem $\varrho\tau^2$ ad $\tau\omega^2$, ita est cylindrus, qui circa axem $\nu\tau$ a parallelogrammo $\varkappa\nu\tau\varrho$ *oritur*, ad cylindrum, qui circa eundem axem *fit* ex parallelogrammo $\mu\nu\tau\omega$ **); ergo etiam ut sector $\gamma\beta\alpha$ ad sectorem $\zeta\beta\eta$, ita prior quem

1) Haec est Archimedis propositio 12.

2) Est Archimedis propositio 24; sed Pappi demonstratio alia ratione procedit.

*) Similes sectores inter sese esse ut quadrata ex radiis Commandinus efficit ex elem. 6, 33 et 12, 2.

**) Hoc sequitur ex elem. 12 propos. 11 et 2.

ΝΤ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΜΤ παραλληλογράμμου κύλινδρον
35 *περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. ὁμοίως δὲ ἐὰν τῇ μὲν ΑΓ ἴσην*
θῶμεν τὴν ΓΔ, τῇ δὲ ΚΡ ἴσην τὴν ΡΧ, καὶ τὰ αὐτὰ κατα-
σκευάσωμεν, ἔσται ὡς ὁ ΔΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΕΒΘ, οὕ-
τως ὁ ἀπὸ τοῦ ΡΦ παραλληλογράμμου κύλινδρος περὶ ἄξονα
τὸν ΤΦ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΞΦ παραλληλογράμμου κύλιν-
δρον περὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα. τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ ἐφοδεύ-
σαντες δείξομεν ὡς ὅλον τὸν κύκλον πρὸς πάντα τὰ ἐγγε-
γραμμένα τῇ ἕλικι ἐκ τομέων σχήματα, οὕτως τὸν ἀπὸ τοῦ
ΝΠ παραλληλογράμμου κύλινδρον περὶ ἄξονα τὸν ΝΔ πρὸς
πάντα τὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΚΝΔ τριγώνου περὶ τὸν ΔΝ ἄξονα
κώνῳ ἐγγραφόμενα ἐκ κυλίνδρων σχήματα, καὶ πάλιν ὡς
τὸν κύκλον πρὸς πάντα τὰ περιγραφόμενα τῇ ἕλικι ἐκ το-
μέων σχήματα, οὕτως τὸν κύλινδρον πρὸς πάντα τὰ τῷ
αὐτῷ κώνῳ ἐκ κυλίνδρων περιγραφόμενα σχήματα, ἐξ οὗ
φανερὸν ὅτι ὡς ὁ κύκλος πρὸς τὸ μεταξὺ τῆς ἕλικος καὶ
τῆς ΑΒ εὐθείας σχῆμα, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον.
τριπλάσιος δὲ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· τριπλάσιος ἄρα καὶ
ὁ κύκλος τοῦ εἰρημένου σχήματος.
36 *κγ'. Τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δείξομεν ὅτι, κἂν διαχθῇ τις*
εἰς τὴν ἕλικα ὡς ἡ ΒΖ καὶ διὰ τοῦ Ζ περὶ τὸ κέντρον τὸ
Β γραφῇ κύκλος, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ΖΕΒ
ἕλικος καὶ τῆς ΖΒ εὐθείας τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ περι-
εχομένου σχήματος ὑπό τε τῆς ΖΗΘ περιφερείας τοῦ κύκλου
καὶ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν.
37 *Ἡ μὲν οὖν ἀπόδειξις τοιαύτη τίς ἐστιν, ἑξῆς δὲ γρά-*
φομεν θεώρημα περὶ τὴν αὐτὴν γραμμὴν ὑπάρχον ἱστορίας
ἄξιον.

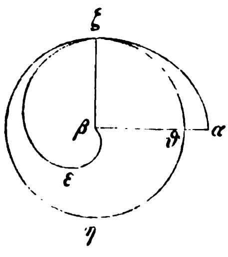
κδ'. Ἔστω γὰρ ὅ τε κύκλος ὁ προειρημένος ἐν τῇ γε-

---

4. *τὸν ΕΒΘ Co* pro *τὸν* $\overline{E\Theta B}$ 6. *τοῦ ΞΦ παραλληλογράμου*] quod plenius "*parallelogrammo ξτφο*" in Lat. versione scripsimus, litteram quidem *O*, quae in Graeco contextu non exstat, figura in codicibus tradita exhibet 16. *πρὸς τὸ* A, *πρὸς τὰ* B³S 17. *σχῆμα Hu* auctore *Co* pro *σχήματα* 20. $\overline{K\Gamma}$ A¹ in marg. (BS) 22. post *σχῆμα* repetunt *γραφη* A(BS), del. *Co* 25. *καὶ τῶν* $\overline{ZBH}$ ABS, *et rectis lineis ΖΒ ΒΘ Co*, corr. *Hu* 29. $\overline{K\Delta}$ A¹ in marg. (BS)

diximus cylindrus ad alterum. Ac similiter, si circumferentiae $\alpha\gamma$ aequalem $\gamma\delta$, et rectae $\varkappa\varrho$ aequalem $\varrho\chi$ posuerimus eademque construxerimus, erit ut sector $\delta\beta\gamma$ ad sectorem $\varepsilon\beta\vartheta$, ita cylindrus, qui circa axem $\tau\varphi$ a parallelogrammo $\varrho\tau\varphi\chi$ *oritur*, ad eum cylindrum, qui circa eundem axem *fit* ex parallelogrammo $\xi\tau\varphi o$. Eadem autem ratione progredientes demonstrabimus ut totum circulum ad omnes figuras helici ex sectoribus inscriptas, ita esse cylindrum, qui circa axem $\nu\lambda$ a parallelogrammo $\varkappa\nu\lambda\pi$ *oritur*, ad omnes ex cylindris figuras inscriptas cono, qui circa axem $\nu\lambda$ a triangulo $\varkappa\nu\lambda$ *ortum habet*, et rursus ut circulum ad omnes ex sectoribus figuras helici circumscriptas, ita esse cylindrum ad omnes ex cylindris figuras eidem cono circumscriptas, unde apparet esse ut circulum ad figuram quae helice et rectâ $\alpha\beta$ continetur, ita cylindrum ad conum. Est autem cylindri tertia pars conus; ergo etiam circuli tertia pars est ea quam diximus figura [3].

XXIII. Eadem ratione demonstrabimus, si ad helicem $\alpha\zeta\varepsilon\beta$ quaelibet recta, velut $\beta\zeta$, ducatur et circa centrum β per punctum ζ circulus describatur, figuram quae helice $\zeta\varepsilon\beta$ et rectâ $\zeta\beta$ continetur tertiam partem esse figurae quae circuli circumferentiâ $\zeta\eta\vartheta$ et rectis $\zeta\beta$ $\beta\vartheta$ continetur.

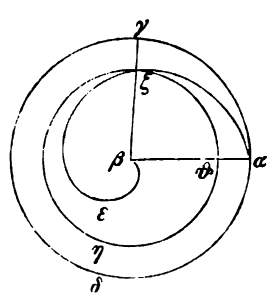


Hoc igitur modo *illa quam supra instituimus* fit demonstratio; iam vero subiungimus *aliud* theorema cura ac studio dignum, quod ad eandem lineam pertinet.

XXIV. Sit enim et circulus, qualem de ortu *helicis dis-* Prop. 22

3) Ad hanc demonstrationem ex Euclidis elementis nihil nisi libri 12 propositionem 10 (πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος etc.) licet citare; neque ex Archimede, nisi fallor, quidquam afferri potest, quod proprie ad hunc locum pertineat; attamen haec Pappi argumentandi ratio tota ex Archimedis ingenio et auctoritate pendere videtur.

νέσει, καὶ ἡ ἕλιξ αὐτὴ ἡ ΑΖΕΒ· λέγω ὅτι, ἥτις ἂν διαχθῇ ὡς ἡ ΒΖ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ἕλικος καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΕΒ ἕλικος καὶ τῆς ΒΖ εὐθείας περιεχόμενον, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΖΒ κύβον.



Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ κύκλος περὶ κέντρον τὸ Β ὁ ΖΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΖΕΒ γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΕΒ γραμμῆς καὶ τῆς ΖΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα, οὕτως ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΗΘ περιφερείας καὶ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα (ἑκάτερον γὰρ ἑκατέρου τρίτον ἐδείχθη μέρος), ὁ δὲ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν καὶ τῆς ΖΗΘ περιφερείας ἀπολαμβανόμενον χωρίον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΖΗΘ κύκλον καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ὁ ΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν καὶ τῆς ΖΗΘ περιφερείας ἀπολαμβανόμενον χωρίον, ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, ὡς δὲ ὁ ΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ εἰρημένον χωρίον, ἡ ὅλη αὐτοῦ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗΘ, τουτέστιν ἡ τοῦ ΑΓΔ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔΑ, τουτέστιν διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, καὶ τὸ μεταξὺ ἄρα τῆς ἕλικος καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας σχῆμα πρὸς τὸ μεταξὺ τῆς ἕλικος καὶ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΖ. οὗτος δὲ ὁ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΖ κύβον.

---

1. *καὶ ἕλιξ ἡ αὐτὴ* coni. *Hu* *αὐτῆ ἡ* $\overline{AZ}$ $\overline{EB}$ AS, corr. B *λέγω ὅ τις ητισᾶν* A, corr. BS 2. *ἐστιν* A, *ἐστὶν* BS 8. *τῆς* $\overline{AZEB}$ A² ex $\overline{A*EB}$ 11. *καὶ τῆς* $\overline{ZB}$ A² ex *καὶ τῆς* ** 17. *ἀπολαμβάνον* ABS, corr. *Hu* auctore *Co*, item vs. 21 20. *πρὸς* add. *Hu* auc-

serentes posuimus, et ipsa helix $\alpha\zeta\varepsilon\beta$; dico, si quaelibet recta, velut $\beta\zeta$, *ad helicem* ducatur, esse ut figuram quae totâ helice et rectâ $\alpha\beta$ continetur ad figuram quae helice $\zeta\varepsilon\beta$ et rectâ $\beta\zeta$ continetur, ita cubum ex $\alpha\beta$ ad cubum ex $\beta\zeta$ *).

Describatur enim per ζ circa centrum β circulus $\zeta\eta\vartheta$. Iam quia ut figura quae lineâ $\alpha\zeta\varepsilon\beta$ et recta $\alpha\beta$ continetur ad figuram quae lineâ $\zeta\varepsilon\beta$ et rectâ $\zeta\beta$ continetur, ita est circulus $\alpha\gamma\delta$ ad figuram quae circumferentiâ $\zeta\eta\vartheta$ et rectis $\zeta\beta$ $\beta\vartheta$ continetur (nam utramque *ex superioribus figuris* utriusque *ex posterioribus* tertiam partem esse demonstravimus *propos. 21*), et circulus $\alpha\gamma\delta$ ad figuram quae rectis $\zeta\beta$ $\beta\vartheta$ et circumferentiâ $\zeta\eta\vartheta$ continetur habet proportionem compositam ex eâ quam circulus $\alpha\gamma\delta$ habet ad circulum $\zeta\eta\vartheta$ et illâ quam circulus $\zeta\eta\vartheta$ habet ad figuram quae rectis $\zeta\beta$ $\beta\vartheta$ et circumferentiâ $\zeta\eta\vartheta$ continetur, sed ut circulus $\alpha\gamma\delta$ ad circulum $\zeta\eta\vartheta$, ita est $\alpha\beta^2$ ad $\beta\zeta^2$, ut autem circulus $\zeta\eta\vartheta$ ad eam quam statim diximus figuram, ita est tota circuli circumferentia ad circumferentiam $\zeta\eta\vartheta$ (*elem. 6, 33*), id est circuli $\alpha\gamma\delta$ circumferentia ad circumferentiam $\gamma\delta\alpha$, id est propter proprietatem *spiralis* lineae (*propos. 19*) recta $\alpha\beta$ ad $\beta\zeta$: ergo etiam figura inter helicem $\alpha\zeta\varepsilon\beta$ et rectam $\alpha\beta$ ad figuram inter helicem $\zeta\varepsilon\beta$ et rectam $\beta\zeta$ habet proportionem compositam ex $\alpha\beta^2$ ad $\beta\zeta^2$ et $\alpha\beta$ ad $\beta\zeta$. Haec autem proportio eadem est ac cubi ex $\alpha\beta$ ad cubum ex $\beta\zeta$.

*) Quo magis elegantia demonstrationis huius theorematis appareat, ad Graecorum verborum interpretationem quae supra legitur hic breviorem formularum conspectum iuvat addere. Sit area circuli $\alpha\gamma\delta = A$, circuli $\zeta\eta\vartheta = B$, sector inter rectas $\zeta\beta$ $\beta\vartheta$ et circumferentiam $\zeta\eta\vartheta = C$, figura inter helicem $\alpha\zeta\varepsilon\beta$ et rectam $\alpha\beta = D$, eiusdem pars inter $\zeta\varepsilon\beta$ et $\beta\zeta = E$; est igitur (propos. 21) $D = \frac{1}{3}A$, et $E = \frac{1}{3}C$; ergo $D : E = A : C$. Sed est

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}, \text{ et in his } \frac{A}{B} = \frac{\alpha\beta^2}{\beta\zeta^2}, \text{ atque}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\text{circumf. } B}{\text{circumf. } \zeta\eta\vartheta} = \frac{\text{circumf. } A}{\text{circumf. } \gamma\delta\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\beta\zeta} \text{ (propos. 19); ergo}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{\alpha\beta^2}{\beta\zeta^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{\beta\zeta}, \text{ id est } \frac{D}{E} = \frac{\alpha\beta^3}{\beta\zeta^3}.$$

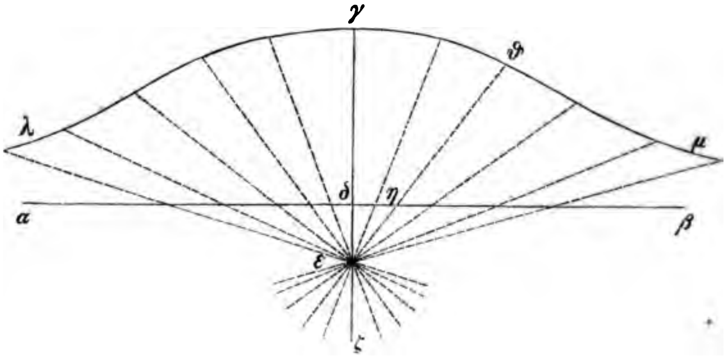
---

tore *Co* 30. καὶ ἐκ ///οῦ A, καὶ ἐκ τοῦ B[1], καὶ ἐκ τε τοῦ B[3]S 31. πρὸς τὸ A. corr. BS

38 *κε'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν τῆς ἕλικος ὑποκειμένης καὶ τοῦ περὶ αὐτὴν κύκλου ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀχθῇ ἡ ΓΖΕΚ, οἵου ἐστὶν ἑνὸς τὸ μεταξὺ τῆς ΒΔΕ γραμμῆς καὶ τῆς ΒΕ εὐθείας χωρίον, τοιούτων ἐστὶν τὸ μὲν μεταξὺ τῆς ΝΜΕ γραμμῆς καὶ τῶν ΝΒΕ εὐθειῶν χωρίον ἑπτά, τὸ δὲ μεταξὺ τῆς ΖΘΝ γραμμῆς καὶ τῶν ΖΒΝ εὐθειῶν ιθ', τὸ δὲ μεταξὺ τῆς ΑΞΖ γραμμῆς καὶ τῶν ΑΒΖ εὐθειῶν λζ (δῆλα γὰρ ταῦτα ἐκ τοῦ προδεδειγμένου θεωρήματος), καὶ ὅτι οἵων ἐστὶν ἡ ΑΒ δ', ἡ μὲν ΖΒ τριῶν, ἡ δὲ ΒΝ δύο, ἡ δὲ ΒΕ ἑνός· καὶ γὰρ τοῦτο δῆλον ἔκ τε τοῦ τῆς γραμμῆς συμπτώματος καὶ τοῦ τὰς ΑΓ ΓΔ ΔΚ ΚΑ περιφερείας ἴσας εἶναι.*

39 *κϛ'. Εἰς τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου παράγεταί τις ὑπὸ Νικομήδους γραμμὴ καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.*

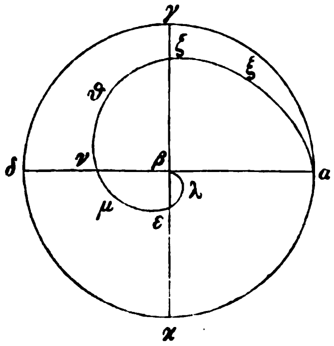
Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔΖ δοθὲν τὸ Ε, καὶ



μένοντος τοῦ Ε σημείου ἐν ᾧ ἐστιν τόπῳ ἡ ΓΔΕΖ εὐθεῖα φερέσθω κατὰ τῆς ΑΔΒ εὐθείας ἑλκομένη διὰ τοῦ Ε ση-

1. $\overline{KE}$ A[1] in marg. (BS) 3. ἡ $\overline{ΓΖ}$ $\overline{ΕΚ}$ AS, coniunx. B 4. τῆς (ante *ΒΔΕ*) add. *Hu* 5. 6. τῶν $\overline{ΝΒ}$ ευθειῶν A(B), corr. S (τῶν *ΝΒ ΒΕ* voluit *Co*) 6. χωρίον ἐπα A, corr. BS 6. 7. τῆς $\overline{ΖΘΗ}$ γραμμῆς ABS, corr. *Co* 7. τῶν *ΖΒ ΒΝ* et 8. τῶν *ΑΒ ΒΖ* voluit *Co* 8. 9. ἐκτετοῦ A(B Paris. 2368), corr. S 9. 10. ἡ *ΑΒ* δ'] ἡ $\overline{ΑΒΔ}$ AB, ἡ $\overline{αβ}$

XXV. Ex hoc igitur apparet, si, helice et circulo circa ipsam positis, recta $\alpha\beta$ ad δ *punctum circumferentiae* producatur, eique perpendicularis ducatur diametrus $\gamma\zeta\varepsilon\varkappa$, ac spatium inter lineam $\beta\lambda\varepsilon$ et rectam $\beta\varepsilon$ pro unitate ponatur, tales *unitates* spatio inter lineam $\nu\mu\varepsilon$ et rectas $\nu\beta$ $\beta\varepsilon$ inesse 7, spatio autem inter lineam $\zeta\vartheta\nu$ et rectas $\zeta\beta$ $\beta\nu$ 19, denique spatio inter lineam $\alpha\xi\zeta$ et rectas $\alpha\beta$ $\beta\zeta$ 37; haec enim ex superiore theoremate manifesta sunt[1]. Item *constat* rectas $\alpha\beta$ $\beta\zeta$ $\beta\nu$ $\beta\varepsilon$ inter sese esse ut 4 : 3 : 2 : 1; nam hoc quoque et ex *spiralis* lineae proprietate (*propos. 19*) et inde manifestum est, quod circumferentiae $\alpha\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\varkappa$ $\varkappa\alpha$ inter se aequales sunt.



XXVI. Ad duplicationem cubi a Nicomede[2] linea quaedam inducitur, quae huiusmodi ortum habet.

Exponatur recta $\alpha\beta$ eique perpendicularis recta $\gamma\delta\zeta$, et in hac sumatur punctum quoddam datum ε, et, cum punctum ε suo loco maneat, recta $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ feratur in recta $\alpha\delta\beta$ per

1) Quia rectae $\alpha\beta$ $\beta\zeta$ $\beta\nu$ $\beta\varepsilon$ inter se sunt ut 4 : 3 : 2 : 1 (propos. 19), et spatia inter spiralem et quamque earum rectarum contenta inter se sunt ut cubi ex ipsis rectis (propos. 22), si spatium inter spiralem $\beta\lambda\varepsilon$ et rectam $\beta\varepsilon$ pro unitate ponitur, tales unitates spatium inter $\nu\mu\varepsilon\lambda\beta$ et $\beta\nu$ habet 8, spatium inter $\zeta\vartheta\nu\mu\varepsilon\lambda\beta$ et $\beta\zeta$ 27, denique spatium inter totam helicem et rectam $\alpha\beta$ 64. Unde illa quae supra posita sunt sponte efficiuntur.

2) Eutocius in Archim. de sphaera et cylindro II p. 146 ed. Torell.: γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος χρείαν. Ac porro Eutocius p. 146—149 Nicomedis et instrumentum et demonstrationem latius exponit.

τεσσάρων S   13. $\overline{K\varsigma}$ A[1] in marg. (BS)   15. καὶ αυτη α πρὸς ὀρθὰς A, καὶ αὕτη α etc. B, corr. S   17. ἡ $\overline{\gamma\delta\zeta}$ εὐθεῖα S *μεῖον οὕτως ὥστε διὰ παντὸς φέρεσθαι τὸ Δ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ μὴ ἐκπίπτειν ἑλκομένης τῆς ΓΔΕΖ διὰ τοῦ Ε. τοιαύτης δὴ κινήσεως γενομένης ἐφ' ἑκάτερα φανερὸν ὅτι τὸ Γ σημεῖον γράψει γραμμὴν οἵα ἐστὶν ἡ ΑΓΜ, καὶ ἔστιν αὐτῆς τὸ σύμπτωμα τοιοῦτον. ὡς ἂν εὐθεῖα προσπίπτῃ τις ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν γραμμήν, τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τε ΑΒ εὐθείας καὶ τῆς ΑΓΜ γραμμῆς ἴσην εἶναι τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· μενούσης γὰρ τῆς ΑΒ καὶ μένοντος τοῦ Ε σημείου, ὅταν γένηται τὸ Δ ἐπὶ τὸ Η, ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῇ ΗΘ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Θ* πεσεῖται· *ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΗΘ. ὁμοίως καὶ ἐὰν ἑτέρα τις ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν γραμμὴν προσπέσῃ, τὴν ἀποτεμνομένην ὑπὸ τῆς γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἴσην ποιήσει τῇ ΓΔ [ἐπειδὴ ταύτῃ ἴσαι εἰσὶν αἱ προσπίπτουσαι]. καλείσθω δέ, φησιν, ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα κανών, τὸ δὲ σημεῖον πόλος, διάστημα δὲ ἡ ΓΔ, ἐπειδὴ ταύτῃ ἴσαι εἰσὶν αἱ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν ΑΓΜ γραμμήν, αὐτὴ δὲ ἡ ΑΓΜ γραμμὴ κοχλοειδὴς πρώτη (ἐπειδὴ καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη καὶ ἡ τετάρτη ἐκτίθεται εἰς ἄλλα θεωρήματα χρησιμεύουσαι).*

40 *κζ'. Ὅτι δὲ ὀργανικῶς δύναται γράφεσθαι ἡ γραμμὴ καὶ ἐπ' ἔλαττον ἀεὶ συμπορεύεται τῷ κανόνι, τουτέστιν ὅτι πασῶν τῶν ἀπό τινων σημείων τῆς ΑΓΘ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν καθέτων μεγίστη ἐστὶν ἡ ΓΔ κάθετος, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΓΔ ἀγομένη κάθετος τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, καὶ ὅτι, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τοῦ κανόνος καὶ τῆς κοχλοειδοῦς ἐάν τις ᾖ εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη τμηθήσεται ὑπὸ τῆς κοχλοειδοῦς, αὐτὸς ἀπέδειξεν ὁ Νικο-*

---

2. *τῆς* $\overline{ΓΔ}$ $\overline{EZ}$ AB, coniunx. S 6. *τις Sca* (*quaepiam Co*) pro *τῆς* 8. *εἶναι*] *ποιεῖ Hu* *τὴν* $\overline{ΓΔ}$ *ευθειαν* A(BS), corr. man. rec. in S 11. *πεσεῖται* add. *Hu* 14. 15. *ἐπειδὴ — προσπίπτουσαι* ex proximis inepte huc translata del. *Hu* 17. *αἱ* om. AB[1]S, add. B[2] 18. *κογχοειδὴς* A[1], corr. A[2]BS 19. *ἐκτίθενται Hu* 21. $\overline{KZ}$ A[1] in marg. (BS) 22. *συμπορεύεσθαι* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 25. *δὲ η εγγειον* A, spirit. et acc. add. B, corr. S 27. *κοχλοειδοῦς* AB[2]

punctum ε attracta ita, ut punctum δ semper in recta $\alpha\beta$ moveatur neque, dum recta $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ per punctum ε attrahitur, excidat[3]. Itaque cum huiusmodi motus in utramque partem fiat, punctum γ apparet describere lineam qualis est $\lambda\gamma\mu$, cuius proprietas haec est. Utcunque recta quaedam a puncto ε ad lineam ducitur, eius rectae pars inter rectam $\alpha\beta$ et lineam $\lambda\gamma\mu$ abscissa aequalis est rectae $\gamma\delta$; nam cum et recta $\alpha\beta$ et punctum ε maneant, si punctum δ pervenerit in punctum η, recta $\gamma\delta$ cum $\eta\vartheta$ congruet et punctum γ cadet in punctum ϑ; ergo aequales sunt rectae $\gamma\delta$ $\eta\vartheta$. Similiter, si alia recta a puncto ε ad lineam ducetur, haec partem inter lineam et rectam $\alpha\beta$ abscissam aequalem rectae $\gamma\delta$ efficiet. Et vocetur, inquit[4], recta $\alpha\beta$ canon, punctum ε polus, recta $\gamma\delta$ intervallum, quoniam huic rectae aequales sunt quaecunque ad lineam $\lambda\gamma\mu$ *eo quo diximus modo* ducuntur; ipsa autem $\lambda\gamma\mu$ linea conchoides prima *appelletur* (quoniam etiam secunda et tertia et quarta exponuntur, quae ad alia theoremata utiles sunt).

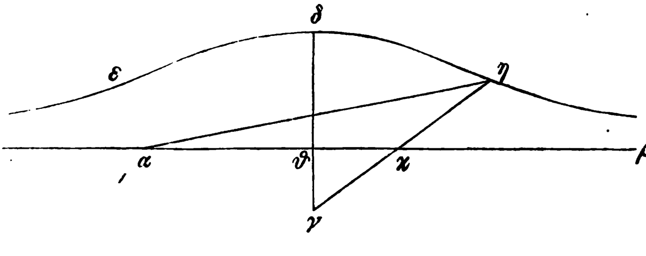
XXVII. Sed eam lineam instrumenti ope describi posse, eamque propius semper ad canonem accedere, id est, omnium perpendicularium quae a quibuscunque lineae $\lambda\gamma\vartheta\mu$ punctis ad rectam $\alpha\beta$ ducuntur maximam esse $\gamma\delta$, et semper perpendicularem quae propius $\gamma\delta$ ducitur maiorem esse remotiore, et, si recta quaedam in spatium inter canonem et conchoidem incidat, hanc productam a conchoide secari, ipse

3) Rectae $\gamma\delta\varepsilon\zeta$ motum, qualis animo scriptoris obversatur, in figura lineis per puncta expressis significavimus.

4) Eutoc. p. 147: *γραφήσεταί τις γραμμή, οἵα ἐστὶν ἡ ΛΜΝ* (apud Pappum *ἡ ΛΓΜ*), *ἥντινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῆ πρώτην γραμμήν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ΕΚ* (apud Pappum *τὸ ΓΔ*) *μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ Δ* (apud Pappum *τὸ Ε*).

(om. B[1]) S, sed λ expunxit et γ superscr. prima, ut videtur, manus in A, item proximo versu ἠ] *διαχθῇ* coni. *Hu* 28. *ὑπέδειξεν* ABS, corr. *Hu* *μήδης, καὶ ἡμεῖς ἐν τῷ εἰς τὸ ἀνάλημμα Διοδώρου, τρίχα τεμεῖν τὴν γωνίαν βουλόμενοι, κεχρήμεθα τῇ προειρημένῃ γραμμῇ.*

41 *Διὰ δὴ τῶν εἰρημένων φανερὸν ὡς δυνατόν ἐστιν γωνίας δοθείσης ὡς τῆς ὑπὸ ΗΑΒ καὶ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς τοῦ Γ διάγειν τὴν ΓΗ καὶ ποιεῖν τὴν ΚΗ μεταξὺ τῆς γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ.*



Ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι, τουτέστιν τῇ ΔΘ, κανόνι δὲ τῷ ΑΒ γεγράφθω κοχλοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ ΕΔΗ· συμβάλλει ἄρα τῇ ΑΗ διὰ τὸ προλεχθέν. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ δοθείσῃ.

42 *κη'. Τινὲς δὲ τῆς χρήσεως ἕνεκα παρατιθέντες κανόνα τῷ Γ κινοῦσιν αὐτόν, ἕως ἂν ἐκ τῆς πείρας ἡ μεταξὺ ἀπολαμβανομένη τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ τῆς ΕΔΗ γραμμῆς ἴση γένηται τῇ δοθείσῃ· τούτου γὰρ ὄντος τὸ προκείμενον ἐξ ἀρχῆς δείκνυται (λέγω δὲ κύβος κύβου διπλάσιος εὑρίσκεται). πρότερον δὲ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον λαμβάνονται, ὧν ὁ μὲν Νικομήδης τὴν κατασκευὴν ἐξέθετο μόνον, ἡμεῖς δὲ καὶ τὴν ἀπόδειξιν ἐφηρμόσαμεν τῇ κατασκευῇ τὸν τρόπον τοῦτον.*

---

1. *ἀνάλημμα*] *α'* vel *κα' λῆμμα* vel alium quempiam numerum, qui in *ανα* corrumpi facile potuerit, coni. *Hu* 4. *τῶν προειρημένων* S 11. *κοχλοειδής* ABS, sed in A prima, ut videtur, manus *λ* expunxit et *γ* superscr. *πρωτηι* A, corr. BS 12. *διὰ τὸ προδειχθὲν* Eutoc.

Nicomedes demonstravit[5]; et nos in *commentario* ad Diodori analemma[6], cum angulum tripartito secare instituerenus, illa linea usi sumus.

Iam ex his quae diximus manifestum est, si angulus, velut $\eta\alpha\beta$, et punctum extra angulum, velut γ, data sint, rectam $\gamma\eta$ ita duci posse, ut eius pars $\varkappa\eta$, quae est inter lineam *conchoidem* et rectam $\alpha\beta$, aequalis sit datae rectae[1]). Prop. 23

Ducatur a puncto γ ad rectam $\alpha\beta$ perpendicularis $\gamma\vartheta$ et *usque eo* producatur, ut $\vartheta\delta$ datae rectae aequalis sit, et polo γ ac dato intervallo, id est $\delta\vartheta$, et canone $\alpha\beta$ describatur linea conchoides prima $\varepsilon\delta\eta$; haec igitur, ut statim diximus, cum recta $\alpha\eta$ concurret. Concurrat in puncto η, et iungatur recta $\gamma\eta$; erit igitur *eius pars* $\varkappa\eta$ aequalis datae rectae.

XXVIII. Sunt tamen qui *commodiorem* usum sequentes regulam puncto γ apponant ac moveant, donec experiendo recta inter rectam $\alpha\beta$ et lineam $\varepsilon\delta\eta$ abscissa aequalis datae facta sit, quod cum ita se habeat, demonstratur id quod ab initio (*XXVI*) propositum est (scilicet cubus cubi duplus invenitur). Sed prius, datis duabus rectis duae mediae in continua proportione sumuntur, quarum constructionem tantum Nicomedes exposuit, nos autem demonstrationem quoque ad constructionem aptavimus hunc in modum.

5) Vide Eutoc. p. 147 sq.

6) Libri mathematici titulus ἀνάλημμα iure suspectus videatur, quare nos in adnot. ad Graeca coniecimus ad Diodori lemma primum vel unum et vicesimum vel aliud quotumcunque hunc Pappi commentarium scriptum esse.

1) Idem Nicomedis problema exstat apud Eutoc. p. 148 sq.

---

p. 149, attamen apud Pappum τὸ προλεχθὲν recte scriptum esse videtur, quoniam hic illud Nicomedis, quod est apud Eutocium p. 148, non demonstravit, sed tantummodo commemoravit (supra p. 244, 26) 13. ἐπιζεύχθω A, corr. BS 15. $\overline{KH}$ A[1] in marg. (BS) παρατεθέντες ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 16. 17. ἀπολαμβανομένη A[2] ex ἀπολαμβάνομεν ἡ 19. λέγω — εὑρίσκεται interpolata esse videntur 22. μόνον *Hu* (*tantum Co*) pro μόνην

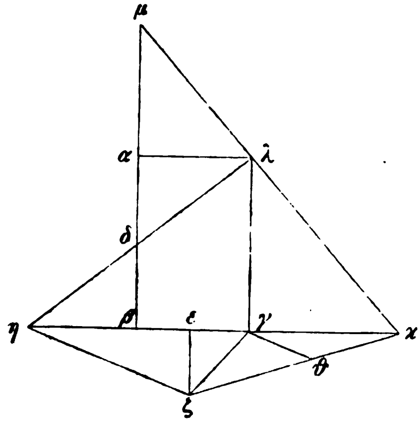
43 *Δεδόσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΑ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς Δ Ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ ΔΑ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η, τῇ δὲ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ ΓΖ ἴση οὖσα τῇ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν ΚΓΘ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ζ διήχθω ἡ ΖΘΚ ποιοῦσα ἴσην τὴν ΘΚ τῇ ΑΔ ἢ τῇ ΓΖ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς), καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΚΓ, ἡ ΚΓ πρὸς ΜΑ, καὶ ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΔ.*

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ τέτμηται δίχα τῷ Ε καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΚΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΚ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΕΖ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ,

---

1 sqq. *Δεδόσθωσαν* etc. usque ad finem cap. 43 item e Nicomedis libro *περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν* repetita habet Eutocius in Archimedis de sphaera et cylindro librum II p. 149 ed. Torell. 1. *αἱ ΓΑ ΑΑ* ABS Eutocius, et sic ubique in hac demonstratione *Α* occurrit, ubi rectius Pappus III cap. 24 *Δ* habet, et vice versa *Δ* pro *Α* 2. *κατὰ τὸ συνεχὲς* B[1] Eutoc., *τὸ* om. AS, expunx. B[2] 3. *συμπεπληρώσθω*] hinc usque simillimus est demonstrationis contextus ei qui apud Pappum supra III cap. 24 legitur *τὸ ΑΒΓΑ* Eutoc., *τὸ ΑΒΓΔ* ABS 4. *τοῖς ΔΕ* A, *τοῖς δὲ* B, distinx. S 5. *ἐπιζευχθεισαν* (sine acc.) A, corr. BS 7. *προσβεβλήσθω* ABS Eutoc., *ἐπεζεύχθω* Pappus supra p. 60, 2 8. *καὶ* (ante *γωνίας*) add. Eutoc. et Pappus p. 60, 3 9. *ἀποδοθέντος* AB, distinx. S 11. *κοχλοειδοῦς* ABS, sed in A prima, ut videtur, manus *λ* expunxit et *γ* superscr. 15. *Ἐπεὶ* ABS Eutoc., *Ἐπεὶ γὰρ* Pappus p. 60, 20 16. *ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ* Pappus p. 60, 21 Eutoc., *ἄρα ὑπὸ ΒΓΚ* ABS *τοῦ ἀπὸ ΓΕ* Pappus l. c. Eutoc., *τοῦ ΓΕ* AB, *τοῦ γ* S 18. *μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ* Pappus p. 60, 23, *μετὰ τῶν ἀπὸ ΑΕΖ* ABS, *μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕ ΕΖ* Eutoc.

Datae enim sint duae rectae $\gamma\lambda$ $\lambda\alpha$ inter se perpendiculares, quarum duae mediae continuo proportionales inveniantur. Prop. 24*)



Compleatur $\alpha\beta\gamma\lambda$ parallelogrammum, et rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ in punctis δ ε bifariam secentur, et iuncta $\lambda\delta$ producatur rectaeque $\gamma\beta$ productae occurrat in puncto η, et rectae $\beta\gamma$ perpendicularis *ducatur* $\varepsilon\zeta$, *cuius punctum* ζ *ita sumatur, ut* iuncta $\gamma\zeta$ aequalis sit rectae $\alpha\delta$, et iungatur $\zeta\eta$ eique parallela *ducatur* $\gamma\vartheta$, et *productâ* $\beta\gamma$ *ad punctum* $\varkappa$ (*adhuc definiendum*), cum *datus* sit angulus $\varkappa\gamma\vartheta$ **), a dato puncto ζ recta $\zeta\vartheta\varkappa$ ita ducatur, ut $\vartheta\varkappa$ aequalis sit rectae $\alpha\delta$ sive $\gamma\zeta$ (hoc enim fieri posse per conchoidem lineam *propos.* 23 demonstratum est), et iuncta $\varkappa\lambda$ producatur occurratque rectae $\beta\alpha$ productae in puncto μ; dico esse $\lambda\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\lambda$.

Quoniam $\beta\gamma$ bifariam secta est in puncto ε eique *in eâdem rectâ* addita est $\gamma\varkappa$, est igitur (*elem.* 2. 6)

$\beta\varkappa \cdot \varkappa\gamma + \gamma\varepsilon^2 = \varepsilon\varkappa^2$. Commune addatur $\varepsilon\zeta^2$; est igitur

$\beta\varkappa \cdot \varkappa\gamma + \gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2 = \varepsilon\varkappa^2 + \varepsilon\zeta^2$, id est

$\beta\varkappa \cdot \varkappa\gamma + \gamma\zeta^2 = \varkappa\zeta^2$. Et quoniam *propter parallelas* $\alpha\lambda$ $\beta\varkappa$ est

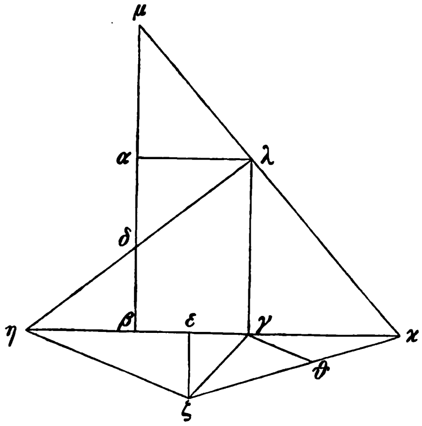
$\mu\alpha : \alpha\beta = \mu\lambda : \lambda\varkappa$, et *propter parallelas* $\mu\beta$ $\lambda\gamma$

$\mu\lambda : \lambda\varkappa = \beta\gamma : \gamma\varkappa$, est igitur etiam

*) Conf. supra III propos. 5, VIII, Eutoc. p. 149.

**) Quoniam rectanguli $\alpha\beta\gamma\lambda$ latera $\alpha\lambda$ $\lambda\gamma$ positione et magnitudine data sunt et $\alpha\delta$ dimidia $\alpha\beta$ est, ex constructione igitur triangulum $\eta\beta\delta$ triangulo $\lambda\alpha\delta$ aequale et simile est; ergo, quia recta est $\lambda\delta\eta$, punctum η datum est. Sed propter dat. 43 triangulum $\varepsilon\gamma\zeta$ specie datum est, et, quia $\varepsilon\gamma$ $\gamma\zeta$ magnitudine datae sunt, datum est etiam punctum ζ. Ergo propter dat. 44 angulus $\varepsilon\eta\zeta$ datus est, itaque etiam, qui huic aequalis est, angulus $\varkappa\gamma\vartheta$.

οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ. καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΒΓ διπλῆ ἡ ΓΗ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ΜΔ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΗΖ ΓΘ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΘΚ [ἐπεὶ καὶ τῇ ΓΖ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ]· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΖΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΜΔ τῷ ἀπὸ ΖΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ ΜΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΜΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΖ (ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ)· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΜΑ τῷ ὑπὸ ΒΚΓ· ὡς ἄρα ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ πρὸς ΒΚ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ· ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, *ἡ ΜΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ, καὶ ἡ ΑΜ πρὸς ΑΔ.*



44 *κθ'. Τούτου δειχθέντος πρόδηλον ὅπως δεῖ κύβου δοθέντος κύβον ἄλλον εὑρεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον.*

Ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος τῆς Α εὐθείας πρὸς τὴν Β, καὶ τῶν Α Β δύο μέσαι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εἰλήφθωσαν αἱ Γ Δ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς Α κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς Γ κύβον· τοῦτο γὰρ δῆλον ἐκ τῶν στοιχείων.

45 *λ'. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις*

2. post *ἡ ΓΗ* add. *ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔ* Eutoc. 8. *τὰς ΗΖ ΓΘ* Pappus p. 62, 1 Eutoc., *ἡ* $\overline{ZΓΘ}$ AB[1], $\overline{ηζ}$ $\overline{γθ}$ B[3]S 12. *ἐπεὶ* — 14. *ἡ ΑΔ*] conf. supra ad p. 62, 2. 3 17. *τὸ ὑπὸ ΒΜΑ* Pappus p. 62, 5

$\mu\alpha : \alpha\beta = \beta\gamma : \gamma\varkappa$. Et est $\alpha\beta = 2\,\alpha\delta$, et $\beta\gamma = \frac{1}{2}\eta\gamma$ (*quia* $\eta\beta = \alpha\lambda = \beta\gamma$); ergo erit etiam

$\mu\alpha : \alpha\delta = \eta\gamma : \gamma\varkappa$. Sed propter parallelas $\eta\zeta\ \gamma\vartheta$ est $\eta\gamma : \gamma\varkappa = \zeta\vartheta : \vartheta\varkappa$; ergo etiam componendo

$\mu\delta : \alpha\delta = \zeta\varkappa : \vartheta\varkappa$. Sed ex hypothesi est $\alpha\delta = \vartheta\varkappa$; ergo etiam $\mu\delta = \zeta\varkappa$, et

$\mu\delta^2 = \varkappa\zeta^2$. Et *propter elem. 2, 6* est

$\mu\delta^2 = \beta\mu\cdot\mu\alpha + \alpha\delta^2$, et *supra* demonstratum est

$\varkappa\zeta^2 = \beta\varkappa\cdot\varkappa\gamma + \gamma\zeta^2$. Iam in his est $\alpha\delta^2 = \gamma\zeta^2$ (nam ex hypothesi est $\alpha\delta = \gamma\zeta$); ergo etiam *subtrahendo*

$\beta\mu\cdot\mu\alpha = \beta\varkappa\cdot\varkappa\gamma$, id est *proportione facta* (*elem. 6, 16*)

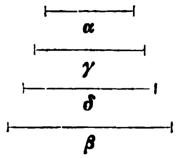
$\mu\beta : \beta\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha$. Sed *propter parallelas* $\mu\beta\ \lambda\gamma$ est $\mu\beta : \beta\varkappa = \lambda\gamma : \gamma\varkappa$; ergo etiam

$\lambda\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha$. Sed *propter parallelas* $\beta\varkappa\ \alpha\lambda$ est $\mu\beta : \beta\varkappa = \mu\alpha : \alpha\lambda$, *ideoque*

$\gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\lambda$; ergo etiam

$\lambda\gamma : \gamma\varkappa = \gamma\varkappa : \mu\alpha = \mu\alpha : \alpha\lambda$.

XXIX. Hoc demonstrato apparet, quomodo, dato cubo, Prop. 25
alium cubum iuxta datam proportionem invenire oporteat.



Sit enim data proportio $\alpha : \beta$, et rectarum $\alpha\ \beta$ duae mediae in continua proportione sumantur $\gamma\ \delta$; erit igitur $\alpha : \beta = \alpha^3 : \gamma^3$; hoc enim manifestum est ex elementis (*5 def. 11. 8, 12. 11, 33*).

XXX. Ad circuli quadraturam a Dinostrato[1], Nicomede

1) Conf. Chasles, *Aperçu historique* etc., p. 28 versionis German., Bretschneider, *Geometrie vor Euklides*, p. 96, Herm. Hankel, *Geschichte der Mathematik*, p. 151.

Eutoc., τὸ ἀπὸ $\overline{BMA}$ ABS 21. ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ Pappus p. 62, 9. 10, ἡ ΚΓ πρὸς ΑΜ Eutoc. V², ἡ $\overline{A\Gamma}$ πρὸς $\overline{\Gamma K}$ ABSV 22. καὶ ante ὡς ἄρα add. Pappus p. 62, 10 Eutoc. V² 22. 23. ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ — ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ Pappus p. 62, 11. 12, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ Eutoc., om. ABS 26. $\overline{K\Theta}$ A¹ in marg. (BS) 29. τῶν $\overline{AB}$ AS, distinx. B 30. αἱ $\overline{\Gamma\Delta}$ A, distinx. BS 33. $\bar{\lambda}$ A¹ in marg. (BS) *ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ᾽ αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.*

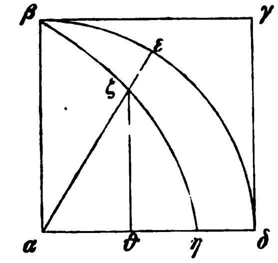
Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ *περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β σημείῳ φερομένῳ κατὰ τῆς ΒΑ συνακολουθείτω,* καὶ *ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἥ τε ΑΒ κινουμένη ὁμαλῶς τὴν ὑπὸ ΒΑΔ γωνίαν, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον τὴν ΒΕΔ* περιφέρειαν, *διανυέτω, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΒΑ εὐθεῖαν παροδευέτω, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον κατὰ τῆς ΒΑ φερέσθω. συμβήσεται δῆλον τῇ ΑΔ εὐθείᾳ ἅμα ἐφαρμόζειν ἑκατέραν τήν τε ΑΒ καὶ τὴν ΒΓ. τοιαύτης δὴ γινομένης κινήσεως τεμοῦσιν ἀλλήλας ἐν τῇ φορᾷ αἱ ΒΓ ΒΑ εὐθεῖαι κατά τι σημεῖον αἰεὶ συμμεθιστάμενον αὐταῖς, ὑφ᾽ οὗ σημείου γράφεταί τις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τε ΒΑΔ εὐθειῶν καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας γραμμὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη, οἵα ἐστὶν ἡ ΒΖΗ, ἣ καὶ χρειώδης εἶναι δοκεῖ πρὸς τὸ τῷ δοθέντι κύκλῳ τετράγωνον ἴσον εὑρεῖν. τὸ δὲ ἀρχικὸν αὐτῆς σύμπτωμα τοιοῦτόν ἐστιν. ἥτις γὰρ ἂν διαχθῇ τυχοῦσα πρὸς* τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΑΖΕ, ἔσται ὡς ὅλη ἡ *περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΘ· τοῦτο γὰρ ἐκ τῆς γενέσεως τῆς γραμμῆς φανερόν ἐστιν.*

46 *λα´. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ*

---

1. *ὑπὸ νικοστράτου* B *νικοδήμου* AB[3], *νικομήδου* B[1] *To*, corr. S 5. *τὸ* $\overline{AB}$ $\overline{Γ\Delta}$ AS, coniunx. B *καὶ* add. *To* auctore *Co* 6. *ἡ* add. *Hu* 9. *τῶι* $\overline{B}$ A *To*, *τὸ* $\bar{\beta}$ B, *τῷ* et *τὸ* $\bar{\beta}$ Paris. 2368 S *σημεῖον φέρον ἐν ὧι* ABS, corr. *To* *κατὰ τῆς ΒΑ* *To* pro *κατὰ τῆς* $\overline{B}$ 10. *συνακολουθεῖ τῶι* AS, *συνακολουθεῖ τὸ* B, corr. *Sca To* *καὶ* add. *To* *κινουμένης* AB[3]S, corr. B[1] 12. *περιφέρειαν* add. *To* auctore *Co* 13. *παροδευέτω Hu*, *|||||ευέτω* A (sed initio vestigia litterarum *παρ* comparent), ...*ευέτω* B[1]S, *παραλευέτω* B[3], *παραβεβέτω* e "cod. Vat." affert atque inde *παραβαινέτω* scribit *To* 14. *δῆλον*] *δὴ* vel *δηλονότι* coni. *Hu* *εκατερα* A, *ἑκατέρα* B, corr. S 20. *ἣ* add. *Hu* *χρειῶδες* ABS, corr. *To* auctore *Co* 22. 23. *πρὸς τὴν —*

aliisque nonnullis recentioribus linea quaedam adsumpta est, quae ex ipsius proprietate nomen accepit. Quadratix enim ab illis vocatur et huiusmodi ortum habet.



Exponatur quadratum $\alpha\beta\gamma\delta$, et circa centrum α circumferentia $\beta\varepsilon\delta$ describatur, et recta quidem $\alpha\beta$ ita moveatur, ut punctum α maneat ac β feratur in circumferentia $\beta\varepsilon\delta$, recta autem $\beta\gamma$, parallela semper ipsi $\alpha\delta$ manens, punctum β, dum fertur in $\beta\alpha$ *), comitetur, atque eodem tempore et recta $\alpha\beta$ aequabiliter progrediens angulum $\beta\alpha\delta$, id est punctum β circumferentiam $\beta\varepsilon\delta$, percurrat, et recta $\beta\gamma$ ipsam $\beta\alpha$ praetervehatur, id est punctum β rectam $\beta\alpha$ permeet. Eveniet igitur, ut simul et $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ cum recta $\alpha\delta$ congruant. Itaque, dum huiusmodi motus peragitur, rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ in eo motu se invicem secabunt in puncto aliquo semper cum ipsis progrediente, a quo puncto in spatio inter rectas $\beta\alpha$ $\alpha\delta$ et circumferentiam $\beta\varepsilon\delta$ linea quaedam ad easdem partes concava, qualis est $\beta\zeta\eta$, describitur, quae quidem utilis esse videtur ad quadratum dato circulo aequale inveniendum. Principalis autem eius proprietas haec est, ut, si quaelibet recta, velut $\alpha\zeta\varepsilon$, ad circumferentiam ducatur, sit ut tota circumferentia $\beta\varepsilon\delta$ ad $\varepsilon\delta$, ita recta $\beta\alpha$ ad $\zeta\vartheta$; hoc enim ex ortu lineae manifestum est.

XXXI. Sed ea linea Sporo his de causis iure displicet [1]).

*) Punctum β, pro utriusque rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ peculiari motu, diverso sensu accipiendum esse apparet; est enim I: rectae $\alpha\beta$ terminus ac fertur in circuli quadrante, II: rectae $\beta\gamma$ initium ac fertur in $\beta\alpha$, totam $\beta\gamma$ parallelam sibi ipsi semper manentem secum trahens.

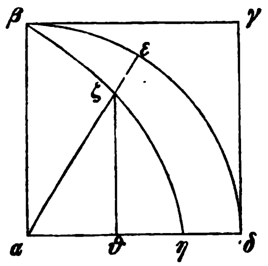
1) Haec argumenta, quae contra lineae constructionem afferuntur, non ita magni momenti esse demonstrat Bretschneider l. c.

ὅλη η add. *Hu* auctore *Co* (*εὐθεῖα πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ BZE, ἔσται ὅλη ἡ BEΔ* add. *To*) 24. *ἡ BA*] *ἡ BA περιφέρεια* AB, *ἡ BΓ* *To*, corr. S *Co* 26. *λα* (sic) A[1] in marg. (S), om. B *αὐτῷ* 'propter proximum *λαμβάνει*: conf. p. 255 adnot. 2) coni. *Hu* *ταῦτα. πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ' ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατόν, δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆσαι μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων ἀνάγκη εἶναι. ἐπεὶ πῶς οἷόν τε συναποκαταστῆναι τάχεσιν ἀκρίτοις χρώμενα, πλὴν εἰ μὴ ἂν κατὰ τύχην ποτὲ συμβῇ; τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον; ἔπειτα δὲ τὸ πέρας αὐτῆς ᾧ χρῶνται πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, τουτέστιν καθ' ὃ τέμνει σημεῖον τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, οὐχ εὑρίσκεται. νοείσθω δὲ ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ λεγόμενα καταγραφῆς· ὁπόταν γὰρ αἱ ΓΒ ΒΑ φερόμεναι συναποκατασταθῶσιν, ἐφαρμόσουσιν τῇ ΑΔ καὶ τομὴν οὐκέτι ποιήσουσιν ἐν ἀλλήλαις· παύεται γὰρ ἡ τομὴ πρὸ τῆς ἐπὶ τὴν ΑΔ ἐφαρμογῆς ἥπερ τομὴ πέρας αὖ ἐγένετο τῆς γραμμῆς, καθ' ὃ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ συνέπιπτεν. πλὴν εἰ μὴ λέγοι τις ἐπινοεῖσθαι προσεκβαλλομένην τὴν γραμμήν, ὡς ὑποτιθέμεθα τὰς εὐθείας, ἕως τῆς ΑΔ· τοῦτο δ' οὐχ ἕπεται ταῖς ὑποκειμέναις ἀρχαῖς, ἀλλ' ὡς ἂν ληφθείη τὸ Η σημεῖον προειλημμένου τοῦ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν εὐθεῖαν λόγου. χωρὶς δὲ τοῦ δοθῆναι τὸν λόγον τοῦτον οὐ χρὴ τῇ τῶν εὑρόντων ἀνδρῶν δόξῃ πιστεύοντας παραδέχεσθαι τὴν γραμμὴν μηχανικωτέραν πως οὖσαν [καὶ*

---

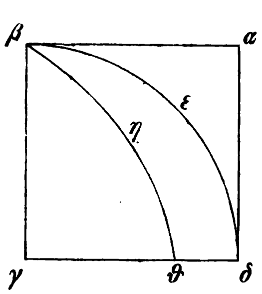
2. post *δυνατὸν* add. *φησὶ To* (*inquit Co*) 4. *ἐπὶ τὸ $\overline{ΔΕ}$ $\overline{Η}$ ἴσωι* A, *ἐπὶ τὸ $\overline{δεη}$ ἴσῳ* B, corr. S 5. *συναποκαταστῆναι* ABS, corr. *Hu* *τὸν λόγον* S, *τόλον* et initio superscr. *ὸν* A (prima manu), unde *τὸ ὅλον* B et Torelli "cod. Vat." 6. 7. *ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ λόγῳ* coni. *Hu* 7. *ἀνάγκη εἶναι Hu*, *ἀναγκαῖον* ABS, *ἀναγκαῖον εἶναι To* (omisso posthac *ἐπεὶ*) 7. 8. *ἐπει πως οιονται* (sine acc.) A, *πῶς οἴονται γὰρ To*, corr. BS 8. *συναποκαταστῆσαι* coni. *Hu* *ἀκράτοις To* invitis ABS *χρώμενα* AB, *χρώμεθα* S, *χρώμενον* coni. *Hu* 9. *ἂν* del. *To* (probat ac *συμβαίη* coni. *Hu*) *ποτὲ To* pro *τότε* 13. *γὰρ* add. *Hu* 14. *τὴν $\overline{ΑΔ}$* ABS, *ἐπὶ τὴν ΑΔ To*, corr. *Hu* 16. *πρὸ To* auctore *Co* pro *πρὸς* *αὖ Hu* pro *ἂν* 19. *ὑπο τε θέμεθα* A, corr. BS 20. *ἀλλ' ὡς δ' ἂν* AB *To*, *ἄλλως δ' ἂν* S, corr. *Hu* 21. 22. *προειλῆφθαι δεῖ τὸν — λόγον* voluit *Co* cum vertit: *sed utcumque sumatur*

Primum enim, *inquit*, ad quod linea utilis esse videtur, id in hypothesi iste[2]) praesumit. Quomodo enim, si duo puncta a β moveri coeperint, efficias, ut alterum per rectam ad α, alterum per circumferentiam ad δ eodem tempore deducatur, nisi prius proportionem rectae $\alpha\beta$ ad circumferentiam cognoveris? Nam in eadem proportione etiam celeritates motuum esse oportet. Nempe quomodo *illa puncta,* celeritate motuum non definita, *eo quo diximus* deduci possunt, nisi aliquando casu fortuito id contingat? An vero id non absurdum est? Praeterea lineae terminus, quem ad quadraturam circuli adhibent, id est punctum, in quo linea rectam $\alpha\delta$ secat, nequaquam invenitur. Intellegantur autem haec quae dicimus in figura proposita. Nam si rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ simul *ad finem motus* deductae erunt, cum ipsa $\alpha\delta$ congruent neque amplius sese invicem secabunt. Desinunt enim secari, antequam cum $\alpha\delta$ congruunt, et tamen hanc ipsam sectionem *isti voluerunt* terminum lineae esse, in quo cum recta $\alpha\delta$ concurreret. Nisi forte quis dicat *ab extremo sectionis puncto* intellegi lineam usque ad $\alpha\delta$, *proinde* ac rectas *lineas* constituimus, produci; quod quidem ex iis quae initio supposita sunt minime sequitur, sed hoc *potius,* punctum η sumi non posse, nisi prius proportio circumferentiae ad rectam sumpta sit. Haec igitur proportio nisi data sit, cavendum est ne virorum qui *lineam* invenerunt auctoritati obsequentes *constructionem* eius admittamus, quippe quae ad mechanicam magis rationem accedat [et



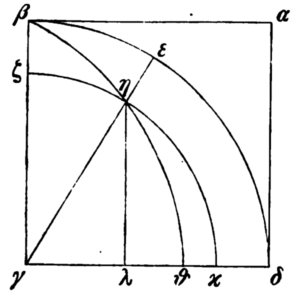
2) Dinostratumne an Nicomedem an alium quempiam Sporus hoc loco dixerit, incertum est.

punctum η, praecedere debet proportio circumferentiae ad rectam lineam, et similiter *To: ratio circumferentiae ad rectam utique praesumpta est,* id est προείληπται ὁ — λόγος 23. οὐ *Hu*, η A, ἢ BS, ἀδύνατον. ἢ *To* 24. καὶ — p. 256, 1. μηχανικοῖς interpolatori tribuit *Hu* *εἰς πολλὰ προβλήματα χρησιμεύουσαν τοῖς μηχανικοῖς*]. *ἀλλὰ πρότερον παραδεκτέον ἐστὶ τὸ δι᾽ αὐτῆς δεικνύμενον πρόβλημα.*



47 *Τετραγώνου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τῆς μὲν περὶ τὸ κέντρον τὸ Γ περιφερείας τῆς ΒΕΔ, τῆς δὲ ΒΗΘ τετραγωνιζούσης γινομένης, ὡς προείρηται, δείκνυται, ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΘ εὐθεῖαν. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἤτοι πρὸς μείζονα ἔσται τῆς ΓΘ ἢ πρὸς ἐλάσσονα.*

48 *Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τὴν ΓΚ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια ἡ ΖΗΚ γεγράφθω τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Η, καὶ κάθετος ἡ ΗΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ, τουτέστιν ἡ ΓΔ, πρὸς τὴν ΓΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗΚ περιφέρειαν* (*ὡς γὰρ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν*), *φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ. καὶ ἐπειδὴ διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἐστιν ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΛ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗΚ πρὸς τὴν ΗΚ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΒΓ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΛ. καὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΚ περιφέρεια τῇ ΗΛ εὐθείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς μείζονα τῆς ΓΘ.*



49 *λβ΄. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὴν ΚΓ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια*

ad multa problemata sit mechanicis utilis]. Sed primum illud problema quod per lineam *quadratricem* demonstrari *diximus* (*XXX*) tradamus.

Si enim quadratum sit $\alpha\beta\gamma\delta$, et circumferentia $\beta\varepsilon\delta$ circa centrum γ et linea $\beta\eta\vartheta$ quadratrix, ut supra exposuimus, ducta sit, demonstratur esse ut circumferentiam $\beta\varepsilon\delta$ ad rectam $\beta\gamma$, ita rectam $\beta\gamma$ ad $\gamma\vartheta$. Si enim non est, erit *ut circumferentia* $\beta\varepsilon\delta$ *ad rectam* $\beta\gamma$, ita $\beta\gamma$ aut ad maiorem quam $\gamma\vartheta$ aut ad minorem. Prop. 26*)

Sit primum, si fieri possit, ad maiorem, *velut* $\gamma\varkappa$, et circa centrum γ describatur circumferentia $\zeta\eta\varkappa$, quae lineam *quadratricem* in puncto η secet, et *ducatur* perpendicularis $\eta\lambda$, et iuncta $\gamma\eta$ producatur ad ε *punctum* $\beta\varepsilon\delta$ *circumferentiae*. Iam quia *ex hypothesi*, ut $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad rectam $\beta\gamma$, ita est $\beta\gamma$, id est $\gamma\delta$, ad $\gamma\varkappa$, atque ut $\gamma\delta$ ad $\gamma\varkappa$, ita $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad $\zeta\eta\varkappa$ circumferentiam — nam circulorum circumferentiae inter se sunt ut diametri [1]) — apparet circumferentiam $\zeta\eta\varkappa$ rectae $\beta\gamma$ aequalem esse. Et quia propter lineae proprietatem (*XXX*) ut circumferentiae $\beta\varepsilon\delta$ $\varepsilon\delta$, ita inter se sunt rectae $\beta\gamma$ $\eta\lambda$, ergo etiam ut circumferentiae $\zeta\eta\varkappa$ $\eta\varkappa$, ita inter se sunt rectae $\beta\gamma$ $\eta\lambda$. Et demonstravimus circumferentiam $\zeta\eta\varkappa$ rectae $\beta\gamma$ aequalem esse; itaque circumferentia $\eta\varkappa$ rectae $\eta\lambda$ aequalis est, quod quidem absurdum. Ergo non est ut $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad rectam $\beta\gamma$, ita $\beta\gamma$ ad maiorem quam $\gamma\vartheta$.

XXXII. Sed nego etiam ad minorem. Si enim fieri possit, sit ad $\gamma\varkappa$, et circa centrum γ describatur circumferentia

*) Conf. Bretschneider l. c. p. 153 sq.

1) Hoc theorema exstat V propos. 11 et VIII propos. 22; simul autem scriptor tacite efficit circulorum arcus quibus aequales anguli insistunt inter se esse ut radios. Vide infra propos. 36 adnot. 1.

---

2. ἀλλὰ *Hu*, πολὺ ABS (πολὺ δὲ voluit *Co*, item δὲ post πρότερον add. *To*) παραδοτέον coni. *Hu* 4. 5. τοῦ $\overline{AB\Gamma\Delta}$ *Co* pro τοῦ $\overline{AB\Gamma}$ 7. τῆς δὲ $BH\Theta$ *To* pro τῆς δὲ $\overline{BE\Theta}$ 12. 13. τῆς $\overline{\Gamma\Theta H}$ προσεκλάσσονα AB[1], corr. B[2]S 28. ὡς ἡ $\overline{B\Delta}$ A, sed *E* superscr. prima m. 35. $\overline{AB}$ A[1] in marg. (S), om. B

ad multa problemata sit mechanicis utilis]. Sed primum illud problema quod per lineam *quadratricem* demonstrari *diximus* (*XXX*) tradamus.

Si enim quadratum sit $\alpha\beta\gamma\delta$, et circumferentia $\beta\varepsilon\delta$ circa centrum γ et linea $\beta\eta\vartheta$ quadratrix, ut supra exposuimus, ducta sit, demonstratur esse ut circumferentiam $\beta\varepsilon\delta$ ad rectam $\beta\gamma$, ita rectam $\beta\gamma$ ad $\gamma\vartheta$. Si enim non est, erit *ut circumferentia* $\beta\varepsilon\delta$ *ad rectam* $\beta\gamma$, ita $\beta\gamma$ aut ad maiorem quam $\gamma\vartheta$ aut ad minorem. Prop. 26*)

Sit primum, si fieri possit, ad maiorem, *velut* $\gamma\varkappa$, et circa centrum γ describatur circumferentia $\zeta\eta\varkappa$, quae lineam *quadratricem* in puncto η secet, et *ducatur* perpendicularis $\eta\lambda$, et iuncta $\gamma\eta$ producatur ad ε *punctum* $\beta\varepsilon\delta$ *circumferentiae*. Iam quia *ex hypothesi*, ut $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad rectam $\beta\gamma$, ita est $\beta\gamma$, id est $\gamma\delta$, ad $\gamma\varkappa$, atque ut $\gamma\delta$ ad $\gamma\varkappa$, ita $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad $\zeta\eta\varkappa$ circumferentiam — nam circulorum circumferentiae inter se sunt ut diametri [1]) — apparet circumferentiam $\zeta\eta\varkappa$ rectae $\beta\gamma$ aequalem esse. Et quia propter lineae proprietatem (*XXX*) ut circumferentiae $\beta\varepsilon\delta$ $\varepsilon\delta$, ita inter se sunt rectae $\beta\gamma$ $\eta\lambda$, ergo etiam ut circumferentiae $\zeta\eta\varkappa$ $\eta\varkappa$, ita inter se sunt rectae $\beta\gamma$ $\eta\lambda$. Et demonstravimus circumferentiam $\zeta\eta\varkappa$ rectae $\beta\gamma$ aequalem esse; itaque circumferentia $\eta\varkappa$ rectae $\eta\lambda$ aequalis est, quod quidem absurdum. Ergo non est ut $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad rectam $\beta\gamma$, ita $\beta\gamma$ ad maiorem quam $\gamma\vartheta$.

XXXII. Sed nego etiam ad minorem. Si enim fieri possit, sit ad $\gamma\varkappa$, et circa centrum γ describatur circumferentia

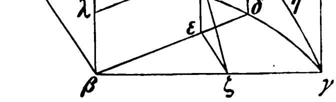
*) Conf. Bretschneider l. c. p. 153 sq.

1) Hoc theorema exstat V propos. 11 et VIII propos. 22; simul autem scriptor tacite efficit circulorum arcus quibus aequales anguli insistunt inter se esse ut radios. Vide infra propos. 36 adnot. 1.

2. ἀλλὰ *Hu*, πολὺ ABS (πολὺ δὲ voluit *Co*, item δὲ post πρότερον add. *To*) παραδοτέον coni. *Hu* 4. 5. τοῦ $\overline{ABΓΔ}$ *Co* pro τοῦ $\overline{ABΓ}$ 7. τῆς δὲ $BH\Theta$ *To* pro τῆς δὲ $\overline{BE\Theta}$ 12. 13. τῆς $\overline{Γ\Theta H}$ προσελάσσονα AB[1], corr. B[2]S 28. ὡς ἡ $\overline{BΔ}$ A, sed *E* superscr. prima m. 35. $\overline{ΔB}$ A[1] in marg. (S), om. B

γεγράφθω ἡ ΖΜΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΚΗ τέμνουσα τὴν τετραγωνίζουσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε. ὁμοίως δὴ τοῖς προγεγραμμένοις δείξομεν καὶ τὴν ΖΜΚ περιφέρειαν τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἴσην, καὶ ὡς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστιν ὡς τὴν ΖΜΚ πρὸς τὴν ΜΚ, οὕτως τὴν ΒΓ εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΗΚ. ἐξ ὧν φανερὸν ὅτι ἴση ἔσται ἡ ΜΚ περιφέρεια τῇ ΚΗ εὐθείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΓΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα· πρὸς αὐτὴν ἄρα τὴν ΓΘ.

50 *Ἔστι δὲ καὶ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἡ τῶν ΘΓ ΓΒ εὐθειῶν τρίτη ἀνάλογον λαμβανομένη εὐθεῖα ἴση ἔσται τῇ ΒΕΔ περιφερείᾳ, καὶ ἡ τετραπλασίων αὐτῆς τῇ τοῦ ὅλου κύκλου περιφερείᾳ. εὑρημένης δὲ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσης εὐθείας πρόδηλον ὡς δὴ καὶ αὐτῷ τῷ κύκλῳ ῥᾴδιον ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι· τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν.*

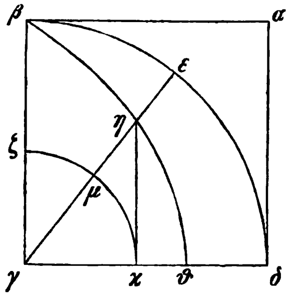
51 

λγ΄. Αὕτη μὲν οὖν ἡ γένεσις τῆς γραμμῆς ἐστιν, ὡς εἴρηται, μηχανικωτέρα, γεωμετρικῶς δὲ διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις τόπων ἀναλύεσθαι δύναται τὸν τρόπον τοῦτον.

Θέσει κύκλου τεταρτημόριον τὸ ΑΒΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΔ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΕΖ λόγον ἔχουσα

3. *δὴ Hu* pro *δὲ* 5. 6. *τουτό ἐστιν* AB, corr. S 6. *πρὸς τὴν ΜΚ οὕτως τὴν ΒΓ ευθεῖαν* bis scripta in A(B), corr. S 13. *τρίτηι ἀνάλογον λαμβανομένηι* ABS, corr. *To* 16. *δὴ* S, *δεῖ* AB *To* *ῥάδιον* AB, *ῥᾳδίως To* 20 sqq.] cap. 51—56 stilo multis in rebus diverso a vulgari veterum mathematicorum consuetudine composita sunt 20. *ΔΓ* A¹ in marg. (S), om. B 23. 24. *προσεπιφανείαις* A (B *To*), *πρὸς ἐπιφανείας* S (conf. p. 270, 18) 26. *τετάρτη μόριον* A, coniunx.

$\zeta\mu\varkappa$, et rectae $\gamma\delta$ perpendicularis *ducatur* $\varkappa\eta$ quadratricem in puncto η secans, et iuncta $\gamma\eta$ producatur ad ε. Similiter



igitur ac supra scripsimus demonstrabimus et circumferentiam $\zeta\mu\varkappa$ rectae $\beta\gamma$ aequalem esse, et ut circumferentias $\beta\varepsilon\delta$ $\varepsilon\delta$, id est $\zeta\mu\varkappa$ $\mu\varkappa$, ita inter se esse rectas $\beta\gamma$ $\eta\varkappa$. Unde apparet circumferentiam $\mu\varkappa$ rectae $\varkappa\eta$ aequalem esse, quod quidem absurdum. Ergo non est ut $\beta\varepsilon\delta$ circumferentia ad rectam $\beta\gamma$, ita $\beta\gamma$ ad minorem quam $\gamma\vartheta$. Nec vero ad maiorem, ut *modo* demonstravimus; ergo ad ipsam $\gamma\vartheta$.

Sed hoc quoque apparet, si rectarum $\vartheta\gamma$ $\gamma\beta$ tertia proportionalis sumatur, hanc circumferentiae $\beta\varepsilon\delta$, itaque quadruplam rectam toti circumferentiae circuli aequalem esse. Rectâ autem, quae circuli circumferentiae aequalis sit, inventâ apparet etiam

ipsi circulo aequale quadratum facile construi posse; nam rectangulum quod circuli perimetro et radio continetur duplum est circuli, ut Archimedes[2]) demonstravit. Prop. 27

XXXIII. Hic igitur lineae *quadratricis* ortus est, quem magis ad mechanicam rationem accedere diximus (*XXXI*); geometrice autem per locos qui sunt ad superficies[1]) *problema* solvi potest hoc modo. Prop. 28*)

Sit circuli quadrans $\alpha\beta\gamma$ positione *datus*, et ducatur, ut libet, *a centro ad circumferentiam* recta $\beta\delta$, et perpendicu-

2) Paulo aliis verbis Pappus id theorema enuntiat atque ipse Archimedes circuli dimens. propos. 1: *πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ λοιπῇ.* Conf. infra V propos. 2 extr. et 3.

*) Conf. Chasles, *Aperçu historique*, p. 28—30 vers. German. Figuram in codicibus corruptam restituit Torellius.

1) Euclidis libros duos hoc titulo inscriptos significari patet ex VII cap. 3.

BS 27. 28. *ωσετύχην* A(B[1]), corr. B[3]S 28. ἡ $\overline{B\Delta}$ AB, sed in A Δ vix diversum a Λ, unde ἡ $\overline{\beta\lambda}$ S *δοθέντα πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν· ὅτι πρὸς γραμμῇ τὸ Ε.*

Νοείσθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, καὶ ἐν αὐτῇ ἕλιξ γεγραμμένη δεδομένη τῇ θέσει ἡ ΓΗΘ, καὶ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΘΔ, καὶ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθαὶ ἤχθωσαν αἱ ΕΙ ΒΔ [ἀνεσταμέναι ὀρθαί], διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΘΔ. ἐπεὶ λόγος τῆς ΕΙ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειάν ἐστιν δοθεὶς διὰ τὴν ἕλικα, δοθεὶς δὲ καὶ ὁ τῆς ΕΖ *λόγος πρὸς τὴν ΔΓ, ἔσται καὶ τῆς ΕΖ πρὸς ΕΙ λόγος δοθείς. καὶ εἰσὶν αἱ ΖΕ ΕΙ παρὰ θέσει· καὶ ἡ ΖΙ ἄρα ἐπιζευχθεῖσα παρὰ θέσει. καὶ ἔστιν κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἐν τέμνοντι ἄρα ἐπιπέδῳ ἡ ΖΙ, ὥστε καὶ τὸ Ι. ἔστιν δὲ καὶ ἐν κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ (φέρεται γὰρ ἡ ΘΔ διά τε τῆς ΘΗΓ ἕλικος καὶ τῆς ΔΒ εὐθείας καὶ αὐτῆς τῇ θέσει δεδομένης αἰεὶ παράλληλος οὖσα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ)· πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Ι, ὥστε καὶ τὸ Ε. τοῦτο μὲν οὖν ἀνελύθη καθόλου, ἂν δ' ὁ τῆς ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν*

---

1. *πρὸς γραμμὴν* ABS, corr. *Hu*, item vs. 16. 17 (conf. cap. 52 sub fin. *πρὸς ῆ τὸ Κ* et *πρὸς γραμμῇ ἄρα*) 4. *ἐν* om. S *γεγραμμένηι δεδομένηι* A, corr. B (*γεγραμμένη δεδομένῃ* S) 5. *πλευρὰ* S, *πλ̄* AB cod. *Co* 6. *αἱ* $\overline{ΕΙΒΔ}$ A, distinx. B (*αἱ* $\overline{ει}$ $\overline{λβ}$ S) 6. 7. *ἀνεσταμέναι ὀρθαί* interpolatori tribuit *Co* 7. *διὰ δὲ τοῦ* $\overline{Κ}$ ABS, corr. *Co* 8. *ἐπι λόγος* A, *ἐπίλογος* e suo "cod. Vat." affert *To*, corr. BS 8. *τῆς ΕΙ — 10. λόγος δοθείς*] *τῆς* $\overline{ΕΖ}$ *εὐθείας πρὸς τὴν* $\overline{ΔΓ}$ *περιφέρειαν τῆς* $\overline{ΔΕ}$ $\overline{ΔΓ}$ *διὰ τὴν ἕλικα λόγος πρὸς τὴν* $\overline{ΔΘ}$ *ἔσται καὶ τῆς* $\overline{ΕΖ}$ *πρὸς* $\overline{Η}$ *λόγος δοθεὶς* ABS, *τῆς ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΕΙ, τουτέστι τῆς ΔΘ, πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν διὰ τὴν ἕλικα, καὶ δοθείς ἐστι ὁ τῆς ΕΖ λόγος πρὸς τὴν ΔΓ, ἔσται καὶ τῆς ΕΙ πρὸς ΔΓ λόγος δοθείς To* partim auctore *Co*, corr. *Hu* 11. *παραθέσει* ABS, distinx. *Hu*, item proximo vs. 12. 13. *ἐν τέμνοντι ἄρα Hu*, *ἐ/ ////// ἄρα* | A, ... B[1]S, *ἔστω ἐν* B[3], *ἔστι δὲ ἐν To* 13. 14. *κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ Hu*, *κ/////// ///φανείαι* A, ... *ἐπιφανείᾳ* BS, *κυλινδροειδεῖ ἐπιφανείᾳ To* (vide apud hunc p. 95 adn. 9) 14. *διά τε To* pro *διὰ δὲ* 16. 17. *πρὸς γραμμὴν* ABS (conf. ad vs. 1) 18. *πρὸς τὴν* $\overline{ΔΘ}$ *περιφέρειαν* ABS, corr. *Co*

laris ad $\beta\gamma$ recta $\varepsilon\zeta$ proportionem datam habens ad circumferentiam $\delta\gamma$; dico punctum ε ad lineam[2] esse.

Fingatur enim ex circumferentia $\alpha\delta\gamma$ *constructa* recti cylindri superficies, in eaque descripta helix $\gamma\eta\vartheta$**) positione data, et sit cylindri latus $\vartheta\delta$, et ad circuli planum perpendiculares ducantur $\varepsilon\iota$ $\beta\lambda$, et per punctum ϑ rectae $\beta\delta$ parallela $\vartheta\lambda$. Quoniam proportio rectae $\varepsilon\iota$ ad circumferentiam $\delta\gamma$ data est propter helicis *proprietatem*[3], itemque *ex hypothesi* proportio rectae $\varepsilon\zeta$ ad eandem circumferentiam data est, proportio etiam rectae $\varepsilon\zeta$ ad $\varepsilon\iota$ data erit (*dat. 8*). Et sunt rectae $\zeta\varepsilon$ $\varepsilon\iota$ positione *datae*[4]; ergo etiam iuncta $\zeta\iota$ positione *data erit* (*dat. 41. 29*). Eademque perpendicularis est ad $\beta\gamma$; ergo $\zeta\iota$ in plano est quod *cylindrum* secat; itaque etiam punctum ι. Sed idem est in superficie cylindrica — nam recta $\lambda\vartheta$ et per helicem $\vartheta\eta\gamma$ et per rectam $\lambda\beta$***) ipsam quoque positione datam fertur, semper plano subiecto parallela manens — ergo ad lineam est punctum ι; itaque etiam ε. Sic igitur *problema* generaliter solvimus; si vero rectae $\varepsilon\zeta$ ad circumferentiam $\delta\gamma$ proportio eadem sit ac rectāe $\beta\alpha$ ad

2) Qualis haec "linea" intellegatur ex Chaslesii p. 28 interpretatione divinare licet. Neque tamen unum casum, ex quo quadratrix fit, sed in universum omnes idoneos sectionum casus, unde certae quaedam curvae in planum subiectum proiiciuntur, Graecus scriptor respexisse videtur (conf. adnot. 36 apud Chasles.). Quae paucis quidem explicari non possunt, sed accuratiore investigatione quam maxime digna sunt.

**) Nimirum agitur de helice in cylindro descripta (*Schraubenlinie*), qualem Hero defin. 8, 2 explicat, non de helice in plano ducta, de qua supra propos. 19—22 expositum est. Vide etiam Heronis defin. 8, 1.

3) *Τῆς ΕΙ εὐθείας* brevius scriptor dixit pro *τῆς ΕΙ, τουτέστιν τῆς ΔΘ εὐθείας*. Data autem est proportio rectae $\delta\vartheta$ ad circumferentiam $\delta\gamma$, quia et circuli quadrans et helix positione data sunt. Est autem helicis quae in cylindro describitur proprietas, ut, quaecunque perpendicularis, velut $\vartheta\delta$, ab helice ad planum subiectum ducatur, haec et ad circumferentiam $\delta\gamma$ et ad lineam $\vartheta\eta\gamma$ constantem proportionem habeat.

4) In Graecis *παρὰ θέσει* et hic et infra cap. 52 pro simplici *θέσει* positum esse videtur, qui quidem dicendi usus, ab Euclidis datis alienus, hanc habeat excusationem, quod omnis recta quae *παρὰ θέσει* est (dat. defin. 15) ipsa quoque positione est data (ibid. propos. 28).

***) Ne forte "per rectam $\delta\vartheta$" coniicias, conf. proximum problema, cuius similitudo omnino huc pertinet ad quaedam difficiliora explicanda.

λόγος ὁ αὐτὸς ᾗ τῷ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔΓ, ἡ προειρημένη τετραγωνίζουσα γίνεται γραμμή.

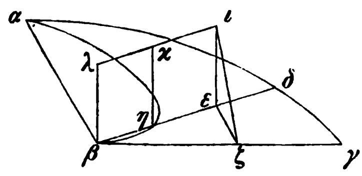
52 λδ'. Δύναται δὲ καὶ διὰ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένης ἕλικος ἀναλύεσθαι τὸν ὅμοιον τρόπον. ἔστω γὰρ ὁ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΑΔΓ περιφέρειαν, καὶ ἐν ᾧ ἡ ΑΒ εὐθεῖα περὶ τὸ Β κινουμένη παροδεύει τὴν ΑΔΓ περιφέρειαν, σημεῖον ἐπ' αὐτῆς ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παραγινέσθω θέσιν λαβούσης τὴν ΓΒ τῆς ΑΒ, καὶ ποιείτω τὴν ΒΗΑ ἕλικα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, ἡ ΑΔΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ἐναλλάξ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ πρὸς ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΖΕ. ἤχθω τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΚΗ ἴση τῇ ΒΗ· ἐν κυλινδροειδεῖ ἄρα ἐπιφανείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς ἕλικος τὸ Κ. ἀλλὰ καὶ ἐν κωνικῇ (ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΒΚ ἐν κωνικῇ γίνεται ἐπιφανείᾳ ἡμίσειαν ὀρθῆς κεκλιμένῃ πρὸς τὸ ὑποκείμενον καὶ ἠγμένῃ διὰ δοθέντος τοῦ Β)· πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Κ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΕΒ παράλληλος ἡ ΑΚΙ, καὶ ὀρθαὶ τῷ ἐπιπέδῳ αἱ ΒΑ ΕΙ· ἐν πλεκτοειδεῖ ἄρα ἐπιφανείᾳ ἡ ΑΚΙ (φέρεται γὰρ διά τε τῆς ΒΑ εὐθείας θέσει οὔσης καὶ διὰ θέσει γραμμῆς πρὸς ᾗ τὸ Κ)· καὶ τὸ Ι ἄρα ἐν ἐπιφανείᾳ. ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιπέδῳ (ἴση γὰρ ἡ ΖΕ τῇ ΕΙ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΒΗ, καὶ γίνεται παρὰ θέσει ἡ ΖΙ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΒΓ)· πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Ι,

---

3. $\overline{ΑΔ}$ A[1] in marg. (S), om. B 5. περιφέρειαν add. *Hu* auctore *Co* 7. τὴν ΑΔΓ *Co* pro τὴν $\overline{ΑΔ}$ 8. τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β *Hu* pro τοῦ $\overline{Β}$ ἐπὶ τὸ $\overline{Γ}$ παραγενέσθω *To* 9. ΓΒ τῆς add. *Hu* τὴν $\overline{ΒΗ}$ $\overline{Α}$ et 11. πρὸς $\overline{Δ}$ $\overline{Γ}$ A, coniunx. BS 14. $\overline{ΒΚ}$ εν γωνικῆι A(B), corr. S 15. κεκλιμένης AB, corr. S 16. πρὸς γραμμὴν AS, πρὸς γεγραμμένην B[1], corr. B[2] (vel B[3]) *To* 18. πληκτοειδει (sine acc.) A(S), κυλινδροειδεῖ coni. *Co* (probavit *To*), corr. B (nam etiamsi πληκτοειδῶν in codicibus infra cap. 58 redeat, tamen forma per ε verbis quae cap. 57 sq. leguntur: γραμμαὶ ἐκ κινήσεων ἐπιπεπλεγμένων γεννώμεναι et ἐπιπλοκῆς confirmatur) 20. διαθέσει ABS, distinx. *To* 21. ἐν ἐπιφανείᾳ *To* auctore *Co*, ἐπιφανεια (sine acc.) A, ἐπιφάνεια BS 22. παραθέσει ABS, distinx. *Hu* 23. προσγραμμη A, πρὸς γραμμὴ B, προσγραμμὴ S, corr. *To* τὸ Ι *Co*, τὸ $\bar{ι}$ σ A(BS)

circumferentiam $\alpha\delta\gamma$, illa quae supra (*XXX*) dicta est linea quadratrix oritur.

XXXIV. Sed etiam per helicem in plano descriptam *problema* solvi potest simili ratione. Prop. 29 *)



Sit enim rectae $\varepsilon\zeta$ ad circumferentiam $\delta\gamma$ proportio eadem ac rectae $\alpha\beta$ ad circumferentiam $\alpha\delta\gamma$, et dum recta $\alpha\beta$ circa *centrum* β mota circumferentiam $\alpha\delta\gamma$ permeat, punctum in eadem recta progrediens a puncto α ad punctum β *eodem momento* perveniat quo recta $\beta\alpha$ positionem $\beta\gamma$ sumpserit, et id punctum helicem $\beta\eta\alpha$ efficiat [1]. Est igitur ut recta $\beta\gamma$, *id est* $\alpha\beta$, ad $\beta\eta$, ita circumferentia $\gamma\delta\alpha$ ad $\gamma\delta$, et vicissim *ut recta* $\alpha\beta$ *ad circumferentiam* $\alpha\delta\gamma$, *ita recta* $\beta\eta$ *ad circumferentiam* $\delta\gamma$. Sed *ex hypothesi* recta $\varepsilon\zeta$ ad circumferentiam $\delta\gamma$ *in eadem proportione* est; ergo rectae $\beta\eta$ $\varepsilon\zeta$ inter se aequales sunt. Ducatur ad planum *subiectum* perpendicularis $\varkappa\eta$ ipsi $\beta\eta$ aequalis; ergo punctum $\varkappa$ est in superficie cylindroide quae fit ab helice. Sed idem in conica (nam iuncta $\beta\varkappa$ est in conica superficie, quae sub dimidio angulo recto ad *planum* subiectum inclinata et per datum punctum β ducta est); ergo ad lineam est punctum $\varkappa$. Ducatur per $\varkappa$ rectae $\varepsilon\beta$ parallela $\lambda\varkappa\iota$, et plano *subiecto* perpendiculares $\beta\lambda$ $\varepsilon\iota$; ergo recta $\lambda\varkappa\iota$ in plectoide superficie est (nam fertur ipsa $\lambda\varkappa\iota$ et per rectam $\beta\lambda$ positione datam et per lineam positione *datam,* ad quam est punctum $\varkappa$); ergo etiam punctum ι in ea superficie est. Sed idem etiam in plano (nam $\zeta\varepsilon$ rectae $\varepsilon\iota$ aequalis est, quoniam item rectae $\beta\eta$, et $\zeta\iota$ positione data, quoniam ad $\beta\gamma$ perpendicularis est); ergo punctum

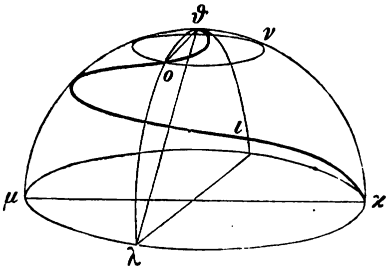
*) Conf. Chasles l. c. Figura item a Torellio restituta est.

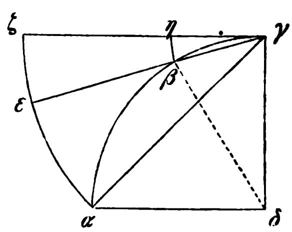
1) Duo eaque gravissima hoc loco notanda sunt, primum helicem describi, quae ad quadrantem circuli eandem rationem habet quam helix Archimedea ad totum circulum (propos. 19), tum eius helicis initium a puncto α et recta $\alpha\beta$ statui, cum rectius vice versa a puncto β et recta $\beta\gamma$ usque ad $\beta\alpha$ mota incipiendum fuerit; sed hic magis verborum, quam rei error est.

ὥστε καὶ τὸ Ε. καὶ δῆλον ὅτι, ἂν ὀρθὴ ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, ἡ προειρημένη τετραγωνίζουσα γραμμὴ γίνεται.

53 λε'. Ὥσπερ ἐν ἐπιπέδῳ νοεῖται γινομένη τις ἕλιξ φερομένου σημείου κατ' εὐθείας κύκλον περιγραφούσης, καὶ ἐπὶ στερεῶν φερομένου σημείου κατὰ μιᾶς πλευρᾶς τιν' ἐπιφάνειαν περιγραφούσης, οὕτως δὴ καὶ ἐπὶ σφαίρας ἕλικα νοεῖν ἀκόλουθόν ἐστι γραφομένην τὸν τρόπον τοῦτον.

54 Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΚΛΜ περὶ πόλον τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ μεγίστου κύκλου τεταρτημόριον γεγράφθω τὸ ΘΝΚ, καὶ ἡ μὲν ΘΝΚ περιφέρεια,





περὶ τὸ Θ μένον φερομένη κατὰ τῆς ἐπιφανείας ὡς ἐπὶ τὰ Λ Μ μέρη, ἀποκαθιστάσθω πάλιν ἐπὶ τὸ αὐτό, σημεῖον δέ τι φερόμενον ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Κ παραγινέσθω· γράφει δή τινα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἕλικα, οἵα ἐστὶν ἡ ΘΟΙΚ, καὶ ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ Θ γραφῇ μεγίστου κύκλου περιφέρεια, πρὸς τὴν ΚΛ περιφέρειαν λόγον ἔχει ὃν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΟ· λέγω δὴ ὅτι, ἂν ἐκτεθῇ τεταρτημόριον τοῦ μεγίστου ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου τὸ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΔ, γίνεται ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ΘΟΙΚ ἕλικος καὶ τῆς ΚΝΘ περιφερείας ἀπολαμβανομένην ἐπιφάνειαν, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

1. ἢ ἡ *Hu*, η A, ἢ B, ἡ S *To* 3. $\overline{\lambda\varepsilon}$ A[1] in marg. S, om. B ἐν add. *Hu* auctore *Co* 3. 4. φερομέ|//|ημείου A, restituerunt BS 4. 5. κύ|κλ|//////|γ|αφούσης καὶ | ἐπ|//////////// φερομένου A, κυκλω ...... περιγραφούσης· καὶ ἐπ........λω φερομένου B, κύκλῳ .... γραφούσης καὶ ἐπι.....φερομένου S, restit. *Hu* (pro καὶ ἐπὶ στερεῶν *Co* voluit καὶ

ι ad lineam est; itaque etiam punctum ε. Et apparet, si angulus $\alpha\beta\gamma$ rectus sit, illam quae supra dicta est lineam quadratricem oriri.

XXXV. Quemadmodum in plano helix existere intellegitur, si in recta circulum describente punctum quoddam fertur (*XXI*), atque in solidis, *velut cylindris aut conis*[1]), si punctum in uno latere superficiem quandam describente fertur, ita in sphaera quoque helicis descriptionem cognoscere consentaneum est hoc modo. Prop. 30*)

Sit in sphaera maximus circulus $\varkappa\lambda\mu$ eiusque polus punctum ϑ, et a ϑ maximi circuli quadrans $\vartheta\nu\varkappa$ describatur, et circumferentia $\vartheta\nu\varkappa$ circa punctum ϑ, quod maneat, in superficie *sphaerae* versus λ μ feratur eoque unde egressa est redeat, atque *eodem tempore* punctum quoddam in circumferentia progrediens a puncto ϑ ad $\varkappa$ perveniat; hoc igitur in superficie helicem, qualis est $\vartheta o\iota\varkappa$, describit, *cuius proprietas est, ut,* si quaelibet a puncto ϑ describatur maximi circuli circumferentia (*circulum $\varkappa\lambda\mu$ primum in λ, helicem autem primum in o secans*), haec ad circumferentiam $\varkappa\lambda$ eandem proportionem habeat quam circumferentia $\lambda\vartheta$ ad ϑo. Iam dico, si maximi in sphaera circuli quadrans $\alpha\beta\gamma$ circa centrum δ exponatur et recta $\alpha\gamma$ iungatur, esse ut dimidiae sphaerae superficiem ad eam superficiem quae inter helicem $\vartheta o\iota\varkappa$ et circumferentiam $\vartheta\nu\varkappa$ continetur, ita sectorem $\alpha\beta\gamma\delta$ ad segmentum $\alpha\beta\gamma$.

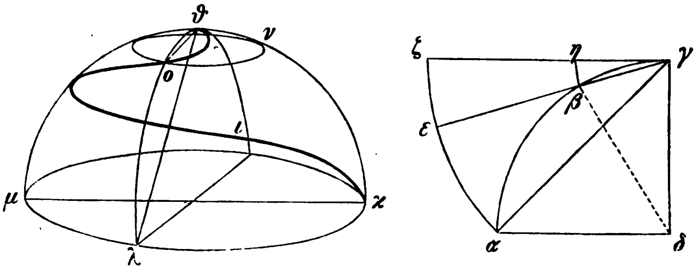
*) Conf. Chasles p. 26, Bretschneider p. 181.

1) Sic ex nostra coniectura, quoniam praeter helicem in cylindro descriptam (propos. 28) aliae etiam eius generis lineae, velut conica helix (Chasles p. 28 adnot. 35), construuntur. Quodsi quis in una helice ab Herone definita consistere malit, is ἐπὶ κυλίνδρου et τὴν ἐπιφάνειαν praeferat.

ἔπειτα; de coniectura καὶ ἐπὶ κυλίνδρου vide Lat.) 5. τιν' pro τὴν *Hu* 6. οὕτως δὴ *Hu* pro οὕτω δὲ 8. 9. περι πολοντον $\overline{\Theta}$ A(BS), corr. *Hu* 11. 12. ἐπὶ τὰ $\overline{\Lambda A M}$ A(BS), corr. *Co* 15. μεγίστου *Hu* auctore *Co* pro μεγίστη τοῦ 16. 17. περιφέρειαν — ὃν add. *Hu* 18. τὸ $AB\Gamma$ περὶ *Hu* pro τοῦ $\overline{AB\Gamma}$ περιφέρεια 21. ἀπολαμβανομένης ABS, corr. *Hu* auctore *Co*

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἡ ΓΖ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ διὰ τοῦ Δ γεγράφθω περιφέρεια ἡ ΔΕΖ· ἴσος ἄρα ὁ ΑΒΓΔ τομεὺς τῷ ΔΕΖΓ (διπλασία μὲν γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΓΖ, ἥμισυ δὲ τὸ ἀπὸ ΔΔ τοῦ ἀπὸ ΔΓ)· ὅτι ἄρα καὶ ὡς αἱ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας, οὕτως ὁ ΔΕΖΓ τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

55 *ἔστω, ὃ μέρος ἡ ΚΛ περιφέρεια τῆς ὅλης τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τὸ αὐτὸ μέρος περιφέρεια ἡ ΖΕ τῆς ΖΔ,*



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΑΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος. ὃ δὲ μέρος ἡ ΚΔ τῆς ὅλης περιφερείας, τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ΘΟ τῆς ΘΟΔ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΟΔ τῇ ΑΒΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΒΓ. γεγράφθω περὶ πόλον τὸν Θ διὰ τοῦ Ο περιφέρεια ἡ ΟΝ, καὶ διὰ τοῦ Β περὶ τὸ Γ κέντρον ἡ ΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΔΚΘ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ΟΘΝ, ἡ ὅλη τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν οὗ ἡ ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶν ἡ ΘΟ, ὡς δ' ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς τὰ Θ Δ ἐπιζευγνυούσης εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Θ Ο, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς

6. ὁ ΑΕΓΖ A[s]S, corr. B 7. ὃ add. *Hu* 8. *περιφέρεια ἡ Hu*, ο δὲ μέρ ἡ A, ὁ δὲ μέρος ἡ B, ὃ δὲ μέρη S 11. ἡ ϑολ B[1], ἡ ΘΟΔ AB[2] (vel B[3]) S 15. *πρὸς τὴν ΟΘ Ν ἡ ολη τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια* add. A[2] in marg. (BS), om. A[1] 16. *τὴν τοῦ τμήματος Co*, *τὴν τοῦ ἡμισφαιρίου* ABS, *τὴν ἐντὸς τοῦ ἡμισφαιρίου* coni. *Hu* *οὗ ἡ Co* pro *οὐχ* 17. *δ' ἡ Hu* auctore *Co* pro *δὴ* 18. *τὰ ΘΔ* A, distinx. B[1]S (*τὰ ϑ α* B[3]) 20. *τὰ ϑ ο ἢ* B, *τὰ ΘΟ η* A, *τὰ ϑοη* S, *τὰ Θ Ο, τουτέστι Co*

Ducatur enim circumferentiam tangens recta $\gamma\zeta$, et circa centrum γ per punctum α describatur circumferentia $\alpha\varepsilon\zeta$; ergo sector $\alpha\beta\gamma\delta$ sectori $\alpha\varepsilon\zeta\gamma$ aequalis est, quoniam $\angle\, \alpha\delta\gamma = 2 \angle\, \alpha\gamma\zeta$, et $\alpha\gamma^2 = 2\alpha\delta^2$[**]; dico igitur esse ut eas quas supra posui superficies inter sese, ita sectorem $\alpha\varepsilon\zeta\gamma$ ad segmentum $\alpha\beta\gamma$. Quae pars totius circuli circumferentiae est circumferentia $\kappa\lambda$, eadem pars circumferentiae $\zeta\alpha$ sit circumferentia $\zeta\varepsilon$, et iungatur recta $\varepsilon\gamma$; erit igitur circumferentiae $\alpha\beta\gamma$ eadem pars circumferentia $\beta\gamma$[***]. Sed quae pars totius circumferentiae est circumferentia $\kappa\lambda$, eadem pars circumferentiae $\vartheta o\lambda$ est circumferentia ϑo *ex helicis proprietate.* Et *ex constructione* est circumf. $\vartheta o\lambda$ = circumf. $\alpha\beta\gamma$; ergo etiam circumf. ϑo = circumf. $\beta\gamma$. Describatur circa polum ϑ per punctum o circulus $o\nu$, et per punctum β circa centrum γ circumferentia $\beta\eta$. Iam quia est ut sphaericae superficiei *sector*[2]) $\lambda\vartheta\kappa$ ad *sectorem* $o\vartheta\nu$, ita tota dimidiae sphaerae superficies ad superficiem eius segmenti quod polum ϑ basimque circulum $o\nu$ habet[3]), atque ut dimidiae sphaerae superficies ad eiusdem segmenti superficiem, ita, iunctis rectis $\vartheta\lambda$ ϑo, est $\vartheta\lambda^2$ ad ϑo^2[†]), sive $\varepsilon\gamma^2$ ad $\beta\gamma^2$, erit igitur ut is qui

**) Sector $\alpha\beta\gamma\delta$ est quarta pars circuli cuius radius $\alpha\delta$, et sector $\alpha\varepsilon\zeta\gamma$ octava pars circuli cuius radius $\alpha\gamma$. Et sunt inter sese circuli ut quadrata ex radiis; ergo 4 sect. $\alpha\beta\gamma\delta$: 8 sect. $\alpha\varepsilon\zeta\gamma = \alpha\delta^2 : \alpha\gamma^2 = \alpha\delta^2 : 2\alpha\delta^2$, id est sect. $\alpha\beta\gamma\delta$ = sect. $\alpha\varepsilon\zeta\gamma$ (*Co*).

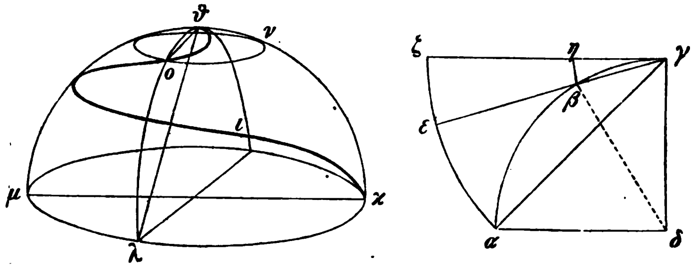
***) Est enim circumf. $\zeta\alpha$: circumf. $\zeta\varepsilon = \angle\, \zeta\gamma\alpha : \angle\, \zeta\gamma\varepsilon$. Sed est $\angle\, \zeta\gamma\alpha = \frac{1}{2} \angle\, \alpha\delta\gamma$, et $\angle\, \zeta\gamma\varepsilon = \frac{1}{2} \angle\, \beta\delta\gamma$ (id quod efficitur ex elem. 3, 32 et 20); ergo circumf. $\zeta\alpha$: circumf. $\zeta\varepsilon$ = circumf. $\alpha\beta\gamma$: circumf. $\beta\gamma$. (Commandinus in eo errat, quod arcum $\lambda\kappa$ maximi circuli $\mu\lambda\kappa$ quadrantem esse opinatur, at vero punctum λ ad libitum sumptum est.)

2) Sector superficiei sphaericae ex usu Graeci scriptoris (vide p. 268, 1 et 4) similiter dicitur ac sector in plano circuli.

3) Quia arcubus $\lambda\kappa$ $o\nu$ idem angulus insistit, arcus $\lambda\kappa$ est eadem pars circuli $\mu\lambda\kappa$, quae pars est arcus $o\nu$ circuli $o\nu$, unde id quod supra positum est facile demonstratur. Conf. etiam adnot. ††.

†) Secundum Archim. de sphaer. et cylindr. 1 propos. 35, et quia quadratum ex $\vartheta\lambda$ aequale est duplo quadrato ex radio sphaerae, dimidiae sphaerae superficies aequalis est circulo cuius radius recta $\vartheta\lambda$; tum secund. Archim. ibid. propos. 48 segmenti $\vartheta o\nu$ superficies aequalis est circulo cuius radius recta ϑo. Et sunt circuli inter se ut quadrata ex radiis; ergo duae quae dictae sunt superficies inter se sunt ut $\vartheta\lambda^2$ ad ϑo^2.

ΒΓ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ ΚΛΘ τομεὺς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ πρὸς τὸν ΟΘΝ, οὕτως ὁ ΕΖΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΒΗΓ. ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ ὡς πάντες οἱ ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ τομεῖς οἱ ἴσοι τῷ ΚΛΘ, οἵ εἰσιν ἡ ὅλη τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, πρὸς τοὺς περιγραφομένους περὶ τὴν ἕλικα τομέας ὁμοταγεῖς τῷ ΟΘΝ, οὕτως πάντες οἱ ἐν τῷ ΑΖΓ τομεῖς οἱ ἴσοι τῷ ΕΖΓ, τουτέστιν ὅλος ὁ ΑΖΓ τομεύς,



πρὸς τοὺς περιγραφομένους περὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα τοὺς ὁμοταγεῖς τῷ ΓΒΗ. τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τοὺς ἐγγραφομένους τῇ ἕλικι τομέας, οὕτως ὁ ΑΖΓ τομεὺς πρὸς τοὺς ἐγγραφομένους τῷ ΑΒΓ τμήματι τομέας, ὥστε καὶ ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς ἕλικος ἀπολαμβανομένην ἐπιφάνειαν, οὕτως ὁ ΑΖΓ τομεύς, τουτέστιν
56 *τὸ ΑΒΓΔ τεταρτημόριον, πρὸς τὸ ΑΒΓ τμῆμα. συνάγεται δὲ διὰ τούτου ἡ μὲν ἀπὸ τῆς ἕλικος ἀπολαμβανομένη ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ΘΝΚ περιφέρειαν ὀκταπλασία τοῦ ΑΒΓ τμήματος (ἐπεὶ καὶ ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓΔ τομέως), ἡ δὲ μεταξὺ τῆς ἕλικος καὶ τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ὀκταπλασία τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, τουτέστιν ἴση τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τετραγώνῳ.*

---

2. *πρὸς* et 3. *ὡς* add. *Hu* auctore *Co* 4. *οιείσιν οι ολη τοῦ* A(B), corr. S 6. *τῷ ΟΘΝ Hu* auctore *Co* pro *τῶι ΟΘΗ* *πάντες* et 10. *ἐπιφάνεια* add. *Hu* auctore *Co* 15. *ὡς* ante *τὸ ΑΒΓΔ* additum in ABS del. *Hu* 16. *ἀπὸ*] *μεταξὺ* supra p. 264, 20, *inter Co*, *ὑπὸ* coni. *Hu* 17. *καὶ τῆς ΘΝΚ περιφερείας* coni. *Hu*

est in superficie *sphaerae* sector $\lambda\vartheta\varkappa$ ad sectorem $o\vartheta\nu$, ita *in plano* sector $\varepsilon\zeta\gamma$ ad sectorem $\beta\eta\gamma$ ††). Similiter demonstrabimus esse etiam ut omnes sectores qui in dimidiae sphaerae *superficie* describuntur sectori $\lambda\varkappa\vartheta$ aequales[4]), quorum summa efficit totam dimidiae sphaerae superficiem, ad sectores helici circumscriptos ac sectori $o\vartheta\nu$ respondentes, ita omnes qui sunt in $\alpha\zeta\gamma$ sectores ipsi $\varepsilon\zeta\gamma$ aequales, id est totum sectorem $\alpha\zeta\gamma$, ad sectores segmento $\alpha\beta\gamma$ circumscriptos ac sectori $\gamma\beta\eta$ respondentes. Atque eadem ratione demonstrabitur esse ut dimidiae sphaerae superficiem ad *summam* sectorum qui helici inscribuntur, ita sectorem $\alpha\zeta\gamma$ ad *summam* sectorum qui segmento $\alpha\beta\gamma$ inscribuntur; ergo etiam ut dimidiae sphaerae superficies ad superficiem quae inter helicem *et circumferentiam* $\vartheta\nu\varkappa$ continetur, ita erit sector $\alpha\zeta\gamma$, id est quadrans $\alpha\beta\gamma\delta$, ad segmentum $\alpha\beta\gamma$. Unde colligitur superficiem quae ab helice ad circumferentiam $\vartheta\nu\varkappa$ pertinet octuplam esse segmenti $\alpha\beta\gamma$ (quoniam item, *id quod ex Archim. de sphaer. et cyl. 1, 35 efficitur,* dimidiae sphaerae superficies *octupla* est quadrantis $\alpha\beta\gamma\delta$), et superficiem quae inter helicem et basim dimidiae sphaerae continetur octuplam esse trianguli $\alpha\gamma\delta$, id est aequalem quadrato quod fit ex sphaerae diametro[5]).

††) Supponit igitur Graecus scriptor similes sectores inter se esse ut quadrata ex radiis, quod lemma per se consentaneum, si opus sit, demonstretur ex elem. 5, 15. 12, 2; sunt enim similes sectores eaedem suorum circulorum partes. Simile lemma infra legitur V propos. 13; et conf. ibid. propos. 17 adnot. * ac supra p. 237.

4) Fuit cum verba οἱ ἴσοι τῷ ΚΛΘ et paulo post οἱ ἴσοι τῷ ΕΖΓ delenda esse suspicarer; nam cum arcus $\lambda\varkappa$ ad libitum sumptus sit, non necesse est summam aequalium sectorum ipsam dimidiae sphaerae superficiem efficere, ac stat demonstratio, etiamsi quilibet sectores illi $\lambda\varkappa\vartheta$ non aequales sumantur. Verum ratio ab Archimede inventa probat hunc quoque scriptorem in quotquot minimas partes inter se aequales circumferentiam maximi circuli dividi voluisse; ergo hoc loco tacite supponere videtur arcum $\lambda\varkappa$ totius circumferentiae esse partem toto, non fracto, numero expressam.

5) Scilicet $8\ \Delta\ \alpha\gamma\delta = 4\ \alpha\delta^2 = (2\ \alpha\delta)^2$; et dupla $\alpha\delta$ est diametrus sphaerae.

57 *λϛʹ. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον εἰς τρία ἴσα τεμεῖν οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι θελήσαντες ηὐπόρησαν δι᾽ αἰτίαν τοιαύτην. τρία γένη φαμὲν εἶναι τῶν ἐν γεωμετρίᾳ προβλημάτων, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι᾽ εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτ᾽ ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι᾽ ὧν εὑρίσκεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ λύεται προβλήματα παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ καὶ πλειόνων, στερεὰ ταῦτα κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς, ἀναγκαῖον. τρίτον δέ τι προβλημάτων ὑπολείπεται γένος τὸ καλούμενον γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἕτεραι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν ἔχουσαι τὴν γένεσιν καὶ βεβιασμένην μᾶλλον, ἐξ ἀτακτοτέρων ἐπιφανειῶν καὶ*

58 *κινήσεων ἐπιπεπλεγμένων γεννώμεναι. τοιαῦται δέ εἰσιν αἵ τε ἐν τοῖς πρὸς ἐπιφανείαις καλουμένοις τόποις εὑρισκόμεναι γραμμαὶ ἕτεραί τε τούτων ποικιλώτεραι καὶ πολλαὶ τὸ πλῆθος ὑπὸ Δημητρίου τοῦ Ἀλεξανδρέως ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι καὶ Φίλωνος τοῦ Τυανέως ἐξ ἐπιπλοκῆς πλεκτοειδῶν τε καὶ ἑτέρων παντοίων ἐπιφανειῶν εὑρισκόμεναι πολλὰ καὶ θαυμαστὰ συμπτώματα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι. καί τινες αὐτῶν ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἠξιώθησαν λόγου πλείονος, μία δέ τις ἐξ αὐτῶν ἐστιν ἡ καὶ παράδοξος ὑπὸ τοῦ Μενελάου κληθεῖσα γραμμή. τοῦ δὲ αὐτοῦ γένους ἕτεραι ἕλικές εἰσιν τετραγωνίζουσαί τε καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσο-*

59 *ειδεῖς. δοκεῖ δέ πως ἁμάρτημα τὸ τοιοῦτον οὐ μικρὸν εἶναι τοῖς γεωμέτραις, ὅταν ἐπίπεδον πρόβλημα διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν ὑπό τινος εὑρίσκηται, καὶ τὸ σύνολον ὅταν ἐξ ἀνοικείου λύηται γένους, οἷόν ἐστιν τὸ ἐν τῷ πέμπτῳ*

---

1. $\overline{\lambda\varsigma}$ A[1] in marg. (B[3]S) 5. *οὖν* om. S 9. *εἰς τὴν γένεσιν* ABS, *εἰς τὴν κατασκευὴν* Co, corr. *Hu* 13. *δέ τι*] item supra p. 54, 16 corrigas pro *δ᾽ ἔτι* 17. *γενώμεναι* et alterum *ν* prim. m. superscr. A 21. *φίλωνος το τυ*ανεως* A 22. *πληκτοειδῶν* ABS, corr. *Hu* (conf. p. 262, 18) 23. *περὶ αὐτὰς* ABS, corr. *Hu* 26. 27. *ἕτεραί εἰσιν*

XXXVI. Datum angulum rectilineum cum antiqui geometrae in tres partes secare vellent, hac de causa haesitaverunt. Tria genera problematum geometricorum statuimus, quorum alia plana, alia solida, alia linearia vocamus[1]. Quae igitur per rectas lineas et circuli circumferentias solvi possunt, ea merito plana dicantur, quoniam lineae, per quas eiusmodi problemata solvuntur, in plano originem habent. Quorum autem problematum resolutio adsumptis una pluribusve coni sectionibus invenitur, haec solida appellata sunt; nam ad eorum constructionem solidarum figurarum superficiebus, nimirum conicis, uti necesse est. Tertium autem relinquitur problematum genus quod lineare vocatur; nam praeter eas quas diximus lineas aliae variam et contortiorem originem habentes, quae ex superficiebus minus ordinatis et motibus implicatis gignuntur, ad constructionem adhibentur. Quales sunt et lineae in locis qui ad superficies vocantur[2] repertae, et permultae aliae magis etiam variae a Demetrio Alexandrino in "linearibus constitutionibus" et a Philone Tyanaeo ex implicatione plectoidium[3] aliarumque variarum superficierum inventae, in quibus multae et mirabiles proprietates insunt. Et nonnullas ex his lineis longiore tractatione dignas iudicaverunt recentiores; sed una quidem vel maxime excellit, quam "mirabilem" Menelaus nuncupavit[4]. Atque eiusdem generis aliae sunt, *velut* helices *sive spirales*, tetragonizusae *sive quadratrices*, conchoides *sive conchiformes*, cissoides *sive hederae similes*. At geometrae non mediocriter errare videntur, si quando planum problema per conicas vel alias curvas lineas, atque omnino si quid per alienum genus solvunt,

1) Confer supra III cap. 20.

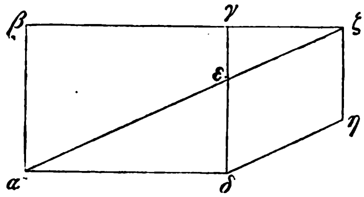
2) Conf. supra IV propos. 28.

3) Ibidem propos. 29.

4) Chasles, *Aperçu historique*, p. 23 versionis German.

καὶ ἕλικες καὶ τετραγωνίζουσαι καὶ κοχλ. ut scribamus, suadet libri III cap. 20 similitudo (nisi forte scriptor huius loci *ἕλικες* omisit, quo deleto *τε* post *τετραγ.* recte positum esse apparet) 27. *κογχοειδεῖς* S invitis AB 31. *πέμπτῳ*] immo *πρώτῳ* (vide adnot. 5 ad Latina) *τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς πρόβλημα καὶ ἡ ἐν τῷ περὶ τῆς ἕλικος ὑπὸ Ἀρχιμήδους λαμβανομένη στερεοῦ νεῦσις ἐπὶ κύκλον· μηδενὶ γὰρ προσχρώμενον στερεῷ δυνατὸν εὑρεῖν τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον θεώρημα, λέγω δὴ τὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ κύκλου ἴσην ἀποδεῖξαι τῇ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένῃ εὐθείᾳ τῇ ἐκ τῆς γενέσεως ἕως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἕλικος. τοιαύτης δὴ τῆς διαφορᾶς τῶν προβλημάτων ὑπαρχούσης οἱ πρότεροι γεωμέτραι τὸ προειρημένον ἐπὶ τῆς γωνίας πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον διὰ τῶν ἐπιπέδων ζητοῦντες οὐχ οἷοί τ' ἦσαν εὑρίσκειν· οὐδέπω γὰρ αἱ τοῦ κώνου τομαὶ συνήθεις ἦσαν αὐτοῖς, καὶ διὰ τοῦτο ἠπόρησαν· ὕστερον μέντοι διὰ τῶν κωνικῶν ἐτριχοτόμησαν τὴν γωνίαν εἰς τὴν εὕρεσιν χρησάμενοι τῇ ὑπογεγραμμένῃ νεύσει.*

60 *Παραλληλογράμμου δοθέντος ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓΔ καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΒΓ, δέον ἔστω διαγαγόντα τὴν ΑΕ ποιεῖν τὴν ΕΖ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.*



Γεγονέτω, καὶ ταῖς ΕΖ ΕΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΗ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΖΕ καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΔΗ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΗ. καὶ δοθὲν τὸ Δ· τὸ Η ἄρα πρὸς θέσει κύκλου περιφερείᾳ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓΔ δοθὲν καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΖ ΕΔ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΖ ΕΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΖΗ·

---

2. *ἡ* add. *Hu* *περὶ τῆς ἕλικος*] *περὶ ἑλίκων* accuratius scriptor posuit infra cap. 78 2. 3. *στερεα νευσεις* A, *στερεὰ νεῦσις* B, *στερεαὶ νεύσεις* S, corr. *Hu* 3. *κύκλον Hu* pro *κύκλου* 6. *ἀγομενη εὐθεια* A, corr. BS 6. 7. *ἐκ τῆς γενέσεως*] *ἐκ τῆς ἐν τῇ γενέσει* coll. cap. 71 vel *ἐκ τοῦ ἐν ἀρχῇ* coni. *Hu* 7. *ἕως* add. *Hu* 9. *γωνίας* paene evanuit in A 10. *τ'* add. *Hu* 13. *ετριχατομησαν* (sine spir. et acc.) A, corr. BS 18. *γεγονέ*τω* A² ex *γέγονεν τω* 18. *ταῖς ΕΖ ΖΔ* — 20. *αἱ ΔΗ ΗΘ* ABS, corr. Co 24. *προσθέσει* ABS, distinx. *Hu* auctore *Co*, item p. 274, 1 25. 26. *τῶι ὑπὸ ΒΕ ΖΔ* et *τὸ ὑπὸ ΒΕΖΔ* A(BS), corr. *Co* 26. *ὑπὸ ΒΖΗ Co* pro *ὑπὸ ΒΘΗ*

quale est in quinto Apollonii conicorum libro problema de parabola [5]), vel illa quae in libro de helicibus ab Archimede adsumitur solidi inclinatio in circulum [6]); neque enim solidum adhibere opus est, ut theorema ab illo propositum inveniri possit, scilicet ut demonstretur circumferentiam circuli prima conversione *descripti* aequalem esse rectae quae a principio helicis ad tangentem ducitur [7]). Sic igitur cum problemata inter se differant, priores geometrae illud de anguli *sectione* problema, quod natura solidum est, per plana inquirentes solvere non potuerunt; nondum enim coni sectionibus uti consueverant eaque de causa ambigebant. Sed postea *alii* per conica angulum tripartito secuerunt, quod ut invenirent hanc quae sequitur inclinationem adhibuerunt.

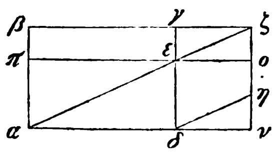
Dato parallelogrammo rectangulo $\alpha\beta\gamma\delta$ et producta recta $\beta\gamma$, oporteat rectam $\alpha\varepsilon\zeta$ ita ducere, ut eius segmentum $\varepsilon\zeta$ *inter* $\delta\gamma$ *et productam* $\beta\gamma$ *abscissum* datae rectae aequale sit. Prop. 31

Factum iam sit, et rectis $\varepsilon\zeta$ $\varepsilon\delta$ parallelae ducantur $\delta\eta$ $\eta\zeta$. Iam quia recta $\varepsilon\zeta$ et data et ipsi $\delta\eta$ aequalis est, data igitur est $\delta\eta$. Et datum est punctum δ; ergo punctum η est ad circumferentiam circuli positione *dati* (*dat. defin. 6*). Et quoniam rectangulum $\beta\gamma\delta$ et datum est et rectangulo quod rectis $\beta\zeta$ $\varepsilon\delta$ continetur aequale, datum igitur rectangulum sub $\beta\zeta$ $\varepsilon\delta$, id est rectangulum $\beta\zeta\eta$ *). Ergo punctum η est

5) Quinto Apollonii conicorum libro ab Halleio ex Arabico sermone in Latinum converso theoremata de maximis et minimis continentur et in his complura de parabola inveniuntur; sed nullum est problema, quod ad hunc Pappi locum referri possit. Quare in promptu est suspicari πρώτῳ pro πέμπτῳ legendum esse, ac vituperari Apollonii primi libri propositionem 52, id est problema de parabolae in plano constructione. At vero alia quaestio est, num iure Apollonius reprehensus sit.

6) Conf. infra adnot. 1 ad propos. 42.

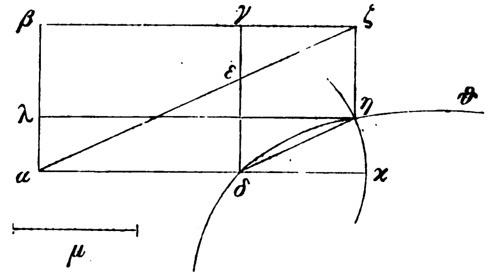
7) Idem theorema accuratius enuntiatum vide apud Archim. de helic. propos. 18.



*) Quia propter elem. 1, 43 rectangulum $\beta\gamma\varepsilon\pi$ rectangulo $\varepsilon o\nu\delta$ aequale est, rectangulum igitur $\alpha\beta\gamma\delta$ aequale est rectangulo $\alpha\pi o\nu$, id est rectangulo sub $\beta\zeta$ $\varepsilon\delta$, id est sub $\beta\zeta$ $\zeta\eta$ (*Co*).

τὸ Η ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ. ἀλλὰ καὶ πρὸς θέσει κύκλου περιφερείᾳ· δοθὲν ἄρα τὸ Η.

61 λζʹ. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα τῷ μεγέθει ἡ Μ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔστω ἡ ΔΚ, καὶ γεγράφθω



διὰ μὲν τοῦ Δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒΓ ὑπερβολὴ ἡ ΔΗΘ (τοῦτο γὰρ ἑξῆς ἀποδείξομεν), διὰ δὲ τοῦ Κ περὶ κέντρον τὸ Δ κύκλου περιφέρεια ἡ ΚΗ τέμνουσα τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΓ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΗΖ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἴση ἐστὶν τῇ Μ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΔ καὶ τῇ ΚΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΛ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΖΗ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΔΑ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΒΓ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΖΗ· ἡ ἄρα ΕΔ ἴση τῇ ΖΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΔΕΖΗ· ἴση ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΔΗ, τουτέστιν τῇ ΔΚ, τουτέστιν τῇ Μ.

62 ληʹ. Δεδειγμένου δὴ τούτου τρίχα τέμνεται ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος οὕτως.

Ἔστω γὰρ ὀξεῖα πρότερον ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπό τινος σημείου κάθετος ἡ ΑΓ, καὶ συμπληρωθέντος τοῦ ΓΖ παρ-

---

1. ὑπερβολὴν ABS, corr. *Co* 2. περιφέρεια ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 9. καὶ τῆς $\overline{ΔΓ}$ AB, corr. S 9. 10. τῆς $\overline{ΗΖ}$ A[2] ex τῆς $\overline{*Ζ}$ 13. ἔστιν τὸ ὑπὸ $\overline{ΓΔΑ}$ A, τῷ corr. BS 15. πρὸς $\overline{ΖΗ}$ A[2] ex πρὸς $\overline{*Η}$ 16. τὸ $\overline{δεζη}$ B[s], τὸ $\overline{ΔΕ}$ $\overline{ΖΗ}$ AS 18. $\overline{λη}$ add. S 20. γὰρ ὀξεῖα B[3], γὰρ ///// A, γὰρ ..... B[1]S καὶ ἀπό τινος BS, /// /πὸ //νος A

ad hyperbolam[1]; sed idem etiam ad circuli circumferentiam positione *datam;* ergo punctum η datum est.

XXXVII. Componetur problema sic. Sit datum parallelogrammum *rectangulum* $\alpha\beta\gamma\delta$, et magnitudine data recta μ, et huic, *productâ* $\alpha\delta$, aequalis sit $\delta\varkappa$, et describatur per punctum δ circa[2]) asymptotos $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ hyperbola $\delta\eta\vartheta$ (hoc enim deinceps *propos.* 33 demonstrabimus), et per punctum $\varkappa$ circa centrum δ circuli circumferentia $\varkappa\eta$ hyperbolam in puncto η secans, et ipsi $\delta\gamma$ parallelâ ductâ $\eta\zeta$, *quae productam* $\beta\gamma$ *in* ζ *secet,* iungatur $\zeta\alpha$ *rectam* $\gamma\delta$ *in puncto* ε *secans;* dico rectam $\varepsilon\zeta$ ipsi μ aequalem esse.

Iungatur enim $\eta\delta$, et rectae $\varkappa\alpha$ parallela ducatur $\eta\lambda$; est igitur

$\zeta\eta \cdot \eta\lambda = \beta\zeta \cdot \zeta\eta$, et *propter Apollon. conic.* 2, 12

$\beta\zeta \cdot \zeta\eta = \gamma\delta \cdot \delta\alpha$, id est

$\beta\zeta \cdot \zeta\eta = \beta\gamma \cdot \gamma\delta$; ergo

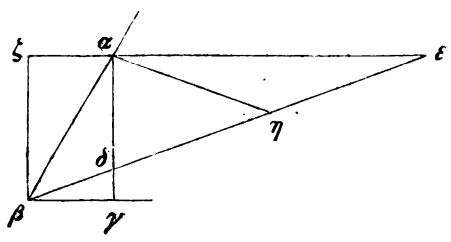
$\beta\zeta : \beta\gamma = \gamma\delta : \zeta\eta$, id est (*quia* $\beta\zeta : \beta\gamma = \alpha\zeta : \alpha\varepsilon$, et *dirimendo* $\gamma\zeta : \beta\gamma = \varepsilon\zeta : \alpha\varepsilon = \gamma\varepsilon : \delta\varepsilon$, *et componendo* $\beta\zeta : \beta\gamma = \gamma\delta : \delta\varepsilon$)

$= \gamma\delta : \delta\varepsilon$; ergo est

$\zeta\eta = \delta\varepsilon$.

Et sunt parallelae; ergo parallelogrammum est $\delta\varepsilon\zeta\eta$; itaque $\varepsilon\zeta = \delta\eta = \delta\varkappa = \mu$.

XXXVIII. Hoc igitur demonstrato datus angulus rectilineus sic tripartito secatur. Prop. 32



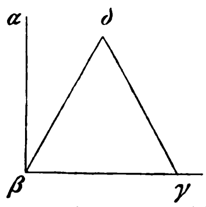
Sit enim primum angulus acutus $\alpha\beta\gamma$, et a quolibet *rectae* $\beta\alpha$ puncto ducatur perpendicularis $\alpha\gamma$, et completo

1) "Ex conversa 12 secundi libri conicorum Apollonii; sequitur enim ut punctum η sit ad hyperbolam eandem, in qua est punctum δ" *Co.* Et conf. compositionem problematis.

2) Graecum $\pi\varepsilon\varrho\grave{\iota}$ eodem sensu redit infra propos. 33 et VII propos. 204. 205. 208, ubi Halleius quoque *circa* interpretatus est. Fortasse *iuxta* aptius videri poterat; sed ipsum vocabulum a Graeco scriptore usurpatum retinere maluimus.

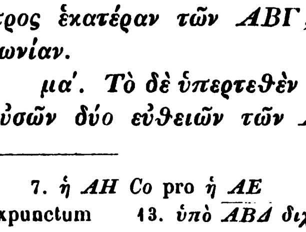
αλληλογράμμου ἡ ΖΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ παραλληλογράμμου ὄντος ὀρθογωνίου τοῦ ΓΖ κείσθω μεταξὺ τῶν ΕΔΓ εὐθεῖα ἡ ΕΔ νεύουσα ἐπὶ τὸ Β ἴση τῇ διπλασίᾳ τῆς ΑΒ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν γενέσθαι προγέγραπται)· λέγω δὴ ὅτι τῆς δοθείσης γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ τρίτον μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΕΔ δίχα τῷ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ ΗΑ ΗΕ ἴσαι εἰσίν· διπλῆ ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΑΗ. ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΒ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΗ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΔ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ διπλασία τῆς ὑπὸ ΑΕΔ, τουτέστιν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἄρα διπλῆ ἐστιν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ. καὶ ἐὰν τὴν ὑπὸ ΑΒΔ δίχα τέμωμεν, ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τρίχα τετμημένη.

63 

λθʹ. Ἐὰν δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθὴ τυγχάνῃ, ἀπολαβόντες τινὰ τὴν ΒΓ ἰσόπλευρον ἐπ' αὐτῆς γράψομεν τὸ ΒΔΓ, καὶ τὴν ὑπὸ ΔΒΓ γωνίαν δίχα τεμόντες ἕξομεν τρίχα τετμημένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν.

64 μʹ. Ἔστω δὲ ἀμβλεῖα ἡ γωνία καὶ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΔΒΓ τρίτον ἀπειλήφθω μέρος ἡ ὑπὸ ΔΒΖ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ὀξείας γωνίας τρίτον ἡ ὑπὸ ΕΒΔ (ταῦτα γὰρ ἡμῖν προδέδεικται)· καὶ ὅλης ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τρίτον μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΖ. ἐὰν δὲ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ ἴσην συστησώμεθα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΒΓ, τρίχα τεμοῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.



65 μαʹ. Τὸ δὲ ὑπερτεθὲν πρόβλημα νῦν ἀναλύσομεν. θέσει οὐσῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ καὶ δοθέντος σημείου τοῦ

7. ἡ ΑΗ Co pro ἡ ΑΕ 12. διπλῆ bis scriptum in A, sed prius expunctum 13. ὑπὸ ΑΒΔ διχατέμωμεν (sic) ἔσται ἡ ὑπὸ bis scripta

parallelogrammo $\alpha\gamma\beta\zeta$ producatur $\zeta\alpha$ ad punctum ε, *quod quidem ita sumatur*, ut, iunctà $\beta\varepsilon$, segmentum eius $\delta\varepsilon$ inter rectas $\varepsilon\alpha$ $\alpha\gamma$ abscissum aequale sit duplae $\alpha\beta$ (hoc enim, si sit parallelogrammum rectangulum, *velut* $\alpha\gamma\beta\zeta$, fieri posse superiore *problemate* demonstratum est); iam dico dati anguli $\alpha\beta\gamma$ tertiam partem esse angulum $\varepsilon\beta\gamma$.

Bifariam enim recta $\delta\varepsilon$ secetur in puncto η, et iungatur $\alpha\eta$; aequales igitur inter se sunt rectae $\delta\eta$ $\eta\alpha$ $\eta\varepsilon$*), ideoque $\delta\varepsilon = 2\,\alpha\eta$. Sed *ex constructione* est $\delta\varepsilon = 2\,\alpha\beta$; ergo $\alpha\beta = \alpha\eta$, et $\angle\, \alpha\beta\delta = \angle\, \alpha\eta\beta$. Sed est $\angle\, \alpha\eta\beta = 2\,\angle\, \alpha\varepsilon\beta = 2\,\angle\, \delta\beta\gamma$; ergo etiam $\angle\, \alpha\beta\delta = 2\,\angle\, \delta\beta\gamma$. Itaque, si angulum $\alpha\beta\delta$ bifariam secuerimus, angulus $\alpha\beta\gamma$ erit tripartito sectus.

XXXIX. Sed si datus angulus $\alpha\beta\gamma$ rectus sit, sumemus rectae $\beta\gamma$ quodlibet punctum γ, et in basi $\beta\gamma$ aequilaterum triangulum $\beta\delta\gamma$ describemus, et angulo $\delta\beta\gamma$ bifariam secto habebimus angulum $\alpha\beta\gamma$ tripartito sectum.

XL. Sit autem angulus $\alpha\beta\gamma$ obtusus, et rectae $\beta\gamma$ perpendicularis *ducatur* $\beta\delta$, et anguli $\delta\beta\gamma$ abscindatur tertia pars angulus $\delta\beta\zeta$, atque item anguli acuti $\alpha\beta\delta$ tertia *pars* angulus $\varepsilon\beta\delta$ — haec enim a nobis supra (*XXXIX et XXXVIII*) demonstrata sunt — ergo totius $\alpha\beta\gamma$ anguli tertia pars est angulus $\varepsilon\beta\zeta$. Iam si angulo $\varepsilon\beta\zeta$ aequalem ad utramque rectarum $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ constituerimus, datum angulum *obtusum* tripartito secabimus.

XLI. Iam vero problema *supra* (*XXXVII*) dilatum sol- Prop. 33
vemus[1]). Duabus rectis $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, *angulum quemvis ad* β *con-*

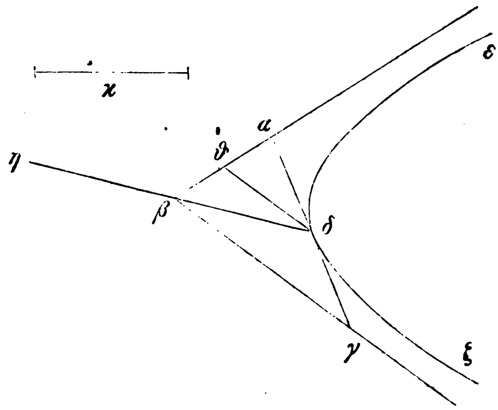
*) Nam quia rectus est angulus $\delta\alpha\varepsilon$, punctum α est in circumferentia semicirculi $\delta\alpha\varepsilon$, cuius centrum η. (*Co.*)

1) Idem problema breviore ratione solvit Apollonius conic. 2 propos. 4, neque tamen haec quam Pappus tradit resolutio propria quadam laude caret. Unus problematis casus, si rectum angulum asymptoti contineant, infra VII propos. 204 tractatur, ubi vide adnot. 1.

in A 15. $\overline{\Delta\Theta}$ A[1] in marg. (S), om. B 18. *ὑπο* $\overline{\Delta\Gamma}$ *γωνίαν* AB, corr. S 21. $\overline{\mu}$ A[1] in marg. (S), om. B 26. *ὅλης Hu* auctore *Co* pro *ὅλη* 28. 29. *ἐὰν δὲ τῇ ὑπὸ EBZ* add. *Hu* 29. *συστησώμεθα* AS, *στησόμεθα* B 32. $\overline{\mu\alpha}$ A[1] in marg. (S), om. B

Δ γράψαι διὰ τοῦ Δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒΓ ὑπερβολήν.

Γεγονέτω, καὶ γεγράφθω ἡ ΕΔΖ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ ΑΔΓ, καὶ διάμετρος ἡ ΗΒΔ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΘ. θέσει ἄρα αἱ ΗΔ ΔΘ, καὶ



δοθὲν τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒΓ τῆς ὑπερβολῆς, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας αὐτῶν τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΗΔ εἴδους· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν κωνικῶν ἀποδέδεικται. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ, ἴση καὶ ἡ ΒΘ τῇ ΘΑ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΑ. καὶ δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΔΓ. καὶ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἡ ΑΓ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ δοθέν ἐστιν. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ πρὸς τῇ ΗΔ εἴδει· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ πρὸς τῇ ΗΔ εἶδος. καὶ δοθεῖσα ἡ ΗΔ (διπλῆ γάρ ἐστιν τῆς ΒΔ τῷ μεγέθει δεδομένης διὰ τὸ δοθὲν ἑκάτερον εἶναι τῶν Β Δ)· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά. γέγονεν δὴ πρόβλημα τοιοῦτον· θέσει καὶ μεγέθει δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῆς τε ΗΔ καὶ τῆς ὀρθίας γράψαι περὶ διάμετρον τὴν ΗΔ ὑπερβολήν, ἧς

---

3. *ἀπὸ*] *διὰ* voluit *Co* (at Graecus scriptor hoc significasse videtur:

tinentibus [2]), positione datis, datoque puncto δ, describatur per δ hyperbola circa asymptotos $\alpha\beta$ $\beta\gamma$.

Factum iam sit, et sit descripta *hyperbola* $\varepsilon\delta\zeta$, et ducatur per punctum δ tangens eam recta $\alpha\delta\gamma$, et diametrus $\eta\beta\delta$, et rectae $\beta\gamma$ parallela $\delta\vartheta$. Ergo rectae $\eta\delta$ $\delta\vartheta$ positione *datae sunt* (*dat. 26. 28*), et datum punctum ϑ (*dat. 25*). Et quoniam sunt rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ asymptoti hyperbolae, et tangens recta $\alpha\gamma$, aequales igitur sunt rectae $\alpha\delta$ $\delta\gamma$, et id quod ab utraque fit quadratum aequale est quartae parti figurae ad *diametrum* $\eta\delta$ *constitutae* (haec enim *ab Apollonio* secundi conicorum libri *propositione 3* demonstrata sunt). Iam quia est $\gamma\delta = \delta\alpha$, *propter parallelas* $\gamma\beta$ $\delta\vartheta$ est etiam $\beta\vartheta = \vartheta\alpha$. Et data est $\beta\vartheta$; ergo etiam $\vartheta\alpha$ data est (*dat. 2*). Et datum est punctum ϑ; ergo etiam α datum est (*dat. 27*); itaque recta $\alpha\delta$ positione ac magnitudine data est (*dat. 26*), itemque $\alpha\gamma$ (*quia* $\alpha\delta = \delta\gamma$). Ergo etiam quadratum ab $\alpha\gamma$ datum est (*dat. 52*), et est aequale figurae ad $\eta\delta$ *constitutae* [3]); ergo haec quoque figura data est. Et *magnitudine* data est recta $\eta\delta$ (est enim dupla $\beta\delta$, quae *propter dat. 26* magnitudine data est, quia utrumque punctorum β δ positione datum); ergo etiam rectum figurae latus (*sive parametrus*) datum est (*dat. 57*). Itaque problema huc reductum est: positione et magnitudine rectis $\eta\delta$ et *alterá, quae* rectum latus *vocatur*, datis, circa diametrum $\eta\delta$ describatur hyperbola,

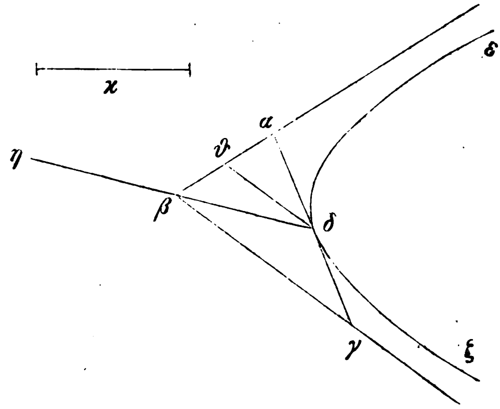
2) Haec addita sunt ex Apollonii l. c.: *Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α.*

3) *Τὸ πρὸς τῇ ΗΔ εἶδος* dicitur rectangulum quod diametro $\eta\delta$ et parametro $\varkappa$ continetur. Conf. Apollon. conic. 2 propos. 4 et ipsum Pappum infra VII propos. 204, ac vide proximam adnot.

---

a puncto δ in utramque partem ducatur tangens δα δγ) 5. *αἱ* $\overline{H\Delta}$ $\overline{\Delta O}$ ABS, corr. *Co* 12. *καὶ ἡ* $\overline{\Theta A}$ A[2] in rasura (pro *καὶ* $\overline{\Theta A}$, ut videtur) 13. *καὶ* (ante *δοθεῖσα*) add. *Hu* auctore *Co* 14. *τὸ ἀπὸ ΑΓ* *Co*, *τὸ* $\overline{\Gamma\Delta}$ A[s]S, *τὸ* $\overline{\delta\gamma}$ B cod. *Co* 16. 17. *δεδομενηι διὰ δοθὲν* A, *δεδομένη διὰ δοθὲν* BS, corr. *Hu* auctore *Co* 17. *τῶν* $\overline{B\Delta}$ AS, distinx. B *παρ' ἣν δύνανται ἔσται ἡ λοιπὴ εὐθεῖα, καὶ αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΗΔ παράλληλοι ἔσονται θέσει τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΑΓ. τοῦτο δὲ αναλέλυται ἐν τῷ πρώτῳ τῶν κωνικῶν.*

66 *μβ'. Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Δ,*



καὶ τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘ, τῇ δὲ ΒΘ ἴση ἡ ΘΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΒΔ ἐκβεβλήσθω καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΒΗ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῆς ΗΔ καὶ ἑτέρας τινὸς τῆς Κ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΗΔ καὶ ὀρθίαν τὴν Κ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΕΔΖ, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΗΔ παραλλήλους εἶναι τῇ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. καὶ ἔστιν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ ἴση (ἐπεὶ καὶ ἡ ΒΘ τῇ ΘΑ), καὶ φανερὸν ὅτι τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΔ ΔΓ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΗΔ εἴδους· αἱ ἄρα ΑΒΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ΕΔΖ ὑπερβολῆς· γέγραπται ἄρα διὰ τοῦ Δ περὶ τὰς δοθείσας εὐθείας ἀσυμπτώτους ὑπερβολή.

67 *μγ'. Καὶ ἄλλως τῆς δοθείσης περιφερείας τὸ τρίτον ἀφαιρεῖται μέρος, χωρὶς τῆς νεύσεως, διὰ στερεοῦ τόπου τοιούτου.*

cuius recta ad quam quadrata applicantur erit altera illa *quam diximus*, et eae quae ordinatim ad $\eta\delta$ deducuntur parallelae erunt rectae cuidam positione datae, *scilicet* $\alpha\gamma$ *). Hoc autem solutum est primi conicorum libri *propositione 53*.

XLII. Componetur hoc modo. Sint rectae positione datae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$, et datum punctum δ, et ipsi $\beta\gamma$ parallela ducatur $\delta\vartheta$, et *ponatur* $\vartheta\alpha = \beta\vartheta$, et iuncta $\alpha\delta$ producatur ad γ, atque item iuncta $\delta\beta$ producatur, ipsique $\delta\beta$ aequalis ponatur $\beta\eta$, et quadrato ab $\alpha\gamma$ aequale sit rectangulum quod recta $\eta\delta$ et altera quadam $\varkappa$ continetur, et circa diametrum $\eta\delta$ et rectum latus (*sive parametrum*) $\varkappa$ describatur hyperbola $\varepsilon\delta\zeta$, ita ut eae quae *ordinatim* deducuntur ad $\eta\delta$ ipsi $\alpha\gamma$ parallelae sint; ergo recta $\alpha\gamma$ *coni* sectionem tangit (*conic. 1, 32*). Et est $\alpha\delta = \delta\gamma$ (*propter parallelas* $\delta\vartheta$ $\gamma\beta$, quia $\alpha\vartheta = \vartheta\beta$), atque apparet quadratum ab utraque rectarum $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ quartam partem esse figurae quae est ad $\eta\delta$ **); ergo rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ asymptoti sunt hyperbolae $\varepsilon\delta\zeta$ (*conic. 2, 1. 2*); itaque per punctum δ circa datas rectas asymptotos hyperbola descripta est.

XLIII. Aliter datae circumferentiae tertia pars, non adsumpta inclinatione, abscinditur per huiusmodi locum solidum. Prop. 34

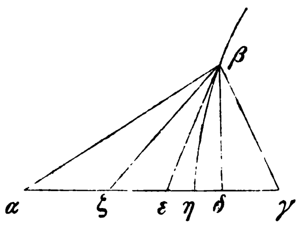
*) Horum verborum explicatio cum ex omni Apollonii conicorum opere tum e libri primi propos. 12 et 58 pendet. Capita doctrinae Apollonianae breviter ac luculenter exponit Chasles, *Aperçu* etc. p. 15 sq. versionis German.

**) Quoniam ex constructione est $\alpha\gamma^2 = \varkappa \cdot \eta\delta$, et $\alpha\delta = \delta\gamma = \frac{1}{2}\,\alpha\gamma$, est igitur $\alpha\delta^2 = \delta\gamma^2 = \frac{1}{4}\,\alpha\gamma^2 = \frac{1}{4}\,\varkappa \cdot \eta\delta$. Rectangulum autem quod rectis $\varkappa$ $\eta\delta$ continetur ipsa est figura quae supra "ad $\eta\delta$" (τὸ πρὸς τῇ *ΗΔ* εἶδος) dicitur (adnot. 3).

---

1. δύνανται AB, δύναται S ἡ λοιπὴ] ἡ *K* coni. *Co* (at conf. ἑτέρας τινὸς cap. 66 et παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν Apollon. conic. 1, 53) 5. $\overline{\mu\beta}$ add. S 11. 12. καὶ περὶ διάμετρον τὴν *ΗΔ* καὶ ὀρθίαν τῇ add. A² in marg. (BS); post τῇ in A una littera periit margine folii decurtato, itaque lacuna in S, $\bar{\alpha}$ autem interpolavit B, τὴν *K* corr. *Co* 20. $\overline{\mu\Gamma}$ A¹ in marg. (BS)

Θέσει ἡ διὰ τῶν Α Γ, καὶ ἀπὸ δοθέντων ἐπ' αὐτῆς τῶν Α Γ κεκλάσθω ἡ ΑΒΓ διπλασίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΑΓΒ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΓΑΒ· ὅτι τὸ Β πρὸς ὑπερβολῇ.



Ἤχθω κάθετος ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΔΕ· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΒΕ ἴση ἔσται τῇ ΑΕ. κείσθω καὶ τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· τριπλασία ἄρα ἡ ΓΖ τῆς ΓΔ. ἔστω καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΗ τριπλασία· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Η, καὶ λοιπὴ ἡ ΑΖ τῆς ΗΔ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ ΒΕ ΕΖ ὑπεροχή ἐστιν τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΑ ΑΖ τῶν αὐτῶν ὑπεροχή, ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΑΖ, τουτέστιν τὸ τρὶς ὑπὸ ΑΔΗ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΔ· πρὸς ὑπερβολῇ ἄρα τὸ Β, ἧς πλαγία μὲν τοῦ πρὸς ἄξονι εἴδους ἡ ΑΗ, ἡ δὲ ὀρθία τριπλασία τῆς ΑΗ. καὶ φανερὸν ὅτι τὸ Γ σημεῖον ἀπολαμβάνει πρὸς τῇ Η κορυφῇ τῆς τομῆς τὴν ΓΗ ἡμίσειαν τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς τῆς ΑΗ.

Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεήσει γὰρ τὴν ΑΓ τεμεῖν ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΗ τῆς ΗΓ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΑΗ γράψαι διὰ τοῦ Η ὑπερβολήν, ἧς ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ τριπλασία τῆς ΑΗ, καὶ δεικνύναι ποιοῦσαν αὐτὴν τὸν εἰρημένον διπλάσιον λόγον τῶν γωνιῶν. καὶ ὅτι τῆς δοθείσης κύκλου περιφερείας τὸ γ' ἀποτέμνει μέρος ἡ τοῦ-

---

1. *τῶν* $\overline{ΑΓ}$ AB[1], distinx. B[2] (vel B[3]) S   *ἐπ' Hu* auctore *Co* pro *ἀπ'*   2. *τῶν* $\overline{ΑΓ}$ AS, distinx. B   *ποιοῦσαν* AS, corr. B   2. 3. *τὴν ὑπὸ ΑΓΒ Co* pro *τὴν ὑπὸ* $\overline{ΑΒΓ}$ 4. *προσυπερβολη* A, *πρὸς ὑπερβολὴν* B, corr. S   10. *ἔστω*] *κείσθω* coni. *Hu*   13. 14. *τῶν* pro *τὸ* corr. et *τὸ ἀπὸ ΒΔ* add. *Co*   15. *ἄρα Hu* pro *ἴσον*   16. *τρὶς ὑπὸ ΑΔΗ Co* pro *τρὶς ὑπὸ* $\overline{ΔΑΗ}$ *προσυπερβολή* AB, corr. S   19. *τὴν ΓΗ* om. S   24. *δεικνύναι Hu* pro *δείκνυται*   25. *τῶν γωνιῶν* om. S   26. *τὸ* $\overline{Γ}$ *ἀποτέμνειν* ABS, corr. *Hu* auctore *Co*   *ἡ* B, *η* A, *ἢ* S

Positione *data sit* recta $\alpha\gamma$, et a datis in ea punctis α γ inflectatur $\alpha\beta\gamma$, quae angulum $\alpha\gamma\beta$ duplum anguli $\gamma\alpha\beta$ efficiat [1]; dico punctum β esse ad hyperbolam [2].

Ducatur perpendicularis $\beta\delta$, et ipsi $\gamma\delta$ aequalis abscindatur $\delta\varepsilon$; ergo iunctâ $\beta\varepsilon$ *erit* $\angle\,\beta\varepsilon\gamma = \angle\,\beta\gamma\alpha = 2\,\angle\,\gamma\alpha\beta$ (*ex hypothesi*). *Sed est etiam* $\angle\,\beta\varepsilon\gamma = \angle\,\gamma\alpha\beta + \angle\,\alpha\beta\varepsilon$; *ergo* $\angle\,\gamma\alpha\beta = \angle\,\alpha\beta\varepsilon$, *itaque* erit $\beta\varepsilon = \alpha\varepsilon$. Ponatur etiam $\varepsilon\zeta = \delta\varepsilon$; ergo est $\gamma\delta = \frac{1}{3}\,\gamma\zeta$. *Sed* ponatur etiam $\gamma\eta = \frac{1}{3}\,\alpha\gamma$ (*elem.* 6, 9); ergo datum erit punctum η (*dat.* 2. 27), et erit $\gamma\eta - \gamma\delta = \frac{1}{3}\,(\alpha\gamma - \gamma\zeta)$, *id est* $\eta\delta = \frac{1}{3}\,\alpha\zeta$. Et quia est

$\beta\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta^2 = \beta\delta^2$ (*est enim* $\beta\delta^2 = \beta\varepsilon^2 - \varepsilon\delta^2$, *et* $\varepsilon\delta = \varepsilon\zeta$), et

$\beta\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta^2 = \delta\alpha\cdot\alpha\zeta$ (*est enim propter elem.* 2, 6 $\delta\alpha\cdot\alpha\zeta = \alpha\varepsilon^2 - \varepsilon\zeta^2$, *et, ut demonstravimus,* $\alpha\varepsilon = \beta\varepsilon$), est igitur

$\delta\alpha\cdot\alpha\zeta = \beta\delta^2$, id est (*quia demonstravimus esse* $\alpha\zeta = 3\,\eta\delta$)

$3\,\alpha\delta\cdot\delta\eta = \beta\delta^2$.

Ergo punctum β est ad hyperbolam, cuius transversum latus figurae ad axem *constitutae* est $\alpha\eta$, rectum autem latus triplo maius quam $\alpha\eta$ *). Et apparet rectam $\gamma\eta$, quae inter punctum γ et *coni* sectionis verticem η abscinditur, dimidiam partem esse transversi figurae lateris $\alpha\eta$.

Et compositio manifesta est. Oportebit enim rectam $\alpha\gamma$ ita secare, ut $\alpha\eta$ duplo maior sit quam $\eta\gamma$, et circa axem $\alpha\eta$ per punctum η describere hyperbolam, cuius rectum figurae latus sit triplo maius quam $\alpha\eta$, et demonstrare eam efficere duplam quam diximus angulorum proportionem. Atque hyperbolam hac ratione descriptam abscindere tertiam datae

1) Id est, punctum β ita sumatur, ut trianguli $\alpha\beta\gamma$ angulus $\alpha\gamma\beta$ duplus sit alterius qui est ad basim. Sed angulus $\alpha\gamma\beta$ aut acutus est, ut in hac demonstratione ac figura scriptor supponit, aut rectus, aut obtusus, quibus de casibus vide append.

2) Significat scriptor, quotcunque puncta β hoc modo sumantur, ea omnia esse ad eam hyperbolam quam postea ipse describit.

*) "Cum enim rectangulum $\delta\alpha\cdot\alpha\zeta$, hoc est quadratum ex $\beta\delta$, triplum sit rectanguli $\alpha\delta\cdot\delta\eta$, habebit quadratum ex $\beta\delta$ ad rectangulum $\alpha\delta\cdot\delta\eta$ proportionem eandem quam figurae rectum latus ad transversum, quare ex conversa 21. primi libri conicorum punctum β in hyperbola erit" *Co.* Et conf. p. 281 adnot. *

τον γραφομένη τὸν τρόπον ὑπερβολῇ συνιδεῖν ῥάδιον τῶν Α Γ σημείων περάτων τῆς περιφερείας ὑποκειμένων.

68 *μδʹ. Ἑτέρως δὲ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ τρίχα τεμεῖν τὴν γωνίαν ἢ περιφέρειαν ἐξέθεντό τινες ἄνευ τῆς νεύσεως. ἔστω δὲ ἐπὶ περιφερείας ὁ λόγος· οὐδὲν γὰρ διαφέρει γωνίαν ἢ περιφέρειαν τεμεῖν.*

Γεγονέτω δή, καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας τρίτον ἀπειλήφθω μέρος ἡ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΑ· διπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ΓΔ, καὶ κάθετοι αἱ ΔΕ ΖΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΕ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖΓ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν δύο δοθέντα ἐστὶν τὰ Ε Γ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΒΖ, καὶ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖΓ, τὸ Β ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ. ἀλλὰ καὶ πρὸς θέσει περιφερείᾳ· δοθὲν ἄρα τὸ Β. καὶ ἡ σύνθεσις φανερά.

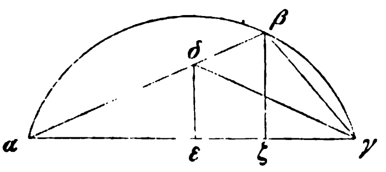
69 *μεʹ. Τὸ μὲν οὖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν τρίχα τεμεῖν στερεόν ἐστιν, ὡς προδέδεικται, τὸ δὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν γραμμικόν ἐστιν καὶ δέδεικται μὲν ὑπὸ τῶν νεωτέρων, γραφήσεται δὲ καὶ ὑφ᾽ ἡμῶν διχῶς.*

---

1. *συνειδειν* A, corr. BS 1. 2. *τῶν* $\overline{ΑΓ}$ A, distinx. BS 3. $\overline{μΔ}$ A[1] in marg. (BS) 5. *οὐδὲν* *Hu* auctore *Co* pro *οὐδὲ* 8. post *αἱ* *ΑΒ ΒΓ* add. *μέρος ἡ* $\overline{ΒΓ}$ ABS, del. *Co* 9. *ἄρα ἡ* $\overline{ΑΙΒ}$ AB[3], *ἄρα ἡ* $\overline{αβγ}$ B[1], corr. S 10. *αἱ* $\overline{ΔΕΖΒ}$ A, distinx. BS 11. *ἡ* $\overline{ΑΔ}$ *τῆς* AS, *τῇ* corr. S 15. *ἡ ΒΓ* (ante *τῆς ΕΖ*) *Co* pro *ἡ* $\overline{Β}$ 17. *τὰ* $\overline{ΕΓ}$ AB[1]S, distinx. B[3] (vel B[2]) 18. 19. *προσυπερβολη* A, acc. gravem add. B, corr. S 19. *καὶ τὰ προσθέσει περιφερείαις* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 21. $\overline{με}$ A[1] in marg. (BS) 23. *η περιφερεια* A[1], *ἢ περιφερειαν* corr. recentior manus (diversa, ut videtur, ab A[2]), *ἢ περιφέρειαν* BS

circuli circumferentiae partem facile intellegitur, siquidem puncta α γ termini circumferentiae supponuntur[3]).

XLIV. Alia ratione nonnulli resolutionem *problematis* de tripartita anguli vel circumferentiae sectione exposuerunt sine inclinatione. Sit autem in circumferentia proportio; nihil enim differt, angulumne an circumferentiam secemus.



Factum iam sit, et circumferentiae $\alpha\beta\gamma$ tertia pars $\beta\gamma$ sit abscissa, et iungantur rectae $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$; ergo est $\angle\, \alpha\gamma\beta = 2 \angle\, \beta\alpha\gamma$. Bifariam secetur angulus $\alpha\gamma\beta$ rectâ $\gamma\delta$, et *ducantur* perpendiculares $\delta\varepsilon$ $\beta\zeta$; est igitur $\alpha\delta = \delta\gamma$**), itaque etiam $\alpha\varepsilon = \varepsilon\gamma$; ergo datum est punctum ε (*dat.* 7. 27). Iam quia est $\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\delta : \delta\beta$ (*elem.* 6, 3) $= \alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta$, vicissim igitur est $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \gamma\beta : \varepsilon\zeta$. Sed est $\alpha\gamma = 2\,\alpha\varepsilon$; ergo etiam $\gamma\beta = 2\,\varepsilon\zeta$, ideoque $\gamma\beta^2 = 4\,\varepsilon\zeta^2$, id est $\beta\zeta^2 + \zeta\gamma^2 = 4\,\varepsilon\zeta^2$. Iam quia data sunt duo puncta ε γ, et perpendicularis *ducta est* $\beta\zeta$, et *data*[4]) est proportio $\varepsilon\zeta^2 : \beta\zeta^2 + \zeta\gamma^2$, punctum igitur β est ad hyperbolam[5]). Sed idem est ad circumferentiam positione *datam;* ergo datum est punctum β. Et compositio manifesta est.

XLV. Datum quidem angulum vel circumferentiam tripartito secare solidum est, ut demonstravimus; at datum angulum vel circumferentiam secare in datam proportionem lineare est, idque demonstratum a recentioribus; sed a nobis quoque duabus rationibus ostendetur. Prop. 35

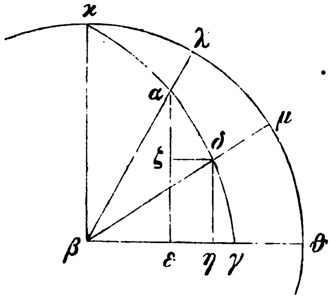
3) Latius problematis compositionem persequitur Commandinus; praeterea multa hoc loco addi possunt, quae ad omne τόπων στερεῶν genus pertineant.

**) "Quia anguli $\overline{\delta\alpha\gamma}$ $\overline{\delta\gamma\alpha}$ sunt aequales" V[2].

4) Est scilicet $\varepsilon\zeta^2 : \beta\zeta^2 + \zeta\gamma^2 = 1 : 4$, ut statim demonstratum est.

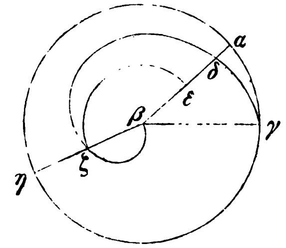
5) "Demonstratur hoc a Pappo ad finem septimi libri propositione 237" *Co;* nihilo tamen minus idem interpres suo ingenio aliam et resolutionem et compositionem problematis apposuit.

70 *Ἔστω γὰρ κύκλου τοῦ ΚΑΘ περιφέρεια ἡ ΑΘ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὴν εἰς δοθέντα λόγον.*



Ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΑΒΘ, καὶ τῇ ΒΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ γεγράφθω τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ ΚΑΔΓ, καὶ κάθετος ἀχθεῖσα ἡ ΑΕ τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸν δοθέντα λόγον εἰς ὃν διελεῖν θέλομεν τὴν γωνίαν, καὶ τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΔ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΒΔ, καὶ κάθετος ἡ ΔΗ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΔΗ, τουτέστιν πρὸς ΖΕ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΓ, διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ἡ ἀπὸ ΑΒΔ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΓ, τουτέστιν ἡ ΑΜ περιφέρεια πρὸς ΜΘ.

71 *μς'. Ἑτέρως δὲ τέμνεται κύκλου τοῦ ΑΗΓ ἡ ΑΓ περιφέρεια. ὁμοίως ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΑΒΓ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Β ἕλιξ ἡ ΒΖΔΓ, ἧς ἡ ἐν τῇ γενέσει εὐθεῖα ἡ ΓΒ, καὶ τῷ δοθέντι λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε περὶ κέντρον τὸ Β κύκλου περιφέρεια ἡ ΕΖ τέμνουσα τὴν ἕλικα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἕλικα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ, τουτέστιν πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΑΗΓ περιφέρεια πρὸς ΓΗ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΗ περιφέρεια πρὸς*



---

6. *τετραγωνίζουσα* A[1] ex *τετραγωνονουσα* 7. $\overline{ΚΑ}$ $\overline{ΔΓ}$ A, coniunx. BS 18. *πρὸς τῆι ὑπὸ* $\overline{ΔΒΓ}$ ABS, corr. *Hu* 19. $\overline{μς}$ A[1] in marg. (BS) *κύκλου* add. *Hu* auctore *Co* 21. *διὰ τοῦ Β*] *ἀπὸ τοῦ Β* coni. *Hu* collato cap. 31 *ἕλιξ ἡ* paene evanuerunt in A, itaque *ἕλιξ* omissum in cod. *Co*, *διὰ τοῦ * **** ἡ* B[1], corr. B[3]S *ΒΖΔΓ*] $\overline{ΖΞ}$ $\overline{ΔΓ}$

Sit enim circuli $\varkappa\lambda\vartheta$ circumferentia $\lambda\vartheta$, quam in datam proportionem secare oporteat.

Ad centrum *circuli ducantur* rectae $\lambda\beta$ $\vartheta\beta$, et ipsi $\vartheta\beta$ perpendicularis $\beta\varkappa$, et per punctum $\varkappa$ describatur linea quadratrix $\varkappa\alpha\delta\gamma$ *rectam* $\beta\lambda$ *in puncto* α *secans* [1]), et ducta perpendicularis $\alpha\varepsilon$ in puncto ζ ita secetur, ut proportio $\alpha\zeta : \zeta\varepsilon$ aequalis sit datae proportioni, in quam angulum secare volumus, et rectae $\beta\gamma$ parallela *ducatur* $\zeta\delta$, et iuncta $\beta\delta$ *producatur ad* μ *punctum circumferentiae*, et *ducatur* perpendicularis $\delta\eta$. Iam quia propter proprietatem lineae *quadratricis* est ut $\alpha\varepsilon$ ad $\delta\eta$, id est ad $\zeta\varepsilon$, ita angulus $\alpha\beta\gamma$ ad angulum $\delta\beta\gamma$ *)、dirimendo igitur est ut $\alpha\zeta$ ad $\zeta\varepsilon$, id est ut data proportio, ita angulus $\alpha\beta\delta$ ad angulum $\delta\beta\gamma$, id est circumferentia $\lambda\mu$ ad $\mu\vartheta$.

XLVI. Aliter autem circuli $\alpha\eta\gamma$ circumferentia $\alpha\gamma$ secatur *hoc modo* [2]).

Similiter ad centrum *ducantur* rectae $\alpha\beta$ $\gamma\beta$, et ab *initio* β describatur helix $\beta\zeta\delta\gamma$, cuius genetrix sit recta $\beta\gamma$ **), et datae proportioni aequalis sit $\delta\varepsilon : \varepsilon\beta$, et per punctum ε circa centrum β describatur circuli circumferentia $\varepsilon\zeta$ helicem in ζ secans, et iuncta $\beta\zeta$ producatur ad η *punctum circumferentiae circuli* $\eta\alpha\gamma$; est igitur propter helicis *proprietatem* ut recta $\delta\beta$ ad $\beta\zeta$, id est ad $\beta\varepsilon$, ita circumferentia $\gamma\eta\alpha$ ad $\gamma\eta$ ***), et dirimendo ut $\delta\varepsilon$ ad $\varepsilon\beta$, ita circumferentia $\alpha\eta$ ad

1) Tacite igitur scriptor supponit datam circumferentiam minorem esse circuli quadrante.

*) Ex huius libri cap. 45 (XXX) extr. efficitur esse ut circumferentias $\varkappa\vartheta : \lambda\vartheta : \mu\vartheta$, ita rectas $\varkappa\beta : \alpha\varepsilon : \delta\eta$; ergo propter elem. 6, 33 est $\alpha\varepsilon : \delta\eta = \angle\lambda\beta\vartheta : \angle\mu\beta\vartheta$.

2) Conf. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch* vol. IV p. 412.

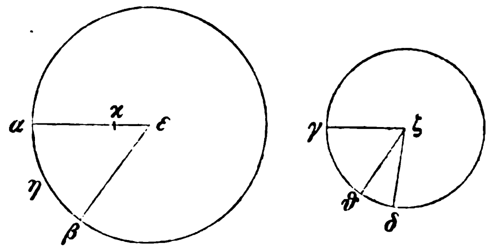
**) Conf. supra cap. 31, unde apparet hoc loco τὴν ἐν τῇ γενέσει εὐθεῖαν, quam nos breviter genetricem diximus, eandem esse atque illam ἀρχὴν τῆς περιφορᾶς.

***) Hoc ipsum demonstrat Archimedes de helic. propos. 14; sed idem etiam ex huius libri propos. 19 sine negotio efficitur.

A (B^3 et, ut videtur, cod. *Co*), $\overline{**\delta\gamma}$ B^1, corr. S *Co*   22. ἔσται AB, corr. S   29. ὡς ἡ $\overline{AB}$ AB cod. *Co*, corr. S *Co*   30. ἡ $\overline{AH\Gamma}$ *Co* pro ἡ $\overline{A\Gamma}$

ΗΓ. ὁ δὲ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΒ λόγος ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι· καὶ ὁ τῆς ΑΗ ἄρα περιφερείας πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ δοθέντι· τέτμηται ἄρα: ~

72 μζ'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὡς δυνατόν ἐστιν ἀπὸ δύο κύκλων ἀνίσων ἴσας περιφερείας ἀφελεῖν.



Γεγονέτω γάρ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἴσαι αἱ ΑΗΒ ΓΘΔ, ἔστω δὲ μείζων ὁ περὶ κέντρον τὸ Ε· μείζων ἄρα ἡ ὁμοία τῇ ΓΘΔ τῆς ΑΗΒ. ἔστω οὖν τῇ ΑΗΒ ὁμοία ἡ ΓΘ· λόγος ἄρα ὁ τῆς ΑΗΒ πρὸς ΓΘ δοθείς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστιν ταῖς ὅλαις τῶν κύκλων περιφερείαις ἢ ταῖς τῶν κύκλων διαμέτροις. ἴση δὲ ἡ ΑΗΒ τῇ ΓΘΔ· λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τῆς ΓΘΔ πρὸς τὴν ΓΘ. καὶ διελόντι. γέγονεν οὖν τέμνειν τὴν ΓΘΔ περιφέρειαν εἰς δοθέντα λόγον κατὰ τὸ Θ· τοῦτο δὲ προγέγραπται.

73 μη'. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν λόγον ἔχουσαν δοθέντα πρὸς τὴν λοιπήν.

Γεγονέτω, καὶ συνεστάτω τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Β διὰ τῶν Α Γ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΔΓ, καὶ ἐκβε-

---

4. $\overline{\mu\zeta}$ A[1] in marg. (BS) 7. ἡ ὅμοια A (ἡ prima m. super vs.), ἡ ὁμοία BS 8. τῇ ΓΘΔ τῆς ΑΗΒ Hu auctore Co pro $\overline{\text{ΓΘΔ}}$ τῆι $\overline{\text{ΑΗΒ}}$ οὖν τῇ Hu, συντῆι A, σὺν τῇ B cod. Co, τῇ S Co 15. $\overline{\mu\eta}^{ov}$ add. B, $\overline{\mu\eta}$ S συστήσας AB cod. Co, corr. S (συστῆσαι Co) 18. τὸ (ante ΑΒΓ) BS, ὁ A 19. τῶν $\overline{\text{ΑΓ}}$ A, distinx. BS

$\eta\gamma$. Sed proportio $\delta\varepsilon : \varepsilon\beta$ aequalis est datae; ergo etiam circumferentiae $\alpha\eta$ ad $\eta\gamma$ proportio aequalis est datae; itaque secta est *circumferentia in datam proportionem.*

XLVII. Hinc manifestum est fieri posse, ut a duobus circulis inaequalibus aequales circumferentiae abscindantur. Prop. 36

Factum enim sit, et abscissae sint aequales circumferentiae $\alpha\eta\beta$ $\gamma\vartheta\delta$; sit autem maior circulus $\alpha\eta\beta$, cuius centrum ε; ergo quae ipsi $\gamma\vartheta\delta$ similis est circumferentia maior est quam $\alpha\eta\beta$. Iam sit circumferentiae $\alpha\eta\beta$ similis $\gamma\vartheta$; ergo proportio circumferentiae $\alpha\eta\beta$ ad $\gamma\vartheta$ data est, quippe quae eadem sit ac *proportio* totarum utriusque circuli circumferentiarum sive diametrorum[1]. Sed *ex hypothesi* circumferentiae $\alpha\eta\beta$ $\gamma\vartheta\delta$ inter se aequales sunt; ergo *etiam* proportio circumferentiae $\gamma\vartheta\delta$ ad $\gamma\vartheta$ data est. Et dirimendo *data est proportio circumferentiae $\delta\vartheta$ ad $\vartheta\gamma$*; ergo *problema* eo reductum est, ut circumferentiam $\gamma\vartheta\delta$ in datam proportionem in puncto ϑ secemus, id quod superiore *propositione* demonstratum est.

Componetur sic. Sit minoris circuli centrum ζ, et ponatur $\alpha\varkappa = \gamma\zeta$, atque circumferentiae $\gamma\vartheta\delta$ aequalem in circulo $\alpha\eta\beta$ abscindere oporteat. Secetur circumferentia $\delta\vartheta\gamma$ in proportionem $\alpha\varepsilon - \gamma\zeta : \gamma\zeta$, id est $\varepsilon\varkappa : \varkappa\alpha$, et circumferentiae $\gamma\vartheta$ similis abscindatur circumferentia $\alpha\eta\beta$; haec igitur ipsi $\gamma\vartheta\delta$ aequalis erit[2].

XLVIII. Aequicrure triangulum constituatur, cuius uterque ad basim angulus ad reliquum habeat datam proportionem. Prop. 37

Factum iam sit, et constitutum sit triangulum $\alpha\beta\gamma$, et circa centrum β per α γ describatur circulus $\alpha\gamma\delta$, et produ-

1) Similes inaequalium circulorum arcûs in eadem proportione esse ac totas circumferentias Graecus scriptor effici voluit ex elem. 5, 15; nimirum arcus, quibus aequales anguli insistunt, sunt eaedem totarum circumferentiarum partes etc. Circulorum autem circumferentias inter se esse ut diametros (itaque etiam ut semidiametros, ut est in compositione huius problematis, itemque IV propos. 26 et 39) in hac Pappi collectione demonstratum invenitur V propos. 11 et VIII propos. 22.

2) Haec addenda esse censuimus, quo facilius verba, quae sub finem analyseos Graecus scriptor posuit, intellegerentur. Paulo latius eadem explicat *Co.*

βλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶν δοθεὶς τῆς ὑπὸ τῶν ΓΑΒ γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, καὶ ἔστιν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ, λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΔΓ, ὥστε καὶ τῆς ΔΓ περιφερείας πρὸς τὴν ΑΓ λόγος. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓΔ περιφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου εἰς δοθέντα λόγον τέτμηται, δοθέν ἐστιν τὸ Γ, καὶ δοθὲν τῷ εἴδει τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

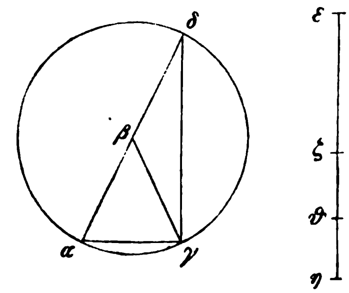
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔδει ἔχειν ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν πρὸς τὴν λοιπήν, ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα τῷ Θ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΑΔΓ περὶ κέντρον τὸ Β καὶ διάμετρον τὴν ΑΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓΔ περιφέρεια κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΔΓ περιφέρειαν πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς ΖΘ (τοῦτο γὰρ προγέγραπται, καὶ καθόλου πῶς ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς δοθέντα λόγον τέμνεται), καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΓΑ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΔΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ, καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἑπομένων, ὡς ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΒ πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΒΓ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν λόγον ἔχουσαν τὸν δοθέντα πρὸς τὴν λοιπήν.

74 μθ'. Δεδειγμένου δὴ τούτου φανερὸν ὡς δυνατὸν ἐγγράψαι πολύγωνον εἰς κύκλον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον πλευρὰς ἔχον ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ.

---

1. ἡ ΑΔ ἐπὶ τὸ AB cod. *Co*, corr. S *Co* 2. τῆς ὑπὸ τῶν ΑΒ AB cod. *Co*, corr. S *Co* 3. τῶν *Co* pro τὴν τῆς ὑπὸ ΑΒ ημίσεια A (B cod. *Co*), corr. S *Co* 7. δοθέν ἐστιν τὸ Γ] ἐστιν non perspicuum, τὸ Γ paene evanidum in A extremo folio (τὸ Γ om. B[1] cod. *Co*, restit. B[3] S *Co*), δοθεῖσαί εἰσιν αἱ πρὸς τῷ Β γωνίαι coni. *Hu* (vide Latina) 15. καὶ — 17. τέμνεται interpolatori tribuit *Hu* 18. ἡ ΔΓ paene evanuit in A, αγ B, restituit S ἡ (ante ὑπὸ ΔΑΓ) om. AS, add. B 19. πρὸς ΖΘ om. AB cod. *Co*, add. S *Co* 20. ἡ ὑπὸ ΓΑΒ paene evanuerunt in A, ἡ ὑπὸ δαγ S, ἡ ὑπὸ γδβ cod. *Co*, restituit B (*Co*) 20. 21. πρὸς τὴν *Hu* auctore *Co* pro πρὸς τὸ 24. μθον' add. B, μθ Paris. 2368

catur $\alpha\beta$ ad δ *punctum circumferentiae*, et iungatur $\delta\gamma$. Iam quia proportio anguli $\gamma\alpha\beta$ ad angulum $\alpha\beta\gamma$ data est, et angulus $\alpha\delta\gamma$ est dimidius $\alpha\beta\gamma$, data igitur est proportio anguli $\gamma\alpha\delta$ ad angulum $\alpha\delta\gamma$, itaque etiam circumferentiae $\delta\gamma$ ad $\alpha\gamma$ (*elem.* 6, 33). Iam quia semicirculi circumferentia $\alpha\gamma\delta$ in datam proportionem secta est, datum est punctum γ *), et triangulum $\alpha\beta\gamma$ specie datum.



Componetur hoc modo. Sit enim data proportio, quam, ut proposuimus, uterque ad basim angulus ad reliquum habeat, $\varepsilon\zeta : \zeta\eta$, et recta $\zeta\eta$ bifariam secetur in ϑ, et exponatur circulus $\alpha\delta\gamma$ circa centrum β et diametrum $\alpha\delta$, et circumferentia $\alpha\gamma\delta$ in puncto γ ita secetur, ut circumferentia $\delta\gamma$ ad $\gamma\alpha$ in eadem proportione sit ac recta $\varepsilon\zeta$ ad $\zeta\vartheta$ (hoc enim supra *propos.* 35 demonstratum est), et iungantur rectae $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$ $\gamma\delta$. Iam quia est ut circumferentia $\delta\gamma$ ad $\gamma\alpha$, id est ut angulus $\delta\alpha\gamma$ ad $\alpha\delta\gamma$ (*elem.* 6, 33), ita recta $\varepsilon\zeta$ ad $\zeta\vartheta$, itemque

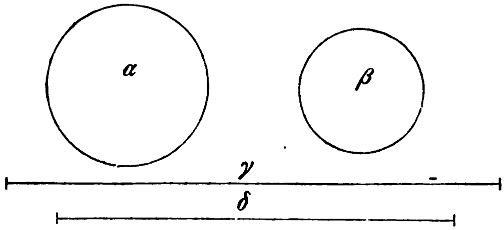
$$\angle\, \delta\alpha\gamma : 2 \angle\, \alpha\delta\gamma = \varepsilon\zeta : 2\, \zeta\vartheta, \text{ est igitur}$$
$$\angle\, \gamma\alpha\beta : \angle\, \alpha\beta\gamma = \varepsilon\zeta : \zeta\eta.$$

Ergo aequicrure triangulum $\alpha\beta\gamma$ constitutum est, cuius uterque ad basim angulus ad reliquum habeat datam proportionem.

IL. Hoc igitur demonstrato apparet fieri posse, ut in Prop. 38
circulum inscribatur polygonum aequilaterum et aequiangulum, quotcunque quis praeceperit latera habens.

*) Quia semicirculus $\alpha\gamma\delta$ in datam proportionem sectus est, in eandem anguli secti sunt; ergo datus uterque angulorum $\alpha\beta\gamma$ $\gamma\beta\delta$ (dat. 7), unde statim efficitur triangulum $\alpha\beta\gamma$ specie datum esse, nam uterque ad basim angulus dimidio $\gamma\beta\delta$ aequalis est. Ergo Graeca δοθέν ἐστιν τὸ Γ suspecta nobis videntur, eaque in adnotatione critica emendare temptavimus. Quae si tamen servanda sunt, scriptor δοθέν ἐστιν τὸ Γ minus accurate posuit pro "positione data est recta $\beta\gamma$", atque ex dat. 30 et 40 conclusit triangulum specie datum esse.

75 *Πῶς δ' εὑρίσκεται κύκλος οὗ ἡ περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, συνιδεῖν εὔκολον.*



Εὑρήσθω γὰρ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ τοῦ Α κύκλου περιφέρεια, καὶ ἐκκείσθω κύκλος τυχὼν ὁ Β, καὶ τῇ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἴση διὰ τῆς τετραγωνιζούσης εὑρήσθω ἡ Δ εὐθεῖα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Β. λόγος δὲ τῆς Δ πρὸς Γ· λόγος ἄρα καὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς ἀλλήλας. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Β· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α, ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ Α. καὶ φανερὰ ἡ σύνθεσις.

76 *ν'. Εὐθείας τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης τῆς ΑΒ γράψαι διὰ τῶν Α Β κύκλου περιφέρειαν λόγον ἔχουσαν τὸν δοθέντα πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν.*

Γεγράφθω ἡ ΑΓΒ, καὶ ἐκκείσθω τεταρτημόριον κύκλου θέσει δεδομένον τὸ ΖΗΕ, καὶ γεγράφθω τετραγωνίζουσα ἡ ΖΘΚ, καὶ τῇ βεβηκυίᾳ γωνίᾳ ἐπὶ τῆς ΑΓ περιφερείας πρὸς τῇ ΖΕ περιφερείᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΕΗΛ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΛΜ ΘΝ. ἔσται οὖν διὰ τὸ ἰδίωμα τῆς γραμμῆς ὡς ἡ ΕΛΖ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗ εὐθεῖαν, τουτέστιν ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΝ εὐθεῖαν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ,

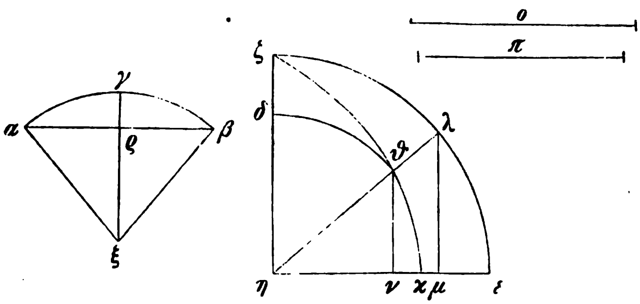
---

3. *ἴση ἡ* BS, evanuerunt in A 5. *τετραγονιζούσης* A, corr. BS 11. *φανεραὶ αἱ συνθέσεις* S 12. $\bar{\nu}^{ον'}$ add. B, $\bar{\nu}$ S 13. $\overline{ΑΕ}$ *γράψαι* AS, corr. B *τῶν* $\overline{ΑΒ}$ A, distinx. BS 16. *τὸ* $\overline{ΖΗΕ}$ A²S, *τὸ* $\overline{ΖΗΘ}$ A¹B 18. *τῇ ΖΕ Hu* pro *τῆι λοιπῆι*; sed potius verba *πρὸς τῇ λοιπῇ περιφερείᾳ*, quae Commandinus quoque corrupta iudicat, delenda esse vi-

Sed hoc quoque facile perspicitur, quomodo circulus inveniatur, cuius circumferentia datae rectae aequalis sit. Prop. 39

Inventa iam sit circuli α circumferentia rectae γ aequalis, et exponatur quilibet circulus β, cuius circumferentiae aequalis recta δ inveniatur per quadratricem (*propos. 26 extr.*). Est igitur ut γ ad δ, ita radius circuli α ad radium circuli β *). Sed *data* est proportio $\delta : \gamma$, ergo etiam radiorum proportio data est. Et datus est radius circuli β; ergo etiam circuli α radius datus est (*dat.* 2), itemque ipse circulus α (*dat. defin.* 5). Et compositio manifesta est.

L. Rectâ $\alpha\beta$ positione et magnitudine datâ, per puncta α β describatur circuli circumferentia, quae ad rectam $\alpha\beta$ habeat datam proportionem. Prop. 40

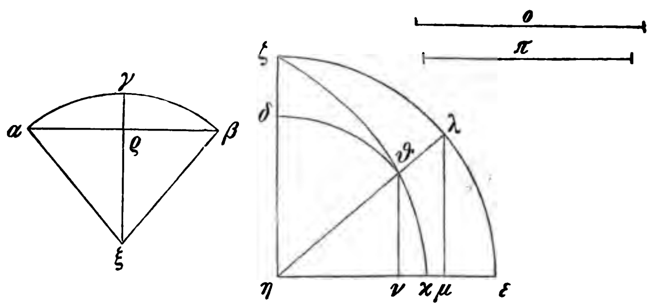


Descripta iam sit circumferentia $\alpha\gamma\beta$, et exponatur circuli quadrans $\zeta\eta\varepsilon$ positione datus, et describatur quadratrix $\zeta\vartheta\kappa$, et *centri* angulo qui in circumferentia $\alpha\gamma$ consistit aequalis constituatur angulus $\varepsilon\eta\lambda$, et ducantur perpendiculares $\lambda\mu$ $\vartheta\nu$. Iam propter lineae *quadratricis* proprietatem (*XXX*) erit ut circumferentia $\varepsilon\lambda\zeta$ ad rectam $\zeta\eta$, id est ut recta $\lambda\eta$ ad $\eta\kappa$ (*propos. 26*), ita circumferentia $\lambda\varepsilon$ ad rectam $\vartheta\nu$. Sed est

*) Vide supra p. 289 adnot. 1.

---

dentur $\overline{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\sigma\tau\alpha\tau\omega}$ * ὑπὸ A, ἡ add. BS 21. οὕτως ἡ $\varDelta E$ Co pro οὕτως ἡ $\overline{\varDelta B}$ 22. ὡς ἡ ΘH Co pro ὡς ἡ $\overline{\Theta B}$ $\underline{\pi\varrho\grave{o}\varsigma}$ τὴν $\overline{H\varDelta}$ AS, sed in A non satis perspicuum est $\varDelta$, unde πρὸς τὴν ηα B ἡ ΘΝ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΕΛ περιφέρεια πρὸς τὴν ΛΜ εὐθεῖαν. εἰλήφθω δὴ τὸ κέντρον τῆς ΑΓΒ περιφερείας τὸ Ξ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΞΡΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΗΛ. καὶ ἔστιν κέντρα τὰ Ξ Η· ὡς ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΡ εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΑΓΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν. καὶ λόγος τῆς ΑΒΓ πρὸς τὴν ΑΒ· λόγος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΚ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΗΚ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΘ· πρὸς περιφερείᾳ ἄρα τὸ Θ. ἀλλὰ καὶ πρὸς τῇ ΖΘΚ γραμμῇ· δοθὲν ἄρα τὸ Θ. θέσει ἡ ΗΘΛ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΛ γωνία.



καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΞΑ, καὶ ἔστιν θέσει ἡ ΓΞ, καὶ δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΞ, ὥστε καὶ ἡ ΑΓΒ περιφέρεια.

Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά. δεῖ γὰρ τῷ δοθέντι λόγῳ

---

1. ἡ ΘΝ (ante πρὸς ΛΜ) Co pro ἡ ΘΚ 3. τῆς ΑΓΒ Co pro τῆς ΑΒΓ 4. ἡ ὑπὸ ΓΞΗ γωνία A³S, corr. B τῇ ὑπὸ εηλ B Co, τῇ ὑπὸ θηλ S cod. Co, in A litterae tres post ὑπὸ evanuerunt 5. ἐστι BS, in A scriptura evanida τὰ ΞΗ A, distinx. S (τὰ η ζ B¹, corr. B³) 6. 7. οὕτως — εὐθεῖαν add. Co 10. τὸ Θ Co pro ἡ ΖΚ γραμμὴ A, corr. BS 11. καὶ ante θέσει add. Hu ἡ ΗΘΛ Co pro ἡ ΘΛ 13. ἡ ΑΓΒ Co pro ἡ ΑΒΓ

ut recta $\vartheta\eta$ ad $\eta\lambda$, ita $\vartheta\nu$ ad $\lambda\mu$; ergo etiam *ex aequali in perturbata proportione* (*elem. 5, 23*) *est* ut $\vartheta\eta$ ad $\eta\varkappa$, ita circumferentia $\varepsilon\lambda$ ad rectam $\lambda\mu$*). Iam sumatur circumferentiae $\alpha\gamma\beta$ centrum ξ, et rectae $\alpha\beta$ perpendicularis ducatur $\xi\varrho\gamma$; ergo *ex constructione* angulus $\gamma\xi\alpha$ angulo $\varepsilon\eta\lambda$ aequalis est. Et sunt centra ξ η; ergo ut circumferentia $\alpha\gamma$ ad rectam $\alpha\varrho$, id est ut recta $\vartheta\eta$ ad $\eta\varkappa$**), ita circumferentia $\alpha\gamma\beta$ ad rectam $\alpha\beta$. Et *ex hypothesi data est* proportio circumferentiae $\alpha\gamma\beta$ ad rectam $\alpha\beta$; ergo etiam rectae $\vartheta\eta$ ad $\eta\varkappa$ proportio *data est*. Et *magnitudine* [1]) data est $\eta\varkappa$, ergo etiam $\vartheta\eta$ *magnitudine* data (*dat. 2*); itaque punctum ϑ est ad *circuli* circumferentiam, *quae centro η ac radio $\eta\vartheta$ describitur*. Sed *ex hypothesi* idem punctum est ad lineam $\zeta\vartheta\varkappa$; ergo punctum ϑ *positione* datum est, *ideoque* recta $\eta\vartheta$, *sive* $\eta\vartheta\lambda$, *data* positione (*dat. 26*); ergo etiam angulus $\varepsilon\eta\lambda$ datus est [2]). Et est aequalis angulo $\gamma\xi\alpha$, et positione *data* est $\gamma\xi$ datumque punctum α; ergo $\alpha\xi$ positione *data est*, itaque etiam circumferentia $\alpha\gamma\beta$ [3]).

Et compositio manifesta est. Oportet enim datae pro-

*) Haec brevius, si circumferentiam uncis ( ) significamus, sic perscribuntur. Quoniam est

$$\left.\begin{aligned} \lambda\eta : \eta\varkappa &= (\varepsilon\lambda) : \vartheta\nu \\ \text{et } \vartheta\eta : \eta\lambda &= \vartheta\nu : \lambda\mu \end{aligned}\right\}, \text{ multiplicando fit } \frac{\vartheta\eta}{\eta\varkappa} = \frac{(\varepsilon\lambda)}{\lambda\mu}.$$

**) "Proxime enim ostensum est, ut $\vartheta\eta$ ad $\eta\varkappa$, ita esse circumferentiam $\varepsilon\lambda$ ad rectam lineam $\lambda\mu$, hoc est circumferentiam $\alpha\gamma$ ad $\alpha\varrho$ rectam" *Co*, et conf. supra p. 289 adnot. 1 (etenim rectae $\lambda\mu$ $\alpha\varrho$ inter se sunt ut radii circulorum, quorum centra η ξ).

1) Quamquam initio resolutionis scriptor quadrantem $\zeta\eta\varepsilon$ positione tantummodo, non magnitudine, datum esse supponit, tamen, posito et descripto illo quadrante, recta $\eta\varkappa$ (cuius ad $\eta\varepsilon$ proportio data est ex proprietate quadratricis) data esse dicitur etiam magnitudine, quae quidem proportionaliter pendet ex magnitudine rectae $\eta\varepsilon$. Ergo datorum doctrina ab Euclide tradita paulo amplificata esse videtur a scriptore huius problematis. Sed tota ea quaestio, ut admodum digna est quae accuratius pertractetur, ita fines huic editioni propositos egrediatur.

2) Hoc ex datorum 30 conversa scriptor effecisse videtur.

3) Quoniam circuli circumferentiae punctum α datum est, datusque angulus $\alpha\xi\beta$ (est enim duplus $\alpha\xi\gamma$), ex datorum 90 efficitur datum esse punctum β; ergo recta $\alpha\beta$ positione et magnitudine data est (dat. 26), itaque etiam circumferentia $\alpha\gamma\beta$ (dat. defin. 8).

τὸν αὐτὸν ποιῆσαι τὸν τῆς ΔΗ πρὸς ΗΚ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ τοῦ Δ γράψαι περιφέρειαν, καὶ λαβεῖν τὸ Θ, καθ' ὃ τέμνει τὴν τετραγωνίζουσαν, καὶ ἐπιζεῦξαι τὴν ΘΗ, καὶ δίχα τεμόντα τὴν ΑΒ καὶ ὀρθὴν ἀναστήσαντα τὴν ΡΞ καταγαγεῖν τὴν ΑΞ περιέχουσαν μετὰ τῆς ΞΡ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΚΗΘ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ξ διὰ τοῦ Α γράψαι κύκλου περιφέρειαν τὴν ΑΓΒ ἔχουσαν λόγον πρὸς τὴν ΑΒ βάσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

77 να'. Οὐκ ἀπίθανον δὲ οὐδὲ τὸ γωνίας ἀσυμμέτρους εὑρεῖν. διὰ τούτου γὰρ καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀσύμμετροι ληφθήσονται περιφέρειαι, κἂν ῥητὴν ὑποστησώμεθα τὴν μίαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν, ἄλογος ἡ λοιπὴ γενήσεται.

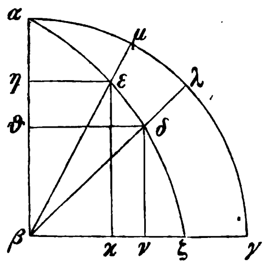
Ἐκκείσθω τὸ ΑΒΓ τεταρτημόριον, καὶ ἐν αὐτῷ τετραγωνίζουσα ἡ ΑΕΔΖ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΕΗ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΒΘ ἀσύμμετρος μήκει τῇ ΒΗ, καὶ ἤχθω παράλληλος ἡ ΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ἀπὸ ΕΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΖ.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΔΝ· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν γραμμὴν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΔΝ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΕΒΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΖ. ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΕΚ τῇ ΔΝ (ἐπεὶ καὶ ἡ ΗΒ τῇ ΒΘ)· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ γωνία τῇ γωνίᾳ, κἂν ῥητὴν

1. *ποιῆσαι Hu*, *προῆκτ^{αι}* A[2] in ipsis primae manus ductibus, qui iam cognosci non possunt, item B, *προῆχθαι* S, *constituere Co* *τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ* ABS, corr. *Co* 3. *τέμνει* B, idem voluit A[2], qui scripturam primae manus *τέμνοντα* (ut videtur) corrigere studuit neque tamen *ει* distincte dedit, om. S *ἐπιζεῦξαι Hu* auctore *Co*, *ἐπιζευχθῇ* A(BS) 4. *διχὰ τέμνονται* A(BS), sed litteras *ἀ τέμνο* A[2] exaravit obducta prima scriptura, in B *α* superscriptum est super *αι*, sed id rursus deletum, corr. *Hu* 5. *κατάγειν* AS, *καταγεῖν* B, corr. *Hu* *γωνίας* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 7. *ἔχουσαν Hu* pro *ἔχειν αὐτῆς* 9. *να^{ον}'* add. B, *να* S *τὸ γωνίας Hu*, *ἀγωνίας* AS, *γωνίας* mutavit prima manus in A, unde idem in B *ἀσυ////ρους* A, restit. B Paris. 2368 10. *διὰ* ante *τοῦ αὐτοῦ* repetitum in ABS del. *Hu* 12. *ἡ περιφέρεια ////// ἡ λοιπὴ* A, item cum lacuna BS cod. *Co*, corr. *Co* 13. *τετάρτη////// /// | ἐν α/τῆι* A, *τεταρτη...... ... ἐν αὐτῇ* B, *τεταρτημόριον καὶ ἐν αὐτῇ* S cod. *Co*, *αὐτῷ* corr. *Co* 18. *ἡ ΔΝ Co* pro *ἡ ΔΗ* 18. 19. *ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΔΝ Co*, *ὡς ἡ //////* A, *ὡς ἡ .... πρὸς δν* B[1] (ante *δν* superscr. *ε* B[3]), *ὡς η τῇ δη* S 20. 21. *δὲ ἡ ΒΓ τῆι*

portioni[4]) aequalem facere $\delta\eta : \eta\kappa$***), et circa centrum η per punctum δ describere circumferentiam, quae quadratricem in puncto ϑ secet, et iungere rectam $\vartheta\eta$, et, rectà $\alpha\beta$ bifariam sectà ac perpendiculari $\varrho\xi$ constitutà, rectam $\alpha\xi$ ita ducere, ut ea cum recta $\xi\varrho$ angulum aequalem angulo $\kappa\eta\vartheta$ contineat, et circa centrum ξ per punctum α describere circuli circumferentiam $\alpha\gamma\beta$, quae quidem ad basim $\alpha\beta$ proportionem eandem ac quae data est habebit.

LI. Neque incredibile est angulos incommensurabiles inveniri *posse*. Nam per hoc *proximum problema* etiam eiusdem circuli circumferentiae incommensurabiles sumentur, et, si unum angulum vel circumferentiam rationalem supposuerimus, reliquus *angulus vel circumferentia* irrationalis fiet. Prop. 41



Exponatur quadrans $\alpha\beta\gamma$, in eoque *describatur* quadratrix $\alpha\varepsilon\delta\zeta$, et, *ut libet, ad eam lineam* ducatur recta $\beta\varepsilon$, et ipsi $\beta\gamma$ parallela $\varepsilon\eta$, et abscindatur $\beta\vartheta$ ipsi $\beta\eta$ longitudine incommensurabilis (*elem. 10, 10*), et ducatur $\vartheta\delta$ parallela *rectae* $\eta\varepsilon$, et iungatur $\delta\beta$; dico angulum $\varepsilon\beta\zeta$ angulo $\delta\beta\zeta$ incommensurabilem esse.

Ducatur perpendicularis $\delta\nu$; est igitur propter lineae *proprietatem* ut $\varepsilon\kappa$ ad $\delta\nu$, ita angulus $\varepsilon\beta\zeta$ ad angulum $\delta\beta\zeta$*). Sed est $\varepsilon\kappa$ incommensurabilis ipsi $\delta\nu$ (quia item $\beta\eta$ ipsi $\beta\vartheta$); ergo etiam angulus $\varepsilon\beta\zeta$ angulo $\delta\beta\zeta$ incommensurabilis erit,

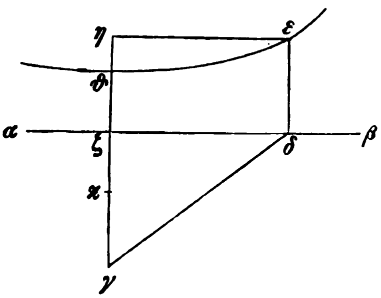
4) Datam proportionem a scriptore rectis o π expressam esse, etsi Pappus non disertis verbis tradit, tamen inde apparet, quod in prima figura littera ϱ reperitur.

***) Id est "facere $\delta\eta = o \cdot \eta\kappa : \pi$", vel ex veterum usu loquendi "cum magnitudine data sit $\eta\kappa$, iuxta datam proportionem a recta $\eta\zeta$ abscindere $\eta\delta$".

*) Propter quadratricis proprietatem (XXX) circumferentiae $\alpha\gamma : \mu\gamma : \lambda\gamma$ inter se sunt ut rectae $\alpha\beta : \varepsilon\kappa : \delta\nu$; ergo propter elem. 6, 33 est $\varepsilon\kappa : \delta\nu = \angle\, \mu\beta\gamma : \angle\, \lambda\beta\gamma$.

$\overline{\Delta H}$ ἐπεὶ καὶ ἡ $\overline{H\Theta}$ τῇι $\overline{B\Theta}$ A[a]S (cod. *Co*), δὲ ἡ $\overline{\alpha\gamma}$ τῇ $\overline{\delta\nu}$ etc. B[1] (δὲ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ τῇ $\overline{\delta\eta}$ B[3]), corr. *Co* *ὑποστησώμεθα τὴν ὑπὸ ΕΒΖ γωνίαν [κἂν ἡμίσειαν ὀρθῆς], ἄλογος ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΒΖ.*

78 νβ'. *Τῆς ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ ἑλίκων βιβλίῳ λαμβανομένης νεύσεως τὴν ἀνάλυσίν σοι κατέταξα, ἵνα τὸ βιβλίον διερχόμενος [περὶ τῶν ἑλίκων] μὴ διαπορῇς. λαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὴν οἱ ὑπογεγραμμένοι τόποι καὶ πρὸς ἄλλα πολλὰ τῶν στερεῶν προβλημάτων χρήσιμοι.*



Θέσει εὐθεῖα ἡ ΔΒ, καὶ ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ Γ προσπιπτέτω τις ἡ ΓΔ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΒ ἡ ΔΕ, ἔστω δὲ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ· ὅτι τὸ Ε πρὸς ὑπερβολῇ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ πρὸς ὀρθὰς παράλληλος ἡ ΓΖ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ τῇ ΔΒ παράλληλος ἡ ΕΗ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω τῆς ΓΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΘ ΖΚ· δοθὲν ἄρα ἑκάτερον τῶν Θ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, οὕτως *τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΔ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ, πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΚΗΘ λόγος ἐστὶν δοθείς. καὶ ἔστι δοθέντα*

---

1. *ὑπὸ ΕΒΖ Hu* pro *ὑπὸ* $\overline{ΑΒΖ}$ *κἂν ἡμίσειαν ὀρθῆς* del. *Hu* 3. $\overline{νβ}$*ον'* add. B, $\overline{νβ}$ S 4. *ἀνάλυσιν οὐ* ABS, *οὐ* om. *Co*, corr. *Hu* 5. *περὶ τῶν* bis scripta in A, *περὶ τῶν ἑλίκων* om. *Co* 14. *ἡ ΓΔ Co* pro *ἡ* $\overline{ΓΒ}$ 17. *πρὸς ὑπερβολήν* ABS, corr. *Hu* 18. *ὀρθὰς Hu*, $\overline{ΔΕ}$ A² obducta prima scriptura (BS) *ἡ ΓΖ* add. *Hu* (idem alieno loco add. *Co*) 19. 20. *καὶ τῷ τῆς*] *τῶ* in A vix perspicuum, unde *τοῦ* B 20. *λόγῳ Hu* auctore *Co* pro *λόγος* 21. *τῶν* $\overline{ΘΚ}$ A, distinx. BS 22. *πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, οὕτως* add. *Hu* auctore *Co* 24. *τῆς ΕΗ Co* pro *τῆς* $\overline{ΒΗ}$

et, si angulum $\varepsilon\beta\zeta$ rationalem supposuerimus, irrationalis erit angulus $\delta\beta\zeta$.

LII. Inclinationis eius quae ab Archimede in libro de helicibus adhibetur[1]) resolutionem tibi apposui, ne illum librum percurrens haesitares. Quam ad *resolutionem* hi qui sequuntur loci adhibentur, qui ad alia quoque permulta problemata solida utiles sunt. Prop. 42

Sit recta linea $\alpha\beta$ *positione data*, eique a dato puncto γ occurrat recta quaedam $\gamma\delta$, et ipsi $\alpha\beta$ perpendicularis *ducatur* $\delta\varepsilon$; sit autem proportio $\gamma\delta : \delta\varepsilon$ *data*; dico punctum ε ad hyperbolam esse.

Ducatur per γ perpendiculari parallela $\gamma\zeta$; ergo punctum ζ datum est (*dat.* *28. 25*). Et rectae $\alpha\beta$ parallela ducatur $\varepsilon\eta$, *productae* $\gamma\zeta$ *in* η *occurrens*, et fiat $\gamma\delta : \delta\varepsilon = \gamma\zeta : \zeta\vartheta = \gamma\zeta : \zeta\varkappa$*); ergo utrumque punctorum ϑ $\varkappa$ datum est[2]). Iam quia est $\gamma\delta^2 : \delta\varepsilon^2 = \gamma\zeta^2 : \zeta\vartheta^2$, *quarum proportionum utraque data est* (*dat. 50*); data igitur est etiam quae subtrahendo

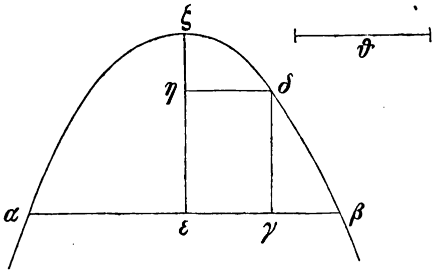
1) Quoniam vel ipse Pappus vel alius scriptor, cuius problemata Pappus in hanc collectionis partem receperit, non solum hoc loco, sed etiam supra cap. 59 disertis verbis dicit ab Archimede in libro de helicibus iniuria solidi problematis constructionem adhibitam esse, et hinc omnis argumentatio scriptoris, eaque ingeniosissima, pendet, primum cavendum esse videtur, ne forte temere et imperite Archimedis rationem reprehensam esse existimemus. At vero si statuere liceat non eam Archimedis operum editionem quae ad nostra tempora pervenit, sed aliam quandam interpolatam illi scriptori in manibus fuisse, et haec reprehensio, quam apud Pappum legimus, in interpolatorem, non in Archimedem, cadat, et extrema huius libri verba facile explicentur, quibus rursus Archimedem (immo interpolatorem) scriptor vituperat, ac tamen veram rationem (id est demonstrationem per plana, quae quidem sola reperitur cum in toto Archimedis ipsius de helicibus libro tum propositione duodevicesima) e theorematis de helice repeti posse profitetur. Denique tertium restat, quod in cogitationem inducamus: fieri potuisse ut hic scriptor in Archimedis per plana demonstratione occultam latere solidorum problematum rationem iudicaret, quae quidem quaestio hic paucis dissolvi nequit.

*) Id est, cum magnitudine data sit $\gamma\zeta$ (adnot. 2), iuxta datam proportionem $\gamma\delta : \delta\varepsilon$ a recta $\gamma\eta$ abscindatur $\zeta\vartheta$, et ei aequalis $\zeta\varkappa$.

2) Quoniam data sunt puncta γ ζ, recta $\gamma\zeta$ magnitudine data est (dat. 26); ergo etiam $\zeta\vartheta$ $\zeta\varkappa$ magnitudine datae (2); atque eaedem positione (28); ergo etiam puncta ϑ $\varkappa$ data (27).

τὰ Κ Θ· τὸ Ε ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ ἐρχομένῃ διὰ τῶν Θ Ε.

79 νγʹ. *Ἔστω θέσει καὶ μεγέθει δοθεῖσα ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΓ, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΓΔ· ὅτι τὸ Δ σημεῖον ἅπτεται θέσει παραβολῆς.*



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα τῷ Ε, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ΕΖ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΔΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ΖΗ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Ζ· τὸ ἄρα Δ σημεῖον ἅπτεται παραβολῆς κατερχομένης διὰ τῶν Α Ζ Β, ἧς ἄξων ἐστὶν ὁ ΕΖ.

80 νδʹ. *Τούτων προγεγραμμένων προκειμένη.............. προγενομένη τὸν τρόπον τοῦτον. θέσει ὄντος κύκλου τοῦ*

---

1. *τὰ* $\overline{K\Theta}$ A, distinx. BS *τὸ Ε Co* pro *τὰ* $\overline{\Theta}$ *πρὸς ὑπερβολη ἐρχομένης* A(B), *πρὸς ὑπερβολὴν ἐρχομένης* S, corr. *Hu* 1. 2. *τῶν Θ Ε Co*, *τοῦ* // A, *τοῦ* $\overline{\vartheta\upsilon}$ B, *τοῦ* $\overline{\vartheta\gamma}$ S 3. *νγ* add. S 4. *ἡ ΔΓ Co* pro *ἡ* $\overline{\Delta Z}$ 5. *Δ σημεῖον Hu* auctore *Co*, //\\////// A, *δ*...... B, ... S 7. *Τετμήσθω γὰρ*] tot fere litterae evanidae in A et congrua lacuna in B, *τετμήσθω ἄρα* S, *γὰρ* restituit *Hu* 15. *ἡ ΔΗ Co* pro *ἡ* $\overline{\Delta\Gamma}$ 19. *θέσει ἅπτεται* voluit *Co* 20. *τῶν Α Ζ Β Hu* auctore *Co* pro *τῆς* $\overline{AZB}$ 21 — p. 302, 18. totum problema propter scripturam in A passim evanidam in reliquis quoque codicibus misere corruptum om. *Co* 21. $\overline{\nu\delta}$ add. S, $\overline{\nu\Gamma}^{ov}$ʹ B 21. 22. *προκειμένη* | ////////////// *προγενομένη* A(S), *προκειμένη* .... *γινομένη* B, *πρόβλημα τὸ ἐξ ἀρχῆς προκείμενον λύεται Hu* 22. *θέσει ὄντος κύκλου τοῦ* et p. 302, 1. *θέσει ἐν αὐτῷ* evanuerunt in A, om. B, restit. S (nisi quod falso *αὐτῇ*)

fit $\zeta\delta^2 : \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$ **), id est $\varepsilon\eta^2 : \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$. Et data sunt puncta $\varkappa\ \vartheta$; ergo punctum ε ad hyperbolam est quae transit per $\vartheta\ \varepsilon$ ***).

LIII. Sit recta $\alpha\beta$ positione et magnitudine data, eique perpendicularis *ducatur* $\gamma\delta$, et sit rectangulum quod rectis $\alpha\gamma\ \gamma\beta$ continetur aequale ei quod datâ quadam et $\gamma\delta$ continetur; dico punctum δ positione parabolam attingere. Prop. 43

Recta enim $\alpha\beta$ bifariam secetur in puncto ε, et perpendicularis *ducatur* $\varepsilon\zeta$, et quadrato ab $\varepsilon\beta$ aequale sit rectangulum quod datâ rectâ et $\varepsilon\zeta$ continetur; ergo punctum ζ datum est [1]). Et rectae $\alpha\beta$ parallela *ducatur* $\eta\delta$; ergo per subtractionem quadratum ab $\varepsilon\gamma$, id est ab $\eta\delta$, aequale est rectangulo quod datâ rectâ et $\zeta\eta$ continetur [2]). Et datum est punctum ζ; ergo punctum δ parabolam per puncta $\alpha\ \zeta\ \beta$ transeuntem, cuius axis est $\varepsilon\zeta$, attingit [3]).

LIV. His demonstratis *problema ab initio* (*LII*) *propositum solvitur* hunc in modum [4]). Prop. 44

**) Propter elem. 2, 4 est $\delta\varepsilon^2 = \zeta\vartheta^2 + \vartheta\eta^2 + 2\,\zeta\vartheta \cdot \vartheta\eta$. Sed est $2\,\zeta\vartheta \cdot \vartheta\eta = \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta$, et $\vartheta\eta^2 + \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta = \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$ (elem. 2, 3); ergo $\delta\varepsilon^2 = \zeta\vartheta^2 + \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$, itaque $\delta\varepsilon^2 - \zeta\vartheta^2 = \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$ (*Co*). Data est autem proportio $\zeta\delta^2 : \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$ propter dat. 4.

***) Erit enim eius hyperbolae transversum latus (sive diametrus) $\vartheta\varkappa$, et rectum (sive parametrus) illud quod ad $\vartheta\varkappa$ est ut $\varepsilon\eta^2 : \vartheta\eta \cdot \eta\varkappa$ ex 21. primi libri conicorum Apollonii (*Co*).

1) Recta enim $\varepsilon\zeta$ magnitudine data est (dat. 57); atque eadem positione (30); ergo punctum ζ datum (27).

2) Sit data recta ϑ; itaque ex constructione est
$\varepsilon\beta^2 = \vartheta \cdot \varepsilon\zeta$. Sed propter elem. 2, 5 est
$\varepsilon\beta^2 = \alpha\gamma \cdot \gamma\beta + \varepsilon\gamma^2$, et ex hypothesi $\alpha\gamma \cdot \gamma\beta = \vartheta \cdot \gamma\delta$; ergo
$\vartheta \cdot \varepsilon\zeta - \vartheta \cdot \gamma\delta = \varepsilon\gamma^2$, id est $\vartheta \cdot \zeta\eta = \varepsilon\gamma^2 = \eta\delta^2$.

3) Quia ex constructione est $\varepsilon\beta^2 = \vartheta \cdot \varepsilon\zeta$, et, ut statim (adnot. 2) demonstratum est, $\eta\delta^2 = \vartheta \cdot \zeta\eta$, est igitur
$$\varepsilon\beta^2 : \eta\delta^2 = \varepsilon\zeta : \zeta\eta;$$
itaque per puncta $\alpha\ \zeta\ \delta\ \beta$ parabolam transire efficitur ex Apollonii conic. 1, 20.

4) Operam infinitam, ut videbatur, ac saepius desperatam tandem eo usque absolvimus, ut legi problema posset et, quid voluisset scriptor, quodammodo divinari. Item figuram nostra coniectura delineavimus. Itaque via quasi praemonstrata fieri poterit, ut, si quid aliis quoque utile ad propositum venerit in mentem, totus locus in integrum restituatur.

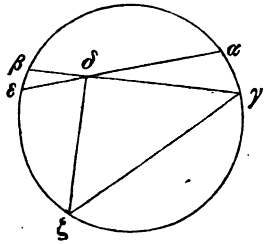
ΑΒΓ καὶ θέσει ἐν αὐτῷ εὐθείας τῆς ΒΓ, καὶ δοθέντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Α, θεῖναι μεταξὺ τῆς ΒΓ εὐθείας καὶ τῆς ΒΖΓ περιφερείας ἴσην τῇ τεθείσῃ νεύουσαν πρὸς τὸ Γ.

Γεγονέτω γάρ, καὶ κείσθω τῇ ΕΑ ἴση, καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει τὴν ΒΓ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Α προσβέβληται ἡ ΑΔ, καὶ ἴση τῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἡ ἀπὸ τὸ .... *πρὸς ὑπερβολῇ (ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΖΔΕ). καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΔΖ· τὸ Ζ ἄρα πρὸς παραβολῇ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. ἀναλο*.......... *τῷ προβλήματι χρῆται ὁ Ἀρχιμήδης πρὸς τὸ δεῖξαι κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν. αἰτιῶνται δὲ αὐτοῦ τινες ὡς οὐ δεόντως χρησαμένου στερεῷ προβλήματι* .... *δεικνύουσιν ὡς καὶ διὰ τῶν ἐπιπέδων εὑρεῖν* ἔστιν εὐθεῖαν ἴσην τῇ *τοῦ κύκλου περιφερείᾳ χρησάμενον τοῖς ἐπὶ τῆς* ἕλικος *εἰρημένοις θεωρήμασιν.*

---

1. *αὐτῷ Hu*, *αὐτῇ* S   *τῆς ΒΓ Hu*, *τῆς ΕΓ* AB^{2}S, *τῆς γε* B^1 *δοθέντος Hu* pro *δοθὲν ὡς*   2. *μεταξὺ* B, *μετὰ* AS   3. *περιφέρειαν ἴσην τῇ θέσει νεύουσαν* B   *τῇ δοθείσῃ* coni. *Hu*   5. *τῇ εα* S, *τῆι ΕΔ* AB   6. *πρὸς ὀρθὰς ἤχθω* paene evanuerunt in A   6. 7. *προσθέσει τῇ ΒΓ* A, *προθέσει τῇ βγ* B, *πρὸς θέσει τῇ βγ* S, *τὴν* corr. *Hu* 7. *τοῦ Α Hu* pro *τοῦ Δ*   *προσβέβληται Hu*, *πρ///ληται* A, *προβέβληται* S, om. B   *ἡ ΑΔ* AS, *τῇ αδ* B^3, om. B^1 8. *ἴση Hu*, *ἴση/* A, *ἴσην* BS   *τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν ἡ ΔΖ, τὸ ἄρα Ζ σημεῖόν ἐστιν* coni. *Hu*   9. *πρὸς ὑπερβολῇ Hu*, ///// *ὑπερβολὴ* A(B), *πρὸς ὑπερβολήν* S   *τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῶι ὑπὸ ΑΔΓ* ABS, corr. *Hu* 10. *δοθεῖσα ἡ ΑΕ* AB^{3}S, corr. B^1 11. *καὶ τῆς δζ* B, *καὶ τῆς αζ* S, *καὶ τῆς ?Ζ* A (incertum utrum *Α* an *Δ*)   12. *τὸ Ζ ἄρα πρὸς Hu*, tot litterae evanidae in A, *ὡς* ..... *προσ* B, ... *ἄρα πρὸς* S   *παραβολῇ Hu*, *υπερβολη* aegre comparet in A, *ὑπερβολή* BS   *ἀναλό*////////// A(B^{1}S), *ἀνάλογον θέσει αὐτῷ* B^3, *ἀνάλυσις* (quae fuerit glossa margini adscripta), tum *τούτῳ* coni. *Hu*   14. *περιφερείας* ABS, corr. *Hu* *αὐτ//* A, *αὐτῶ* B, *αὐτῷ* S, corr. *Hu*   15. *χρησάμενον* AB^{3}S, corr. B^1 post *προβλήματι* viginti fere litterae evanuerunt in A   16. *δεικνύουσιν* A (sine *ν* S), *δεικνύν* B^1, *δεικνύντα* B^3 *ὡς* add. *Hu* 16. 17. post *εὑρεῖν* quindecim fere litterae evanuerunt in A, *ἔστιν* sup-

Positione datis circulo $\alpha\beta\gamma$ in eoque rectâ $\beta\gamma$, et in circumferentia puncto α dato, construatur inter rectam $\beta\gamma$ et circumferentiam $\beta\zeta\gamma$ recta, quae cuidam positione datae aequalis sit et ad punctum γ inclinet.



Factum iam sit, et constructa sit recta $\gamma\zeta$ ipsi $\varepsilon\alpha$ aequalis, et rectae $\beta\gamma$ perpendicularis ducta $\delta\zeta$ ipsi $\alpha\delta$ aequalis. Iam quia ad $\beta\gamma$ positione *datam* a dato puncto α deducta est $\alpha\delta$, eique aequalis perpendicularis constituta $\delta\zeta$ (*propos.* 42), punctum igitur ζ est ad hyperbolam (quoniam est $\beta\delta \cdot \delta\gamma = \alpha\delta \cdot \delta\varepsilon = \zeta\delta \cdot \delta\varepsilon$). Et est data $\delta\varepsilon$; ergo rectangulum quod rectis $\beta\delta$ $\delta\gamma$ continetur aequale est ei quod datâ rectâ et $\delta\zeta$ continetur (*propos.* 43); ergo punctum ζ est ad parabolam. *Sed idem ad hyperbolam esse demonstravimus;* ergo datum est punctum ζ . . . . *hoc* problemate Archimedes utitur, ut rectam circuli circumferentiae aequalem *inveniri posse* demonstret. Sunt autem qui illum minus recte solido problemate usum esse coarguant ipsique demonstrent fieri posse, ut per plana rectam circuli circumferentiae aequalem inveniamus, siquidem theorematis quae de helice proposita sunt utamur.

---

plet *Hu*, *εὐθεῖαν* B³S, *ἴσην τῇ* B³ 18. *ἔλι///* *εἰρημέν///* A, restit. BS post *θεωρήμασιν* add. *παππου συναγωγης οπερ εστιν αθηρων* (sic) *θεωρημάτων ἐπιπεδωι και στερεων και γραμμικων* A³, *τέλος τοῦ τῆς πάππου τοῦ ἀλεξανδρέως συναγωγῆς τετάρτου ὅπερ ἐστὶν ἀνθηρῶν θεωρημάτων ἐπιπέδων* etc. B, *τοῦ* $\overline{\delta}^{ου}$ *βιβλίου τέλος* S

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Ε.

Περιέχει δὲ συγκρίσεις τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων ἐπιπέδων σχημάτων πρὸς ἄλληλά τε καὶ τὸν κύκλον, καὶ συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων στερεῶν σχημάτων πρὸς ἄλληλά τε καὶ τὴν σφαῖραν.

1 *Σοφίας καὶ μαθημάτων ἔννοιαν ἀρίστην μὲν καὶ τελειοτάτην ἀνθρώποις θεὸς ἔδωκεν, ὦ κράτιστε Μεγεθίον, ἐκ μέρους δέ που καὶ τῶν ἀλόγων ζῴων μοῖραν ἀπένειμέν τισιν. ἀνθρώποις μὲν οὖν ἅτε λογικοῖς οὖσι τὸ μετὰ λόγου καὶ ἀποδείξεως παρέσχεν ἕκαστα ποιεῖν, τοῖς δὲ λοιποῖς ζῴοις ἄνευ λόγου τὸ χρήσιμον καὶ βιωφελὲς αὐτὸ μόνον κατά τινα φυσικὴν πρόνοιαν ἑκάστοις ἔχειν ἐδωρήσατο. τοῦτο δὲ μάθοι τις ἂν ὑπάρχον καὶ ἐν ἑτέροις μὲν πλείστοις γένεσιν τῶν ζῴων, οὐχ ἥκιστα δὲ κἂν ταῖς μελίσσαις· ἥ τε γὰρ εὐταξία καὶ πρὸς τὰς ἡγουμένας τῆς ἐν αὐταῖς πολιτείας εὐπείθεια θαυμαστή τις, ἥ τε φιλοτιμία καὶ καθαριότης ἡ περὶ τὴν τοῦ μέλιτος συναγωγὴν καὶ ἡ περὶ τὴν φυλακὴν αὐτοῦ πρόνοια καὶ οἰκονομία πολὺ μᾶλλον θαυμασιωτέρα. πεπιστευμέναι γάρ, ὡς εἰκός, παρὰ θεῶν κομίζειν τοῖς τῶν ἀνθρώπων μουσικοῖς τῆς ἀμβροσίας ἀπόμοιράν τινα ταύτην οὐ μάτην ἐκχεῖν εἰς γῆν καὶ ξύλον ἤ τινα ἑτέραν ἀσχήμονα καὶ ἄτακτον ὕλην ἠξίωσαν, ἀλλ' ἐκ τῶν ἡδίστων ἐπὶ γῆς φυομένων ἀνθέων συνάγουσαι τὰ κάλλιστα κατασκευάζουσιν ἐκ τούτων εἰς τὴν τοῦ μέλιτος ὑποδοχὴν ἀγγεῖα τὰ καλούμενα κηρία πάντα μὲν ἀλλήλοις ἴσα*
2 *καὶ ὅμοια καὶ παρακείμενα, τῷ δὲ σχήματι ἑξάγωνα. τοῦτο δ' ὅτι κατά τινα γεωμετρικὴν μηχανῶνται πρόνοιαν οὕτως ἂν μάθοιμεν. πάντως μὲν γὰρ ᾤοντο δεῖν τὰ σχήματα παρακεῖσθαί τε ἀλλήλοις καὶ κοινωνεῖν κατὰ τὰς πλευράς, ἵνα μὴ τοῖς μεταξὺ παραπληρώμασιν ἐμπίπτοντά τινα ἕτερα*

1—4. *παππου ἀλεξανδρέως συναγωγης ε̄ περιεχει δε συγκρισεις των ἴσην περίμετρον ἐχοντων επιπέδων σχημάτων προσαλλήλατε και τ̊ κύκλων* (superscr. *ο*) *και συγρίσεις τ̂ ἴσην επιφανειαν εχόντ̂ στερε̂ σχημα̂ πρ̊ αλληλα τε και τ̂ σφ^α/* A³(BS) 3. *τὸν κύκλον* B, *τοὺς κύκλους* Paris. 2368 SV (de A³ vide supra) 4. *στερεῶν* om. B 6. *μεγε-*

Pappi Alexandrini collectionis liber V.

Continet figurarum planarum aequalem perimetrum habentium inter se et cum circulo comparationes, item figurarum solidarum aequalem superficiem habentium inter se et cum sphaera comparationes.

PARS PRIMA.

Figurarum planarum comparationes.

Sapientiae ac mathematicorum cognitionem optimam quidem et perfectissimam, clarissime Megethio, hominibus concessit deus, sed particulam quandam etiam nonnullis animalibus rationis expertibus impertivit. Hominibus igitur ratione praeditis tribuit, ut considerate et scienter omnia agerent, reliqua autem animalia sine ratione id ipsum quod ad vitae necessitates utile est naturali quodam instinctu quaerere voluit. Atque hoc ita comparatum esse cum in aliis animalium generibus permultis, tum maxime in apibus cognoscas, quarum non solum disciplina et erga reginas obedientia admirabilis est, sed diligentia ac munditia in colligendo melle, et in eodem custodiendo prudentia atque assiduitas multo etiam admirabilior. Ambrosiae enim, opinor, libamenta quaedam a diis se perferre confidunt ad eos homines qui artibus ingenuis student, quae munera cum in humum vel lignum vel aliam quamcunque deformem rudemque materiam temere nolint effundere, ex suavissimis qui in terris nascuntur floribus praestantissimos conquirunt sucos atque inde mellis receptacula, quae favi vocantur, omnia inter se aequalia et similia et cohaerentia, specie autem hexagona comparant. Sed eam operam geometrica quadam prudentia peragi hac ratione intellegamus. Omnino apes vasculorum latera inter se componenda et colliganda esse putabant, ut ne alienae res in

---

θειον (sine acc.) A, *μεγέθειον* BS, corr. *Hu* 14. *καὶ* add. *Sca* 14. 15. *τῆς εν αυταῖς πολιτείαις* A(B[3]), *ταῖς πολιτείαις* S, *αὑταῖς* corr. *Hu*, *πολιτείας* B[1] 15. *ευπιθεια* A(B), corr. S 16. *ἡ περὶ* (post *καθαριότης*) *Hu* pro *ποιεῖ* 17. *πολλυ* A, corr. BS 20. *γῆν ἢ ξύλον* coni. *Hu* 27. *πάντως Sca* pro *πάντες* λυμήνηται αὐτῶν τὰ ἔργα. τρία δὲ σχήματα εὐθύγραμμα τὸ προκείμενον ἐπιτελεῖν ἐδύνατο, λέγω δὲ τεταγμένα τὰ ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια, τὰ δ' ἀνόμοια ταῖς μελίσσαις οὐκ ἤρεσεν. τὰ μὲν οὖν ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ τετράγωνα καὶ τὰ ἑξάγωνα χωρὶς ἀνομοίων παραπληρωμάτων ἀλλήλοις δύναται παρακείμενα τὰς πλευρὰς κοινὰς ἔχειν [ταῦτα γὰρ δύναται συμπληροῦν ἐξ αὐτῶν τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, ἑτέρῳ δὲ τεταγμένῳ σχήματι τοῦτο ποιεῖν ἀδύνατον]. ὁ γὰρ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπος ὑπὸ ϛ' μὲν τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ διὰ ϛ' γωνιῶν, ὧν ἑκάστη διμοίρου ἐστὶν ὀρθῆς, συμπληροῦται, τεσσάρων δὲ τετραγώνων καὶ δ' ὀρθῶν γωνιῶν [αὐτοῦ], τριῶν δὲ ἑξαγώνων καὶ ἑξαγώνου γωνιῶν τριῶν, ὧν ἑκάστη α' γ'' ἐστὶν ὀρθῆς. πεντάγωνα δὲ τὰ τρία μὲν οὐ φθάνει συμπληρῶσαι τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, ὑπερβάλλει δὲ τὰ τέσσαρα· τρεῖς μὲν γὰρ τοῦ πενταγώνου γωνίαι δ' ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν (ἑκάστη γὰρ γωνία μιᾶς καὶ ε'' ἐστὶν ὀρθῆς), τέσσαρες δὲ γωνίαι μείζους τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ἑπτάγωνα δὲ οὐδὲ τρία περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον δύναται τίθεσθαι κατὰ τὰς πλευρὰς ἀλλήλοις παρακείμενα· τρεῖς γὰρ ἑπταγώνου γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζονες (ἑκάστη γάρ ἐστιν μιᾶς ὀρθῆς καὶ τριῶν ἑβδόμων). ἔτι δὲ μᾶλλον ἐπὶ τῶν πολυγωνοτέρων ὁ αὐτὸς ἐφαρμόσαι δυνήσεται λόγος. ὄντων δὴ οὖν τριῶν σχημάτων τῶν ἐξ αὐτῶν δυναμένων συμπληρῶσαι τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, τριγώνου τε καὶ τετραγώνου καὶ ἑξαγώνου, τὸ πολυγωνότερον εἵλαντο διὰ τὴν σοφίαν αἱ μέλισσαι πρὸς τὴν παρασκευήν, ἅτε καὶ πλεῖον ἑκατέρου τῶν λοιπῶν αὐτὸ χωρεῖν ὑπολαμβάνουσαι μέλι.

3 Καὶ αἱ μέλισσαι μὲν τὸ χρήσιμον αὐταῖς ἐπίστανται μόνον τοῦθ' ὅτι τὸ ἑξάγωνον τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ τριγώνου μεῖζόν ἐστιν καὶ χωρῆσαι δύναται πλεῖον μέλι τῆς ἴσης εἰς τὴν ἑκάστου κατασκευὴν ἀναλισκομένης ὕλης,

2. post ἐδύνατο add. σχῆμα τὰ τεταγμένα ABS, del. *Sca* (fuerat olim in margine glossa σχήματα τεταγμένα) 3. ἰσογώνια τὰ δ' add. *Sca* 6. ταῦτα γὰρ — 8. ἀδύνατον interpolatori tribuit *Hu* 12. αὐ-

intervalla incidere et mellificia corrumpere possent. Tres autem figurae hoc quod propositum erat efficere poterant: ordinatas dico et aequilateras et aequiangulas; nam inaequalia apibus displicebant. Nimirum aequilatera triangula et quadrata et hexagona absque dissimilibus supplementis inter se connexa possunt latera communia habere; nam locus qui circa idem punctum est aut sex triangulis aequilateris ac sex angulis, quorum quisque duarum partium recti est, completur, aut quattuor quadratis ac quattuor rectis angulis, aut tribus hexagonis ac tribus hexagoni angulis, quorum quisque unum rectum et tertiam eius partem continet. Pentagona quidem tria non sufficiunt ad locum qui circa idem punctum est replendum, quattuor autem superant, quia tres pentagoni anguli minores quattuor rectis (nam unusquisque rectum angulum cum quinta parte continet), quattuor autem maiores sunt. Nec vero tria heptagona circa idem punctum ita collocari possunt, ut latera inter se contingant, siquidem tres heptagoni anguli quattuor rectos superant (nam unusquisque rectum angulum cum tribus septimis continet); eoque magis ad polygona quae plura etiam latera habent haec ratio transferri poterit. Sic igitur cum tres figurae, eaeque aut tribus aut quattuor aut sex angulis, per se locum qui circa idem punctum est replere valerent, propter *insitam* sapientiam apes ad mellificium eam eligebant formam, quae, cum plures angulos haberet, etiam maiorem mellis copiam quam reliquae duae formae recipere posset.

Et apes quidem nihil nisi hoc quod ipsis conducit noverunt, formam hexagonam maiorem esse et plus mellis recipere posse quam quadratam aut triangulam, siquidem aequalis materies in constructionem cuiusque formae consuma-

---

τοῦ spurium, nisi forte *αὐτῶν* dedit scriptor 13. $\bar{\alpha}$ *Γ́* A, $\bar{\alpha}$ *Γ'* BS 14. *οὐ φθάνει*] *οὐκ ἀρκεῖ* vel *οὐ πέφυκε* coni. *Hu* 15. *γὰρ* add. *Hu* 17. *καὶ ἑ* A(S), *καὶ ε̄'* B 18. *οὐδὲ*] *οὔτε* coni. et lacunam post *τριῶν ἑβδόμων* statuit *Hu* 22. *πολογονωτέρων* A, corr. prima man. 24. *αυτῶν* (sine acc.) A, *αὐτῶν* BS, corr. *Hu* 26. *εἴλαντο* ABS 28. *αὐτὸ* *Sca* pro *αὐτὰ* 29. *αὐταῖς* ABS, corr. *Hu* ἡμεῖς δὲ πλέον τῶν μελισσῶν σοφίας μέρος ἔχειν ὑπισχνούμενοι ζητήσομέν τι καὶ περισσότερον. τῶν γὰρ ἴσην ἐχόντων περίμετρον ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἐπιπέδων σχημάτων μεῖζόν ἐστιν ἀεὶ τὸ πολυγωνότερον, μέγιστος δ' ἐν πᾶσιν ὁ κύκλος, ὅταν ἴσην αὐτοῖς περίμετρον ἔχῃ. δείξομεν δὲ πρότερον ὅτι τῶν ἀνισοπληθεῖς μὲν ἐχόντων τὰς γωνίας τεταγμένων πολυγώνων, τὴν δὲ περίμετρον ἴσην, τὸ πολυγωνότερον ἀεὶ καὶ μεῖζόν ἐστιν.

4 α'. Ἔστω δύο πολύγωνα ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι μὲν αὐτῶν αἱ περίμετροι, πολυγωνότερον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ μεῖζον τοῦ ΓΑΒ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν περιγραφομένων αὐτοῖς κύκλων τὰ Η Θ, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΗΓ ΘΔ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν πολυγωνότερόν ἐστιν τὸ ΕΔΖ τοῦ ΑΒΓ, πλεονάκις ἡ ΔΖ τὴν τοῦ ΔΕΖ πολυγώνου καταμετρεῖ περίμετρον ἤπερ ἡ ΑΓ τὴν τοῦ ΑΒΓ· μείζων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ (ἴσαι γὰρ ὑπόκεινται αἱ περίμετροι), ὥστε καὶ ἡ ΑΚ μείζων τῆς ΔΛ (ἡμίσεια γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας). κείσθω τῇ ΔΛ ἴση ἡ ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΗ. καὶ ἐπεί, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ΑΓ εὐθεῖα τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ γωνία τεσσάρων ὀρθῶν (ἐπειδὴ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ πολύγωνον); ὁμοίως δὲ καί, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς τοῦ ΔΕΖ περιμέτρου; τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΖ γωνία τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ περίμετροι ἀλλήλαις καὶ αἱ δ' ὀρθαὶ ταῖς δ' ὀρθαῖς, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒΓ περίμετρον, οὕτως ἡ Η γωνία πρὸς δ' ὀρθάς. ὡς δὲ ἡ περίμετρος τοῦ ΔΕΖ, τουτέστιν τοῦ ΑΒΓ, πρὸς τὴν ΔΖ, αἱ δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΖ γωνίαν·

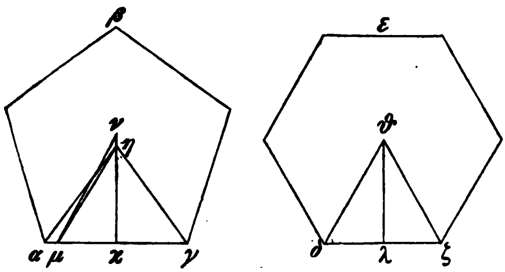
9. α' add. *Hu* 14. κύκλον (sine acc.) A, corr. BS καὶ κάθετοι coni. *Hu* αἱ ΗΚΘΛ A, distinx. BS 25. ἡ ὑπὸ ΔΕΖ AB, corr. S 27. καὶ αἱ δ' ὀρθαὶ ταῖς δ' ὀρθαῖς] quamquam eiusmodi res per se consentaneas veteres mathematici interdum adnotant, tamen haec verba maiorem interpretamenti quam genuinae scripturae speciem prae se ferunt

tur; nos autem, qui maiorem apibus sapientiae indolem profitemur, subtilius de ea re quaeremus. Nam figurarum planarum aequilaterarum et aequiangularum, quae aequalem ambitum habent, ea semper maior est quae plures angulos habet; omnium autem maximus est circulus, si aequalem cum illis perimetrum habeat. Sed primum demonstrabimus

Prop. 1

polygonorum ordinatorum (*id est regularium*), quae aequalem angulorum numerum et aequalem perimetrum habent, id quod plures angulos habet semper etiam maius esse.

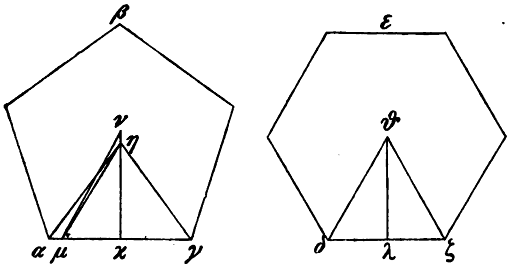
I. Sint duo polygona aequilatera et aequiangula $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$, et sint aequales eorum perimetri, plures autem angulos habeat $\delta\varepsilon\zeta$; dico $\delta\varepsilon\zeta$ maius esse quam $\alpha\beta\gamma$.



Sumantur circulorum circa polygona descriptorum centra η ϑ, et ducantur perpendiculares $\eta\kappa$ $\vartheta\lambda$, et iungantur $\alpha\eta$ $\eta\gamma$ $\delta\vartheta$ $\vartheta\zeta$. Iam quia polygonum $\varepsilon\delta\zeta$ plures angulos habet quam $\alpha\beta\gamma$, pluries recta $\delta\zeta$ metitur polygoni $\delta\varepsilon\zeta$ ambitum quam $\alpha\gamma$ polygoni $\alpha\beta\gamma$ (nam perimetri aequales suppositae sunt); ergo $\alpha\gamma$ maior est quam $\delta\zeta$; itaque etiam $\alpha\kappa$ maior quam $\delta\lambda$ (quoniam $\alpha\kappa = \frac{1}{2}\,\alpha\gamma$, et $\delta\lambda = \frac{1}{2}\,\delta\zeta$). Ponatur $\kappa\mu = \lambda\delta$, et iungatur $\mu\eta$. Et quia, quota pars est recta $\alpha\gamma$ polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetri, eadem pars est angulus $\alpha\eta\gamma$ quattuor rectorum (quoniam aequilaterum est polygonum *et propter elem. 3, 26. 28 aequales anguli in aequalibus lateribus consistunt*), ac perinde, quota pars est recta $\delta\zeta$ polygoni $\delta\varepsilon\zeta$ perimetri, eadem pars est angulus $\delta\vartheta\zeta$ quattuor rectorum, et aequales sunt perimetri, est igitur

$\alpha\gamma$: perim. $\alpha\beta\gamma = \angle\, \alpha\eta\gamma : 4$ R. Sed est

perim. $\delta\varepsilon\zeta : \delta\zeta = 4$ R $: \angle\, \delta\vartheta\zeta$, et perim. $\alpha\beta\gamma =$ perim. $\delta\varepsilon\zeta$; ergo ex aequali δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΛΔ, τουτέστιν πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΛ.



ἡ δὲ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ (τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικὰ λήμμασιν δέδεικται)· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΗΚ τῆς ὑπὸ ΔΘΛ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Κ ὀρθὴ ἴση τῇ πρὸς τῷ Λ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΜΚ τῆς ὑπὸ ΘΔΛ ἐλάσσων. ἔστω τῇ ὑπὸ ΘΔΛ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΜΝ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΛ τῇ ΚΜ· καὶ ἡ ΛΘ ἄρα τῇ ΚΝ ἴση ἐστίν· μείζων ἄρα ἡ ΘΛ τῆς ΚΗ. ἴσαι δὲ αἱ περίμετροι· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΘ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΔΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τοῦ ὑπὸ τῆς ΚΗ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ. καὶ ἔστιν τῶν εἰρημένων χωρίων ἡμίση τὰ πολύγωνα· μεῖζον ἄρα τὸ ΔΕΖ πολύγωνον τοῦ ΑΒΓ. [τὸ γὰρ ὕψος ἴσον ἐστὶ τῆς περιμέτρου τῆς αὐτῆς οὔσης τῶν δύο εὐθυγράμμων, καὶ αἱ βάσεις ἄνισοι αἱ ΘΛ ΗΚ, καὶ ὡς ἡ ΘΛ βάσις πρὸς τὴν ΗΚ βάσιν, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΘΛ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΔΕΖ πολυγώνου πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ. καὶ τὰ ἡμίση πολύγωνα ἄνισα, ὥστε μεῖζον τὸ ΔΕΖ τοῦ ΑΒΓ.]

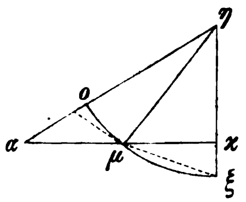
β'. Ἔστω πάλιν τὸ πολύγωνον τὸ ΑΒΓ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἴσην ἔχον τὴν περίμετρον τῇ τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείᾳ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ὁ ΔΕΖ κύκλος τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου.

$\alpha\gamma : \delta\zeta = \angle\, \alpha\eta\gamma : \angle\, \delta\vartheta\zeta$; ergo etiam $\alpha\varkappa : \delta\lambda$, id est
$\alpha\varkappa : \mu\varkappa = \angle\, \alpha\eta\varkappa : \angle\, \delta\vartheta\lambda$. Sed est
$\alpha\varkappa : \mu\varkappa > \angle\, \alpha\eta\varkappa : \angle\, \mu\eta\varkappa$, id quod in lemmatis ad sphaerica demonstratum est [1]; ergo etiam
$\angle\, \alpha\eta\varkappa : \angle\, \delta\vartheta\lambda > \angle\, \alpha\eta\varkappa : \angle\, \mu\eta\varkappa$, itaque
$\angle\, \mu\eta\varkappa > \angle\, \delta\vartheta\lambda$. Sed est angulus $\varkappa$, *utpote* rectus, aequalis angulo λ; ergo per subtractionem
$\angle\, \eta\mu\varkappa < \angle\, \vartheta\delta\lambda$.

Sit $\angle\, \varkappa\mu\nu = \angle\, \lambda\delta\vartheta$; et est $\mu\varkappa = \delta\lambda$; ergo est etiam $\varkappa\nu = \lambda\vartheta$, itaque $\lambda\vartheta > \varkappa\eta$. Sed aequales sunt perimetri; ergo rectangulum quod rectâ $\lambda\vartheta$ et polygoni $\delta\varepsilon\zeta$ perimetro continetur maius est quam id quod rectâ $\varkappa\eta$ et polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetro. Et horum rectangulorum dimidia sunt polygona [2]; ergo polygonum $\delta\varepsilon\zeta$ maius est quam $\alpha\beta\gamma$.

II. Sit rursus polygonum $\alpha\beta\gamma$ aequilaterum et aequiangulum, cuius perimetrus aequalis sit circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentiae; dico circulum $\delta\varepsilon\zeta$ maiorem esse polygono $\alpha\beta\gamma$. Prop. 2

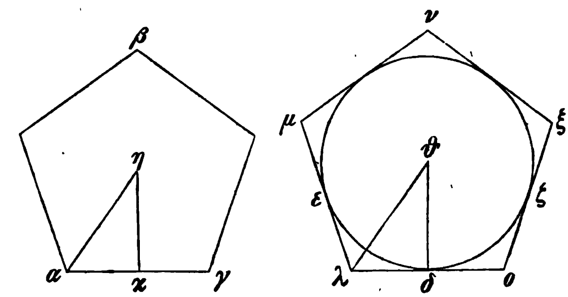
1) Lemma sphaericorum a scriptore citatum nostra aetate periisse videtur, quod ita restituit Commandinus, ut demonstret triangulum $\alpha\eta\mu$ maius esse quam sectorem $o\eta\mu$, et triangulum $\mu\eta\varkappa$ minus quam sectorem $\mu\eta\xi$; esse autem inter se triangula ut $\alpha\mu : \mu\varkappa$, et sectores ut $\angle\, \alpha\eta\mu : \angle\, \mu\eta\xi$; ergo $\alpha\mu : \mu\varkappa > \angle\, \alpha\eta\mu : \angle\, \mu\eta\varkappa$, et componendo $\alpha\varkappa : \mu\varkappa > \angle\, \alpha\eta\varkappa : \angle\, \mu\eta\varkappa$. Sed forsitan scriptor illud lemma spectaverit quod infra propos. 27 legitur. Sic igitur ad Archimedis de sphaer. et cyl. I propos. 1 et 2 provocaverit, atque ostenderit primum rectam $\mu\varkappa$ minorem esse quam rectam $\mu\xi$, eoque magis quam circumferentiam $\mu\xi$, tum rectam $\alpha\mu$ maiorem esse quam tangentem ex μ ad $\alpha\eta$ ductam, eoque magis quam circumferentiam $o\mu$, unde efficiatur $\alpha\mu : \mu\varkappa > \angle\, \alpha\eta\mu : \angle\, \mu\eta\xi$, et cetera perinde atque antehac.



2) "Nam triangulum $\vartheta\delta\zeta$ dimidium est rectanguli quod $\delta\zeta$ et $\vartheta\lambda$ continetur" *Co*, unde illa quae supra posita sunt facile efficiuntur (quae tamquam consentanea Graecus scriptor omisit).

8. 9. τῆς ὑπὸ $\overline{\Delta\Lambda\Theta}$ ABS, corr. *Co Sca* 17—23. "vide ne hoc scholium quoddam sit librarii incuria hoc loco insertum" *Co* 17. ἴσον S, ἀνισον A, sed ἀν expunctum, ἄνυσον B 24. $\overline{\beta}$ον add. B

Εἰλήφθω τοῦ μὲν ΔΕΖ κύκλου κέντρον τὸ Θ, τοῦ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓ πολύγωνον περιγραφομένου κύκλου κέντρον τὸ Η, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον ὅμοιον



τῷ ΑΒΓ τὸ ΛΜΝΞΟ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΔ, καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ΛΜΝΞΟ πολυγώνου περίμετρος τῆς τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείας, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδει ὑπόκειται [διὰ τὸ περιέχειν αὐτήν], ἡ δὲ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρῳ, καὶ ἡ τοῦ ΛΜΝΞΟ πολυγώνου περίμετρος μείζων τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ πολύγωνα· μείζων ἄρα ἡ ΛΔ τῆς ΑΚ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ΑΗΚ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ τριγώνῳ (καὶ γὰρ τὰ ὅλα πολύγωνα ὅμοιά ἐστι)· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΔ τῆς ΗΚ. ἴση δὲ ἡ τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφέρεια τῇ τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρῳ· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΔΘ καὶ τῆς τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείας τοῦ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῆς ΔΘ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας διπλάσιον τοῦ ΔΕΖ κύκλου (καὶ τοῦτο γὰρ ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας δέδεικται), τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου, καὶ τὰ ἡμίση· μείζων ἄρα ὁ κύκλος τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου.

6 *γ'. Ὅτι μὲν οὖν τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου Ἀρχι-*

Sumatur circuli $\delta\varepsilon\zeta$ centrum ϑ, et circuli qui circa polygonum $\alpha\beta\gamma$ describitur centrum η, et describatur circa circulum $\delta\varepsilon\zeta$ polygonum $\lambda\mu\nu\xi o$ simile polygono $\alpha\beta\gamma$, *et latus* λo *circulum tangat in* δ, et iungatur $\vartheta\delta$, et ab η ad $\alpha\gamma$ ducatur perpendicularis $\eta\varkappa$. Iam quia polygoni $\lambda\mu\nu\xi o$ perimetrus maior est circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentiâ, ut in *primo* libro de sphaera et cylindro (*propos. 2*) ab Archimede expositum est, et circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentia aequalis est polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetro, est *igitur*

perim. $\lambda\mu\nu\xi o >$ perim. $\alpha\beta\gamma$. Et sunt similia polygona; ergo

$\lambda\delta > \alpha\varkappa$. Et quia tota polygona similia sunt, est etiam

$\triangle\, \lambda\vartheta\delta \sim \triangle\, \alpha\eta\varkappa$; itaque

$\vartheta\delta > \eta\varkappa$.

Sed circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentia aequalis est polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetro; ergo rectangulum quod rectâ $\vartheta\delta$ et circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentiâ continetur maius est quam id quod rectâ $\eta\varkappa$ et polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetro. Et est rectangulum quod rectâ $\vartheta\delta$ et circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentiâ continetur duplum circuli $\delta\varepsilon\zeta$ — nam hoc quoque ab Archimede in libro de circuli circumferentia demonstratum est[1]) — sed rectangulum quod rectâ $\eta\varkappa$ et polygoni $\alpha\beta\gamma$ perimetro continetur duplum est polygoni $\alpha\beta\gamma$; atque *ut tota, ita inter se sunt* dimidia; ergo circulus $\delta\varepsilon\zeta$ maior est polygono $\alpha\beta\gamma$.

III. Etsi rectangulum quod circuli perimetro et radio continetur circuli duplum esse Archimedes demonstravit, ta- Prop. 3

1) Sic a scriptore liberius citatur Archimedis κύκλου μέτρησις, cuius prima propositio est: πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ λοιπῇ.

---

2. τὸ $AB\Gamma$ Co pro τὸ $\overline{AB}$ 8. διὰ — αὐτήν interpolatori tribuit Hu 14. τηι $\overline{HK}$ A(B), corr. S 16. περιμέτρου AB, corr. S τησιουτου $\overline{\Delta EZ}$ A(BS), sed in B alterum του expunctum 17. τοῦ $AB\Gamma$ Co pro τοῦ $\overline{AB}$ 21. περιφερείας] μετρήσεως coni. Co (conf. adnot. ad Lat.) 25. $\overline{\Gamma}^{ov}$ add. B(S)

μήδης ἀπέδειξεν, οὐδὲν δὲ ἧττον καὶ ἑξῆς δειχθήσεται τοῦτο πρὸς τὸ μὴ δεῖσθαι τοῦ Ἀρχιμηδείου συντάγματος ἕνεκεν μόνου τοῦ θεωρήματος τούτου.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἥμισυ ἔστω τὸ Ζ χωρίον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶν τὸ Ζ χωρίον τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ.

7 Ἔστω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἀκολούθως τῇ ἀγωγῇ τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων ἐγγράψαι εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ ἐγγραφὲν πολύγωνον μεῖζον εἶναι τοῦ Ζ χωρίου, εἰ πρότερον ἐγγραφείη τετράγωνον εἰς τὸν κύκλον καὶ αἱ περιφέρειαι τῶν περιλειπομένων τμημάτων αἰεὶ δίχα τέμνοιντο, μέχρις ἂν λειφθείη τινὰ τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Ζ χωρίου. ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἤχθω ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ ὁποσαγώνου, ἡ δ' ἐκ τοῦ κέντρου μείζων τῆς ΗΘ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου καὶ τῆς ΗΘ. καὶ τὰ ἡμίση· μεῖζον ἄρα τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Ζ χωρίου.

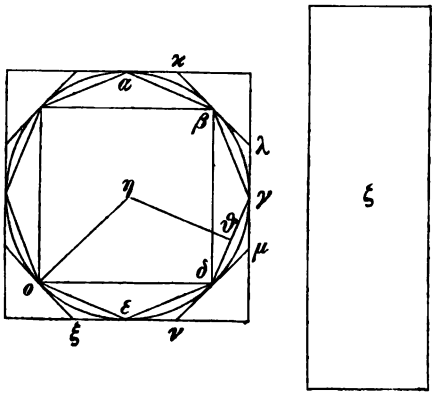
8 Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάσσων· δυνατὸν ἄρα περιγράψαι περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ Ζ χωρίον μεῖζον εἶναι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, εἰ πρότερον τετράγωνον περιγραφείη περὶ τὸν κύκλον καὶ δίχα ἀεὶ τεμνομένων τῶν ἀπο-

---

4. ὁ ΑΒΓ et 10. τὸν ΑΒΓ ABS, corr. *Co* 15. ὁ ΑΒ ΓΔ A, coniunx. BS 18. ἡ ΗΘΕ ἐπὶ ABS, corr. *Co* 25. ὁ ΑΒΓ ABS, corr. *Co* 27. ἔστω A[1] corr. ex ἔσται

men a nobis idem deinceps ostendetur, ne propter hoc unum theorema Archimedis librum *adire* necesse sit.

Sit enim circulus $\alpha\beta\gamma\delta$, et rectanguli quod circuli perimetro et radio continetur dimidia pars sit spatium ζ; dico spatium ζ circulo $\alpha\beta\gamma\delta$ aequale esse.



Sit enim primum, si fieri possit, minus. Ergo convenienter iis quae duodecimo elementorum (*propos.* 2) traduntur in circulum $\alpha\beta\gamma\delta$ licet polygonum ita inscribere, ut id ipsum maius sit spatio ζ, siquidem primum quadratum in circulum inscribatur et circumferentiae segmentorum quae extra relinquuntur semper bifariam secentur, donec segmenta quaedam relicta sint minora eo excessu quo circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ spatium ζ superat. Inscriptum sit *eiusmodi polygonum* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$*), et a centro η ad unum eius latus, *velut* $\gamma\delta$, ducatur perpendicularis $\eta\vartheta$. Iam quia circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ perimetrus maior est perimetro polygoni $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, ac *circuli* radius maior quam $\eta\vartheta$, rectangulum igitur quod circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ perimetro et radio continetur maius est quam quod polygoni $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ perimetro et rectà $\eta\vartheta$. Atque item dimidiae partes; ergo spatium ζ maius polygono $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, quod quidem fieri non potest; nam ex hypothesi minus est; ergo non maior est circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ spatio ζ.

Sed nego etiam *circulum* minorem esse *spatio* ζ. Si enim fieri possit, sit minor; ergo circa circulum $\alpha\beta\gamma\delta$ licet polygonum ita describere, ut spatium ζ maius sit quam id quod circumscriptum est polygonum, siquidem primum quadratum circa circulum describatur, et circumferentiis, quae

*) Figura in codice tradita pentagonum circulo inscriptum atque alterum circumscriptum exhibet.

λειπομένων περιφερειῶν ἄγοιντο ἐφαπτόμεναι, μέχρις ἂν ἀπολειφθῇ τινα τμήματα τῶν ἐκτὸς σχημάτων, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν [ἀνάγκῃ] γενέσθαι δέδεικται. περιγεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, τὸ πολύγωνον καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜΝΞ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν συναφῶν τὴν Ο ἡ ΗΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ ΚΛΜΝΞ πολυγώνου μείζων ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΚΛΜΝΞ πολυγώνου καὶ τῆς ΗΟ μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ΗΟ. καὶ τὰ ἡμίση· τὸ ἄρα ΚΛΜΝΞ πολύγωνον μεῖζον τοῦ Ζ χωρίου, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον· οὐκ ἄρα τὸ Ζ χωρίον μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον· ἴσον ἄρα. καὶ ἔστι τοῦ Ζ χωρίου διπλάσιον τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

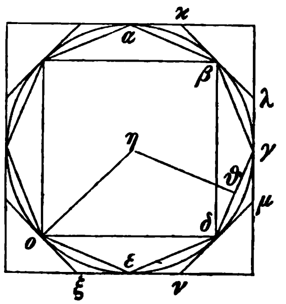
9 δ΄. Οὐ μόνον δὲ τῶν τεταγμένων ἐπιπέδων σχημάτων, ἅ ἐστιν ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια, ὁ κύκλος γίνεται μείζων, ἀλλὰ καὶ τῶν ἀνισοπλεύρων καὶ τῶν ἀνομοιογωνίων, ὅταν τὴν αὐτὴν αὐτοῖς περίμετρον ἔχῃ. δειχθήσεται γὰρ ὅτι καὶ τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων πολυγώνων καὶ πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τέ ἐστιν καὶ ἰσογώνιον. πρότερον οὖν τὰ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ λαμβανόμενα θεωρήματα προγράψομεν.

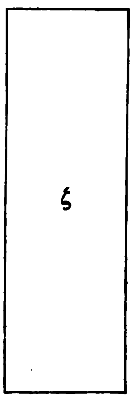
10 Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ, καὶ εὐθεῖα ἡ Ε, ἥτις ἔστω ἐλάσσων μὲν τῆς ΑΒ, μείζων δὲ τῆς ΒΓ· ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐπὶ τῆς ΑΓ δύο εὐθείας συσταθῆναι, ὥστε συναμφοτέρας μὲν ἴσας εἶναι ταῖς ΑΒΓ, μίαν δὲ αὐτῶν ἴσην τῇ Ε.

---

4. *ἀνάγκηι* A, *ἀνάγκη* BS, del. *Co* *δειχθήσεται* ABS, corr. *Co* (conf. cap. 7) 6. *ἐπιζεύχθω* A, corr. BS 7. *ἡ* $\overline{HO}$ A, sed *O* non satis perspicuum, unde *ἡ* $\overline{\eta\vartheta}$ BS 8. *μεῖζον* AB, corr. S 16. *τὸ ὑπὸ* *Sca* (*illud Co*) pro *τοῦ ὑπὸ* 18. $\overline{\delta}^{ov}$ add. B(S), numerus huius lemmatis infra cap. 18 citatur 27. *ἔστω* *Hu* pro *ἐστὶν*

inter bina contactûs puncta relinquuntur, semper bifariam sectis tangentes ducantur, donec figurarum, quae extra sunt, relinquantur quaedam segmenta minora eo excessu quo spatium ζ circulum $\alpha\beta\gamma\delta$ superat; hoc enim fieri posse demonstratum est (*elem.* 12, 2). Circumscriptum igitur sit eiusmodi polygonum $\varkappa\lambda\mu\nu\xi$, et a centro η ad unum contactûs punctum o iungatur ηo. Iam quia polygoni $\varkappa\lambda\mu\nu\xi$ perimetrus maior est circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ perimetro, rectangulum igitur quod polygoni $\varkappa\lambda\mu\nu\xi$ perimetro et rectâ ηo continetur maius est quam quod circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ perimetro et eâdem ηo. Atque item dimidiae partes; ergo polygonum $\varkappa\lambda\mu\nu\xi$ maius spatio ζ, quod quidem fieri non potest; nam ex hypothesi minus est; ergo non maius est spatium ζ circulo $\alpha\beta\gamma\delta$.



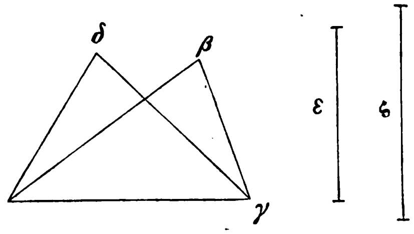


Sed demonstravimus etiam non minus esse; ergo aequale est. Et est spatii ζ duplum rectangulum quod circuli $\alpha\beta\gamma\delta$ perimetro et radio continetur.

IV. Neque solum planis figuris ordinatis, quae aequilaterae et aequiangulae sunt, circulus maior est, sed etiam iis quae inaequalia latera et dissimiles angulos habent, siquidem eandem atque illae perimetrum habeat. Demonstrabimus enim polygonorum, quae aequalem perimetrum eundemque laterum numerum habent, maximum esse aequilaterum et aequiangulum. Iam primum theoremata, quae ad eam demonstrationem adsumuntur, praemittemus.

Sit triangulum $\alpha\beta\gamma$, cuius latus $\alpha\beta$ maius quam $\beta\gamma$, et recta ε minor quam $\alpha\beta$ ac maior quam $\beta\gamma$; dico fieri posse ut in *basi* $\alpha\gamma$ duae rectae constituantur, quarum summa aequalis sit ipsis $\alpha\beta + \beta\gamma$, una autem aequalis ipsi ε. Prop. 4

Ὅσον γὰρ ὑπερέχουσιν αἱ ΑΒ ΒΓ τῆς Ε, ἔστω ἡ Ζ· ἡ Ζ ἄρα τῆς μὲν ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶν (ὅτι συναμφότεραι αἱ ΑΒΓ ταῖς Ε Ζ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ Ε τῆς ΓΒ μείζων), τῆς δὲ ΓΒ μείζων (ἐπεὶ συναμφότεραι πάλιν αἱ ΑΒΓ ταῖς Ε Ζ ἴσαι, ὧν ἡ Ε τῆς ΑΒ ἐλάσσων). ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΒΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν, καὶ αἱ Ε Ζ ἄρα τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν.



*ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ΑΓΒ τῆς ΑΒ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΓΒ μείζων ἡ Ε, τῆς δὲ ΑΒ ἐλάσσων ἡ Ζ, πολλῷ ἄρα αἱ ΑΓ Ε τῆς Ζ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως ἐπεὶ αἱ ΑΓΒ τῆς ΑΒ μείζονες, ἀλλὰ τῆς μὲν ΓΒ μείζων ἡ Ζ, τῆς δὲ ΑΒ ἐλάσσων ἡ Ε, πολλῷ ἄρα αἱ ΑΓ Ζ τῆς Ε μείζονές εἰσιν· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ΑΓ Ε Ζ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΑΓΔ *** [καὶ φανερὸν ὅτι εἰ μὲν ἴσαι εἰσὶν αἱ Ε Ζ, ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, εἰ δὲ ἄνισοι, ἡ μείζων αὐτῶν ἴση ἔσται τῇ ΓΔ].*

11 *ε'. Τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἐχόντων τὸ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστιν, καὶ ἀεὶ τὸ ἰσοσκελέστερον μεῖζον.*

Ἐπὶ γὰρ τῆς ΒΓ βάσεως ἰσοπερίμετρα ἔστω τρίγωνα, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ ΑΒΓ, ἰσοσκελέστερον δὲ τὸ ΒΔΓ τοῦ ΒΕΓ (δυνατὸν γὰρ κατασκευάσαι διὰ τὸ προδειχθὲν ἔναγχος)· λέγω ὅτι μέγιστον μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ, μεῖζον δὲ τὸ ΒΔΓ τοῦ ΒΕΓ.

---

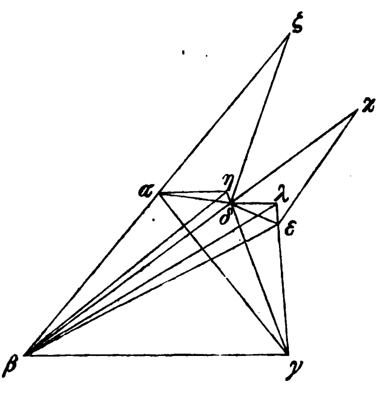
2. *ὅτι*] in promptu est *ἐπεὶ* coniicere; sed *ὅτι* hoc sensu infra saepius redit 3. *ταῖς* $\overline{EZ}$ A, distinx. BS, item vs. 6 4. post *τῆς δὲ ΓΒ μείζων* add. *ἡ* $\overline{Z}$ ABS, del. *Hu* (aliter *Co*, qui tamen corruptelam auxit, non sustulit) 10. *καὶ αἱ* $\overline{EZ}$ A, distinx. BS 14. *αἱ* $\overline{ΑΓΕ}$ AB Paris. 2368, *αἱ* $\bar{α}\ \bar{γ}\ \bar{ε}$ S, item *αἱ* $\overline{ΑΓΖ}$ etc. vs. 16 15. *τῆς μὲν* $\overline{ΓΕ}$ AB, corr. S 17. *ἐκ τῶν* $\overline{ΑΓ}$ $\overline{EZ}$ ABS, distinx. *Co* 18. lacunam indicavit et in Latinis explevit, item *καὶ φανερὸν* — 20. *τῇ*

Sit enim $\zeta = \alpha\beta + \beta\gamma - \varepsilon$; ergo est
$\alpha\beta > \zeta$ (quia $\alpha\beta + \beta\gamma = \varepsilon + \zeta$, et $\varepsilon > \beta\gamma$), et
$\zeta > \beta\gamma$ (quia rursus $\alpha\beta + \beta\gamma = \varepsilon + \zeta$, et $\varepsilon < \alpha\beta$).

Iam quia (*elem. 1, 20*) sunt $\alpha\beta + \beta\gamma > \alpha\gamma$,
ergo etiam $\varepsilon + \zeta > \alpha\gamma$.
Sed quia etiam sunt $\alpha\gamma + \beta\gamma > \alpha\beta$,
et $\varepsilon > \beta\gamma$,
et $\alpha\beta > \zeta$;
multo igitur sunt $\alpha\gamma + \varepsilon > \zeta$.
Similiter quia sunt $\alpha\gamma + \beta\gamma > \alpha\beta$,
et $\zeta > \beta\gamma$,
et $\alpha\beta > \varepsilon$,
multo igitur sunt $\alpha\gamma + \zeta > \varepsilon$.

Ergo ex rectis $\alpha\gamma$ ε ζ triangulum construi potest (*elem. 1, 22*). Constructum sit triangulum $\alpha\delta\gamma$; *ergo in basi $\alpha\gamma$ duae rectae constitutae sunt, quarum una aequalis est ipsi ε, summa autem aequalis ipsis $\alpha\beta + \beta\gamma$.*

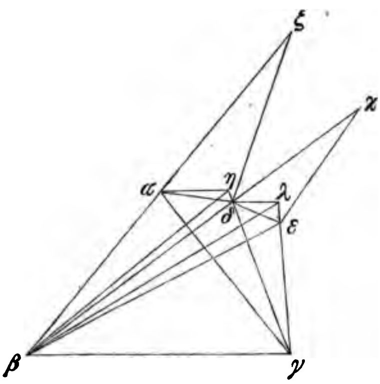
V. Triangulorum, quae aequalem perimetrum et eandem basim habent, aequicrure maximum est, et semper maius id quod ad aequicrure magis accedit. Prop. 5



Etenim in basi $\beta\gamma$ sint triangula aequali perimetro, quorum aequicrure sit $\alpha\beta\gamma$, et $\delta\beta\gamma$ magis quam $\varepsilon\beta\gamma$ ad aequicrure accedens (haec enim construi possunt propter lemma modo demonstratum); dico triangulum $\alpha\beta\gamma$ maximum esse, maius autem $\delta\beta\gamma$ quam $\varepsilon\beta\gamma$.

$\Gamma\Delta$ interpolatori tribuit *Hu* 19. *αἰ* $\overline{EZ}$ A, distinx. BˢS 21. $\tilde{\varepsilon}$ A[1] in marg. (BS)

Ἐκβεβλήσθω ἡ *ΒΑ*, καὶ κείσθω τῇ *ΓΑ* ἴση ἡ *ΑΖ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΖΔ ΔΑ*. ἐπεὶ οὖν αἱ *ΖΔΒ* τῆς *ΒΖ* μείζονές εἰσιν, καὶ τῶν *ΒΑΓ* ἄρα μείζονές εἰσιν (ἴση γὰρ ἡ *ΑΓ* τῇ *ΑΖ*). ἀλλ' αἱ *ΒΑΓ* ταῖς *ΒΔΓ* ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ *ΒΔΖ* ἄρα τῶν *ΒΔΓ* μείζονές εἰσιν. κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς *ΒΔ* λοιπὴ ἡ *ΖΔ* τῆς *ΔΓ* μείζων ἐστίν. δύο δὴ αἱ *ΖΑΔ* δύο ταῖς *ΓΑΔ* ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ *ΖΔ* βάσεως τῆς *ΔΓ* μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ *ΖΑΔ* γωνίας τῆς ὑπὸ *ΔΑΓ* μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ *ΖΑΓ* τῆς ὑπὸ *ΔΑΓ* μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. διπλῆ δέ ἐστιν τῆς ὑπὸ *ΑΒΓ*, τουτέστιν τῆς ὑπὸ *ΑΓΒ* (ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ τρίγωνον)· καὶ ἡ ὑπὸ *ΑΓΒ* ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ *ΔΑΓ*.



κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ *ΓΑΗ*· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΗ* τῇ *ΒΓ* διὰ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας. ἐκβληθείσης οὖν τῆς *ΓΔ* ἐπὶ τὸ *Η* καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς *ΒΗ* φανερὸν ὅτι τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον τοῦ *ΒΔΓ* μεῖζόν ἐστιν· ἴσον γὰρ τὸ *ΒΑΓ* τῷ *ΒΗΓ*. πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ *ΒΔ* ἐπὶ τὸ *Κ*, καὶ κείσθω τῇ *ΔΓ* ἴση ἡ *ΔΚ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΚΕ ΔΕ*. ἐπεὶ αἱ *ΒΕΚ* τῆς *ΒΚ*, τουτέστιν τῶν *ΒΔΓ*, τουτέστιν τῶν *ΒΕΓ* μείζονές εἰσιν, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς *ΒΕ* λοιπὴ ἡ *ΕΚ* τῆς *ΕΓ* μείζων ἐστίν. δύο δὴ αἱ *ΚΔΕ* δυσὶ ταῖς *ΓΔΕ* ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ *ΚΕ* βάσεως τῆς *ΕΓ* μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ *ΚΔΕ* γωνίας τῆς ὑπὸ *ΓΔΕ* μείζων ἐστίν· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ *ΚΔΓ* ἢ διπλῆ τῆς ὑπὸ *ΓΔΕ*. τῆς δὲ ὑπὸ *ΔΓΒ* ἐλάσσων ἢ διπλῆ ἡ αὐτὴ ἡ ὑπὸ *ΚΔΓ* (μείζων γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ *ΔΓΒ* τῆς ὑπὸ *ΔΒΓ*· ἴσαι γὰρ αἱ ὑπὸ *ΑΒΓ ΑΓΒ*)· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ *ΔΓΒ* τῆς ὑπὸ *ΓΔΕ*. συνεστάτω πρὸς τῇ *ΔΓ* καὶ τῷ *Δ* τῇ ὑπὸ *ΔΓΒ* ἴση ἡ ὑπὸ *ΓΔΛ*· φανερὸν γὰρ ὅτι μεταξὺ τῶν *ΔΕ ΔΚ* ἡ *ΔΛ*

Producatur $\beta\alpha$, et ponatur $\alpha\zeta = \alpha\gamma$, et iungantur $\zeta\delta$ $\delta\alpha$. Iam quia sunt

$\zeta\delta + \delta\beta > \beta\zeta$, sunt igitur etiam (quia $\alpha\zeta = \alpha\gamma$) $> \beta\alpha + \alpha\gamma$. Sed *ex constructione* sunt $\beta\alpha + \alpha\gamma = \beta\delta + \delta\gamma$; ergo etiam $> \beta\delta + \delta\gamma$. Auferatur communis $\beta\delta$; restat igitur

$\zeta\delta > \delta\gamma$. Iam quia *in triangulis* $\zeta\alpha\delta$ $\gamma\alpha\delta$ est $\zeta\alpha = \gamma\alpha$, et $\alpha\delta = \alpha\delta$, et $\zeta\delta > \gamma\delta$, est igitur

$\angle \zeta\alpha\delta > \angle \gamma\alpha\delta$; ergo

$\angle \zeta\alpha\gamma > 2 \angle \gamma\alpha\delta$. Sed est $\angle \zeta\alpha\gamma = 2 \angle \alpha\beta\gamma = 2 \angle \alpha\gamma\beta$ (nam triangulum $\alpha\beta\gamma$ aequicrure est); ergo est

$\angle \alpha\gamma\beta > \angle \gamma\alpha\delta$.

Ponatur $\angle \eta\alpha\gamma = \angle \alpha\gamma\beta$; ergo $\alpha\eta$ $\beta\gamma$ parallelae sunt propter aequales angulos alternos. Iam productâ $\gamma\delta$ ad η et iunctâ $\beta\eta$ apparet esse

$\Delta\, \alpha\beta\gamma > \Delta\, \delta\beta\gamma$, quia $\Delta\, \alpha\beta\gamma = \Delta\, \eta\beta\gamma$.

Rursus producatur $\beta\delta$ ad $\varkappa$, et ponatur $\delta\varkappa = \delta\gamma$, et iungantur $\varkappa\varepsilon$ $\delta\varepsilon$. Quia sunt

$\beta\varepsilon + \varepsilon\varkappa > \beta\varkappa$, id est $> \beta\delta + \delta\gamma$, id est $> \beta\varepsilon + \varepsilon\gamma$, communi sublatâ $\beta\varepsilon$ restat

$\varepsilon\varkappa > \varepsilon\gamma$. Iam quia *in triangulis* $\varkappa\delta\varepsilon$ $\gamma\delta\varepsilon$ est $\varkappa\delta = \gamma\delta$, et $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$, et $\varkappa\varepsilon > \gamma\varepsilon$, est igitur

$\angle \varkappa\delta\varepsilon > \angle \gamma\delta\varepsilon$. Ergo

$\angle \varkappa\delta\gamma > 2 \angle \gamma\delta\varepsilon$. Sed est

$\angle \varkappa\delta\gamma < 2 \angle \delta\gamma\beta$ (est enim $\angle \varkappa\delta\gamma = \angle \delta\gamma\beta + \angle \delta\beta\gamma$, *et* $\angle \delta\gamma\beta > \angle \delta\beta\gamma$, quia $\angle \delta\gamma\beta > \angle \alpha\gamma\beta$, *et* $\angle \delta\beta\gamma < \angle \alpha\beta\gamma$, *et* $\angle \alpha\gamma\beta = \angle \alpha\beta\gamma$); ergo

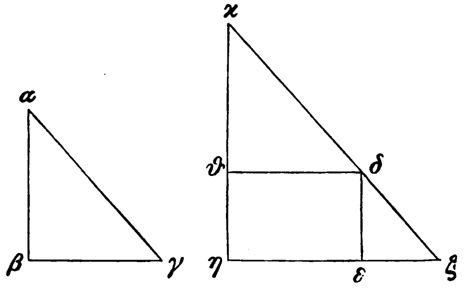
$\angle \delta\gamma\beta > \angle \gamma\delta\varepsilon$.

Construatur ad rectam $\gamma\delta$ punctumque δ angulo $\beta\gamma\delta$ aequalis $\gamma\delta\lambda$; apparet enim rectam $\delta\lambda$ inter $\delta\varepsilon$ $\delta\varkappa$ esse, quoniam

2. αἱ $\overline{ZΔB}$* τῆς A 25. τῇι * $\overline{ΔΓ}$ A 28. μειζον (sine acc.) A, corr. BS 34. αἱ ὑπὸ $\overline{ABΓ}$ $\overline{ΔΓ}$ ABS, corr. *Co Sca* 35. πρὸς τὴν $\overline{ΔΓ}$ AB, corr. S

ἔσται παράλληλος οὖσα τῇ ΒΓ διὰ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας· ἐκβληθείσης ἄρα τῆς ΓΕ ἄχρι τῆς ΔΑ παραλλήλου καὶ συμπιπτούσης κατὰ τὸ Δ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΔ ἔσται τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΑΓ [ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΓΒ καὶ παραλλήλων τῶν ΒΓ ΔΑ], ὥστε μεῖζον εἶναι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΒΕΓ ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ΒΔΓ.

12 ς'. Πάλιν ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅμοια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΕΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η παράλληλος τῇ ΔΕ ἀχθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΔΖ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ, διὰ δὲ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΖΗ ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΘ τῇ ΗΕ ἐν παραλληλογράμμῳ, τουτέστιν τῇ ΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΘ γωνία τῇ Ζ ἴση, τουτέστιν τῇ Γ, καὶ ὀρθὴ ἡ Θ τῇ Β, καὶ λοιπὴ ἡ Κ τῇ Α, ἰσογώνια ἄρα τὰ ΚΘΔ ΑΒΓ τρίγωνα καὶ ἴσα· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΖ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΗΖ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς τῷ τε ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς.

13 ζ'. Τὰ ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα συναμφότερα τῶν ἐπὶ ταῖς αὐταῖς βάσεσι συναμφοτέρων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστιν.

Ἔστω ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΔΖΒ ΒΑΓ, καὶ propter *aequales* angulos alternos ipsi $\beta\gamma$ parallela est; ergo si $\gamma\varepsilon$ ad $\delta\lambda$ parallelam producatur eique occurrat in puncto λ et recta $\beta\lambda$ iungatur, erit

$\Delta\ \lambda\beta\gamma = \Delta\ \delta\beta\gamma$. *Sed ex constructione est*

$\Delta\ \lambda\beta\gamma > \Delta\ \varepsilon\beta\gamma$, *et supra demonstravimus esse*

$\Delta\ \delta\beta\gamma < \Delta\ \alpha\beta\gamma$; itaque erit

$\Delta\ \alpha\beta\gamma > \Delta\ \delta\beta\gamma > \Delta\ \varepsilon\beta\gamma$.

VI. Rursus sint duo triangula orthogonia similia $\alpha\beta\gamma$ Prop. 6
$\delta\varepsilon\zeta$ aequalibus angulis $\gamma\ \zeta$; dico esse

$$(\alpha\gamma + \delta\zeta)^2 = (\beta\gamma + \varepsilon\zeta)^2 + (\alpha\beta + \delta\varepsilon)^2.$$

Producatur enim $\zeta\varepsilon$ ad η, et ponatur $\varepsilon\eta = \beta\gamma$, et per η rectae $\delta\varepsilon$ parallela ducatur, quae ipsi $\zeta\delta$ productae occurrat in $\varkappa$, et per δ rectae $\zeta\eta$ parallela $\delta\vartheta$. Iam quia est $\vartheta\delta = \eta\varepsilon$ in parallelogrammo, id est $\vartheta\delta = \beta\gamma$, et $\angle\ \varkappa\delta\vartheta = \angle\ \varkappa\zeta\eta = \angle\ \alpha\gamma\beta$, et rectus $\angle\ \varkappa\vartheta\delta = \angle\ \alpha\beta\gamma$, et reliquus $\angle\ \vartheta\varkappa\delta = \angle\ \beta\alpha\gamma$*), triangula igitur $\varkappa\vartheta\delta\ \alpha\beta\gamma$ similia et aequalia sunt. Ergo est

$\varkappa\zeta^2 = \varkappa\eta^2 + \eta\zeta^2$, id est

$$(\alpha\gamma + \delta\zeta)^2 = (\alpha\beta + \delta\varepsilon)^2 + (\beta\gamma + \varepsilon\zeta)^2.$$

VII. Summa similium triangulorum aequicrurium maior Prop. 7
est summâ triangulorum aequicrurium quae in iisdem basibus *constituta* ac dissimilia cum sibi invicem tum illis similibus sunt, sed quorum summa laterum aequalis est laterum summae illorum.

Sint similia triangula aequicruria $\zeta\delta\beta\ \alpha\beta\gamma$, et in iisdem basibus alia aequicruria triangula $\varepsilon\delta\beta\ \lambda\beta\gamma$, quorum summa la-

*) Graeca p. 322, 14. ἐπεὶ οὖν — 17. ἡ *K* τῇ *Δ*, si absint, nemo desideret; item proximo lemmate p. 324, 8. verba ἴσαι γάρ εἰσιν — 15. ὀρθαὶ αἱ *M M*. Sed veteres mathematici etiam in difficilioribus demonstrationibus interdum ad ipsa tironum elementa descendunt. Conf. infra Simsoni adnotationem ad VII propos. 162.

---

1. παραλλήλαις ABS, corr. *Sca* (*Co*) 4. 5. ἐπὶ τῆς — *ΒΓ ΔΛ* interpolatori tribuit *Hu* 5. τῆς $\overline{ΓΒ}$ A² ex τῆς **B* 6. ὄντος τοῦ $\overline{ΒΔΓ}$ ABS, corr. *Hu* 7. $\overline{ϛ}$ A¹ in marg. (B), om. S 8. τὰς $\overline{ΓΖ}$ A, distinx. BS 17. τὰ $\overline{ΚΘΛ}$ ABS, corr. *Co* 19. τῷ τε *Hu* pro καὶ τῶι (καὶ om. etiam *Co*) 21. $\overline{ζ}$ A¹ in marg. (B), om. S

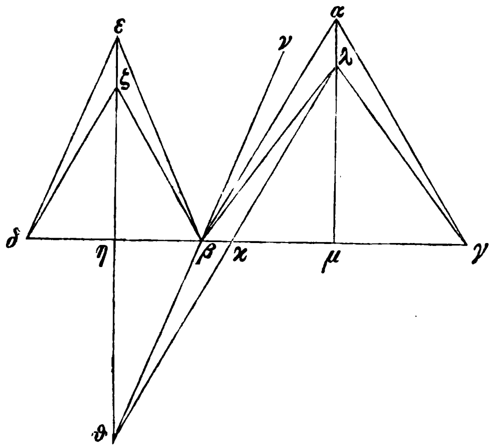
ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἄλλα ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΔΕΒ ΒΔΓ ἰσοπερίμετρα μὲν τοῖς ΔΖΒ ΒΔΓ, ἀνόμοια δὲ ἐξ ἀνάγκης [ὅτι αἱ γωνίαι ἄνισοί εἰσιν]· τοῦτο δὲ ὡς δυνατὸν κατασκευάσαι δειχθήσεται· λέγω ὅτι τὰ ΔΒΖ ΒΔΓ συναμφότερα τῶν ΔΕΒ ΒΔΓ συναμφοτέρων μείζονά ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ ΔΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰς βάσεις· τεμοῦσι δὴ αὐτὰς δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθάς· ἴσαι γάρ εἰσιν αἱ ΔΕΖ ταῖς ΒΕΖ, καὶ βάσεις ἴσαι αἱ ΔΖ ΖΒ, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ γωνίαι ἴσαι [καὶ ὅμοια τὰ ΔΕΖ ΖΕΒ τρίγωνα], ὥστε καὶ τὰς ἐκτὸς γωνίας Ζ Ζ ἴσας εἶναι [ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐντός], ἴσαι δέ εἰσιν καὶ αἱ Δ Β, καὶ αἱ λοιπαὶ αἱ Η Η ἴσαι· ὀρθαὶ ἄρα εἰσίν· καὶ ἴσαι αἱ ΔΗ ΗΒ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ΒΜ ΜΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ ὀρθαὶ αἱ Μ Μ. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὰ Η Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΗ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΗ τῇ ὑπὸ ΘΒΗ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ μείζων τῆς ὑπὸ ΔΒΓ (ὅτι καὶ τῆς ὑπὸ ΖΒΗ ἴσης· ὅμοια γὰρ τὰ ΔΒΖ ΒΔΓ τρίγωνα)· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΒΗ ἄρα μείζων τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· ἡ ἄρα τὰ Θ Δ σημεῖα ἐπιζευγνύουσα τέμνει τὴν ΒΜ, ὑποκειμένης τῆς ΔΒΓ εὐθείας καὶ τῆς ΘΒΝ ἐκβεβλημένης ἔξωθεν τῆς ΔΒ, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ τῆς ὑπὸ ΘΒΗ, τουτέστιν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΝΒΓ, καὶ πολλῷ ἡ ὑπὸ ΔΒΓ ἐλάσσων, ὥστε τὴν ΒΜ τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ΘΔ κατὰ τὸ Κ [καὶ φανερὸν ὅτι οὐ τὴν ΜΓ τέμνει, ἵνα μὴ τὴν ΔΜ ἐκ-
14 βαλλομένην τέμῃ κατ' ἄλλο σημεῖον τοῦ Δ]. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΕΒ ΒΔΓ ταῖς ΔΖΒ ΒΔΓ ἴσαι εἰσίν (ὑπόκεινται γὰρ

---

3. ὅτι — εἰσιν interpolatori tribuit *Hu* 8. ἴσαι — 15. αἱ Μ Μ] conf. p. 323 adnot. * 10—12. manifesta glossemata duo del. *Hu* 13. αἱ $\overline{ΔΒ}$ A, distinx. BS 15. κατὰ τὰ $\overline{ΗΜ}$ A, distinx. BS 16. ἡ ΕΗ *Co Sca* pro ἡ $\overline{ΘΗ}$ 20. ἄρα τὰ $\overline{ΘΔ}$ A, distinx. BS 23. τῆς ὑπὸ $\overline{ΘΗΒ}$ ABS, corr. *Co Sca* 26. 27. καὶ φανερὸν — τοῦ Δ interpolatori tribuit *Hu*

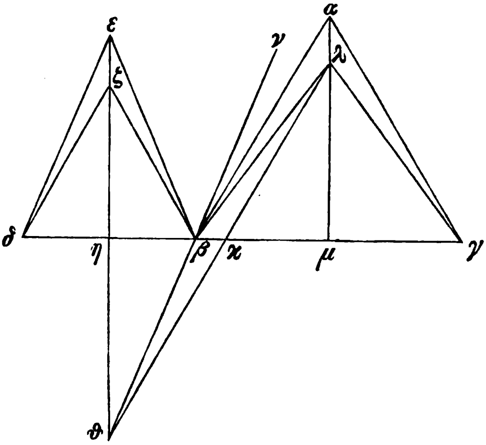
terum aequalis sit summae laterum triangulorum $\zeta\delta\beta$ $\alpha\beta\gamma$, ipsa triangula autem necessario illis dissimilia (hoc enim construi posse *infra propos. 8* demonstrabitur); dico esse $\Delta\,\zeta\delta\beta + \Delta\,\alpha\beta\gamma > \Delta\,\varepsilon\delta\beta + \Delta\,\lambda\beta\gamma$.



Iungantur $\varepsilon\zeta$ $\alpha\lambda$ producanturque ad bases; has igitur bifariam et ad rectos angulos secabunt. Sunt enim $\varepsilon\delta = \varepsilon\beta$, et $\varepsilon\zeta = \varepsilon\zeta$, et $\delta\zeta = \beta\zeta$, quia triangula aequicruria sunt, ideoque anguli aequales, itaque etiam anguli externi ζ ζ aequales sunt; sed etiam anguli δ β aequales; ergo etiam reliqui η η; hi igitur recti sunt, et aequales $\delta\eta$ $\eta\beta$. Similiter etiam $\beta\mu$ $\mu\gamma$ aequales et anguli μ μ recti sunt. *Rectae igitur* $\varepsilon\zeta$ $\alpha\lambda$ *productae* secent *bases* in punctis η μ, et producatur $\varepsilon\eta$ eique aequalis ponatur $\eta\vartheta$, et iungatur $\vartheta\beta$; anguli igitur $\varepsilon\beta\eta$ $\vartheta\beta\eta$ aequales erunt. Sed est angulus $\varepsilon\beta\eta$ maior angulo $\alpha\beta\gamma$ (quia etiam angulo $\zeta\beta\eta$, qui ipsi $\alpha\beta\gamma$ aequalis est; nam triangula $\zeta\delta\beta$ $\alpha\beta\gamma$ similia sunt); itaque etiam angulus $\vartheta\beta\eta$ maior est angulo $\alpha\beta\gamma$. Ergo recta puncta ϑ λ iungens secat rectam $\beta\mu$, supposità *scilicet* rectà $\delta\beta\gamma$ et productà $\vartheta\beta\nu$ extra $\alpha\beta$, quia angulus $\alpha\beta\gamma$ minor est angulo $\vartheta\beta\eta$, id est angulo $\nu\beta\gamma$ ad verticem; et angulus $\lambda\beta\gamma$ multo minor est angulo $\nu\beta\gamma$; itaque $\beta\mu$ rectà $\vartheta\lambda$ secatur, *idque* in puncto $\varkappa$ [et apparet punctum $\varkappa$ non inter μ γ cadere; nam si ita esset, recta $\vartheta\lambda$ ipsam $\lambda\mu$ productam secaret in alio puncto ac λ]. Iam quia ex hypothesi sunt

$$\delta\varepsilon + \varepsilon\beta + \beta\lambda + \lambda\gamma = \delta\zeta + \zeta\beta + \beta\alpha + \alpha\gamma,$$ atque item dimidiae partes

ἰσοπερίμετροι), καὶ αἱ ἡμίσειαι αἱ ΕΒΛ, τουτέστιν αἱ ΘΒΛ, ταῖς ΖΒΛ ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ΘΒΛ τῆς ΘΛ μείζονές εἰσιν, καὶ αἱ ΖΒΛ ἄρα τῆς ΘΛ μείζονές εἰσιν. καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΖΒΛ ὡς μιᾶς μεῖζόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΘΛ.



ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΒΛ ὡς μιᾶς ἴσα εἰσὶν τὰ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΗ ΛΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΒΜ ὡς μιᾶς, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΜ, διὰ τὴν τῶν ΗΖΒ ΒΛΜ τριγώνων ὀρθογωνίων ὁμοιότητα (τοῦτο γὰρ προεδείχθη), τῷ δὲ ἀπὸ ΘΛ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΘΚ ΚΛ ὡς μιᾶς, ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΛΜ ΗΘ ὡς μιᾶς, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΛΜ ΗΕ ὡς μιᾶς, μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΚΜ ὡς μιᾶς, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΜ, διὰ τὸ αὐτὸ προδειχθέν· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΛΜ ΖΗ ὡς μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΗ ΛΜ ὡς μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΗΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΗ ΛΜ ὡς μιᾶς μεῖζόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΕ ΛΜ ὡς μιᾶς· καὶ μήκει ἄρα μείζων ἡ ΖΗ ΛΜ ὡς μία τῆς ΕΗ ΛΜ ὡς μιᾶς. τὰ δ' ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τρίγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΗΕ πρὸς ΗΖ, τά τε ἡμίση τῶν τριγώνων τὸ ΕΗΒ πρὸς ΖΗΒ καὶ τὰ ὅλα τρίγωνα [διπλάσια] τὸ ΔΕΒ πρὸς ΔΖΒ, ὡς δὲ ἡ ΛΜ πρὸς ΜΑ, τὸ ΜΛΓ πρὸς τὸ ΜΑΓ, καὶ τὸ διπλάσιον ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ· καὶ συνθέντι ἄρα

$\varepsilon\beta + \beta\lambda = \zeta\beta + \beta\alpha$, id est
$\vartheta\beta + \beta\lambda = \zeta\beta + \beta\alpha$, et
$\vartheta\beta + \beta\lambda > \vartheta\lambda$, ergo etiam sunt
$\zeta\beta + \beta\alpha > \vartheta\lambda$, itaque
$(\zeta\beta + \beta\alpha)^2 > \vartheta\lambda^2$. Sed superiore *lemmate* demonstravimus esse (similia enim sunt triangula orthogonia $\zeta\eta\beta$ $\alpha\mu\beta$)
$(\zeta\beta + \beta\alpha)^2 = (\zeta\eta + \alpha\mu)^2 + (\eta\beta + \beta\mu)^2$, id est
$= (\zeta\eta + \alpha\mu)^2 + \eta\mu^2$, atque item
$\vartheta\lambda^2$, id est $(\vartheta\varkappa + \varkappa\lambda)^2 = (\lambda\mu + \vartheta\eta)^2 + (\eta\varkappa + \varkappa\mu)^2$, id est
$= (\lambda\mu + \varepsilon\eta)^2 + \eta\mu^2$; ergo sunt
$(\zeta\eta + \alpha\mu)^2 + \eta\mu^2 > (\lambda\mu + \varepsilon\eta)^2 + \eta\mu^2$. Commune auferatur $\eta\mu^2$, restat igitur
$(\zeta\eta + \alpha\mu)^2 > (\lambda\mu + \varepsilon\eta)^2$; ergo etiam
$\zeta\eta + \alpha\mu > \lambda\mu + \varepsilon\eta$. Sed triangula eâdem altitudine inter se sunt ut bases; est igitur
$\varepsilon\eta : \zeta\eta = \Delta\, \varepsilon\eta\beta : \Delta\, \zeta\eta\beta$, et, quia triangula $\varepsilon\eta\beta$ $\zeta\eta\beta$ sunt dimidia $\varepsilon\delta\beta$ $\zeta\delta\beta$,
$= \Delta\, \varepsilon\delta\beta : \Delta\, \zeta\delta\beta$. Atque *item*
$\lambda\mu : \alpha\mu = \Delta\, \lambda\mu\gamma : \Delta\, \alpha\mu\gamma$, ac dupla *item, id est*
$= \Delta\, \lambda\beta\gamma : \Delta\, \alpha\beta\gamma$; ergo compositis proportionibus, id quod deinceps *demonstrabitur*, est [1])

1) Merito haec quae, ut in Graecis exstant, ita repetivimus corrupta esse videantur; sed multo etiam difficultas augetur ipsa demonstratione, quam promittit scriptor (conf. p. 332, 11), deperdita. Equidem existimo et hoc loco et infra cap. 17 ipsam Pappi demonstrationem iam ex codice aliquo vetustissimo evanuisse, ac tum dubia illa quae supra leguntur inculcata esse ab interpolatore, qui tamen non valuerit ostendere id de quo ambigitur, qua ratione quibusque terminis stare possit aequatio $\frac{\varepsilon\eta + \lambda\mu}{\zeta\eta + \alpha\mu} = \frac{\varepsilon\eta \cdot \eta\beta + \lambda\mu \cdot \mu\gamma}{\zeta\eta \cdot \eta\beta + \alpha\mu \cdot \mu\gamma}$.

9. μείζων AB Paris. 2368, μεῖζον S, corr. *Hu* 13. $\overline{ZBA}$ ὡς — 16. τῆς (ante *ZH AM*) add. A² in marg. 19. τῶν *HZB BAM Sca* (per errorem) 22. τῆς $\overline{AMH\Theta}$ ABS, distinx. *Co* 23. ἀπὸ $\overline{AMH}$ ἕως ABS, corr. *Co* 26. μεῖζον add. *Sca*, *maius Co*, in A est lacuna unius litterae (in archetypo igitur compendium scripturae fuit) 27. τῆς *ΘH AM Sca* 30. $\overline{HEAM}$ ABS, distinx. *Co*, *HΘ AM Sca* 31. μία *Hu* auctore *Co* pro μιᾶς τῆς $\overline{EHAM}$ ABS, distinx. *Co* 34. διπλάσια del. *Hu*

πρὸς συγκείμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὡς ἡ ΕΗ ΛΜ πρὸς τὴν ΖΗ ΛΜ, τὰ ΔΕΒ ΒΛΓ τρίγωνα πρὸς τὰ ΔΖΒ ΛΒΓ τρίγωνα· καὶ τοῦτο γὰρ ἑξῆς. ἐλάσσων δὲ συναμφότερος ἡ ΕΗ ΛΜ τῆς ΖΗ ΛΜ συναμφοτέρου· ἐλάσσονα ἄρα καὶ τὰ συναμφότερα ΔΕΒ ΒΛΓ τρίγωνα τῶν ΔΖΒ ΒΛΓ συναμφοτέρων τριγώνων.

15 *η'. Ἔστω ἐπὶ ἀνίσων βάσεων τῶν ΔΒ ΓΔ ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΔΕΒ ΓΔΖ, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΓΖ ἴση ἔστω, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΓ μείζων (ἀνόμοια ἄρα τὰ τρίγωνα)· δεῖ δὴ ἐπὶ τῶν ΔΒ ΓΔ ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστήσασθαι, ὥστε τὰς δ' πλευρὰς αὐτῶν ἅμα ἴσας εἶναι ταῖς ΔΕΒ ΓΖΔ ἅμα.*

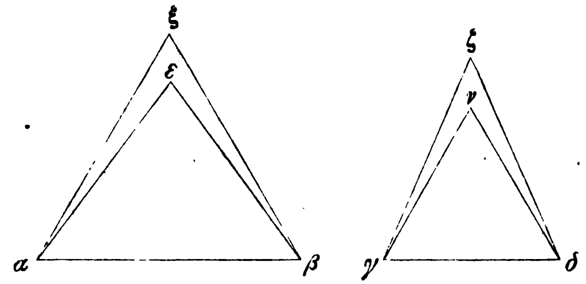
Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΗΘ εὐθεῖα ἴση οὖσα ταῖς ΔΕΒ ΓΖΔ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Κ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΗΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως τὴν ΔΒ βάσιν πρὸς τὴν ΓΔ, τετμήσθω δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΚ ΚΘ δίχα κατὰ τὰ Λ Μ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ συναμφοτέρων τῶν ΔΒ ΓΔ μείζων ἐστὶν (ὅτι καὶ αἱ ΔΕΒ ΓΖΔ), καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν ΗΚ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΚΘ τῆς ΓΔ. καὶ τέτμηται ἑκατέρα δίχα· τῶν ἄρα ΔΒ ΗΛ ΛΚ αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὁμοίως καὶ τῶν ΓΔ ΚΜ ΜΘ. συνεστάτω οὖν ἐκ μὲν τῶν ΔΒ ΗΛ ΛΚ τὸ ΔΞΒ τρίγωνον (φανερὸν γὰρ ὅτι ἔξω πίπτουσιν τῶν ΔΕΒ διὰ τὸ μείζους εἶναι τὰς ΗΛΚ τῶν ΔΕΒ· ἡ μὲν γὰρ ΔΕΒ ἡμίσεια τῆς ΗΘ, ἴσαι γὰρ αἱ ΔΕΒ ταῖς ΓΖΔ, καὶ αἱ δ' ἅμα εὐθεῖαι τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΗΚ μείζων ἢ ἡμίσεια τῆς ΗΘ), ἐκ δὲ τῶν ΓΔ ΚΜΘ τὸ ΓΝΔ (ὁμοίως

---

1. 2. *πρὸς τὴν Hu* pro *πρὸς τὸ* 2. *πρὸς τὰ ΑΖΒ* ABS, corr. *Co* 4. *ελασσον ἄρα* A, *ἐλάσσον ἄρα* B, corr. S 7. *Η* A¹ in marg. (B), om. S ante *Ἔστω* legi voluit *Co: Τὸ δὲ ὑπερτεθὲν δειχθήσεται οὕτως* (*quod autem positum est ita ostendetur*) 8. *τὰ ΔΕΒ* ABS, corr. *Co Sca* 10. *τῶν ΑΒΓΔ* AS, distinx. B[s] *Co* 11. *ὡς τὸ τῆς Δ πλευρᾶς* AB[1]S, *ὥς τε τᾶς* corr. B[3], accentus quoque corr. *Co* 16. *κατὰ τὰ ΛΜ* A, distinx. BS 17. *τῶν ΑΒΓΔ* A, distinx. BS 21. *πάντηι* A, corr. B Paris. 2368 24. *τὰς Η ΛΚ* A, coniunx. BS

$\frac{\varepsilon\eta + \lambda\mu}{\zeta\eta + \alpha\mu} = \frac{\Delta\, \varepsilon\delta\beta + \Delta\, \lambda\beta\gamma}{\Delta\, \zeta\delta\beta + \Delta\, \alpha\beta\gamma}$. Sed *erant* $\zeta\eta + \alpha\mu > \varepsilon\eta + \lambda\mu$; ergo etiam sunt $\Delta\, \zeta\delta\beta + \Delta\, \alpha\beta\gamma > \Delta\, \varepsilon\delta\beta + \Delta\, \lambda\beta\gamma$.

VIII. *Quod autem supra* (*p. 325*) *dilatum est, sic demonstrabitur.* Sint in basibus inaequalibus $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ aequicruria triangula $\varepsilon\alpha\beta$ $\zeta\gamma\delta$, et sit $\alpha\varepsilon = \gamma\zeta$, et $\alpha\beta > \gamma\delta$ (ergo dissimilia sunt triangula); oportet igitur in *basibus* $\alpha\beta$ $\gamma\delta$ similia triangula aequicruria ita constituere, ut eorum summa quattuor laterum aequalis sit summae $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta + \gamma\zeta + \zeta\delta$. Prop. 8



Exponatur enim recta $\eta\vartheta = \alpha\varepsilon + \varepsilon\beta + \gamma\zeta + \zeta\delta$, quae in puncto $\varkappa$ ita secetur, ut sit $\eta\varkappa : \varkappa\vartheta = \alpha\beta : \gamma\delta$, atque etiam utraque rectarum $\eta\varkappa$ $\varkappa\vartheta$ bifariam in punctis λ μ secetur. Iam quia est

$\eta\vartheta > \alpha\beta + \gamma\delta$ (quoniam $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta > \alpha\beta$, et $\gamma\zeta + \zeta\delta > \gamma\delta$), et

$\alpha\beta : \gamma\delta = \eta\varkappa : \varkappa\vartheta$, est igitur

$\eta\varkappa > \alpha\beta$, et $\varkappa\vartheta > \gamma\delta$. Et utraque bifariam secta est; ergo est

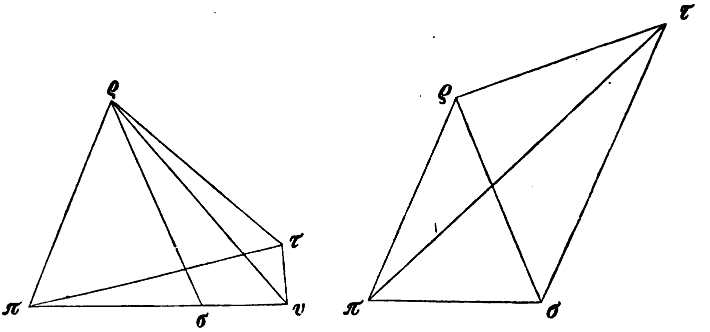
$\eta\lambda + \lambda\varkappa > \alpha\beta$, et $\alpha\beta + \lambda\varkappa > \eta\lambda$, et $\alpha\beta + \eta\lambda > \lambda\varkappa$, ac similiter

$\varkappa\mu + \mu\vartheta > \gamma\delta$, et $\gamma\delta + \mu\vartheta > \varkappa\mu$, et $\gamma\delta + \varkappa\mu > \mu\vartheta$.

Iam primum ex $\alpha\beta$ $\eta\lambda$ $\lambda\varkappa$ construatur triangulum $\alpha\xi\beta$ (atque apparet *latera* $\alpha\xi$ $\xi\beta$ extra $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\beta$ cadere, quia sunt $\eta\lambda + \lambda\varkappa > \alpha\varepsilon + \varepsilon\beta$; sunt enim $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta = \gamma\zeta + \zeta\delta = \frac{1}{2}\eta\vartheta$ [quia $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta + \gamma\zeta + \zeta\delta = \eta\vartheta$], et $\eta\lambda + \lambda\varkappa > \frac{1}{2}\eta\vartheta$), tum ex $\gamma\delta$ $\varkappa\mu$ $\mu\vartheta$ triangulum $\gamma\nu\delta$ (similiter enim

γὰρ ἔνδον συνίστανται). καὶ φανερὸν ὅτι ὅμοια ἔσται τὰ τρίγωνα, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἥ τε ΗΛ πρὸς ΚΜ καὶ ἡ ΛΚ πρὸς ΜΘ, καὶ αἱ ἴσαι συνιστάμεναι ἡ ΛΞ πρὸς ΓΝ καὶ ἡ ΒΞ πρὸς ΔΝ.

16 [Τὸ δὲ ΑΕΒ τρίγωνον τοῦ ΓΖΔ τριγώνου ποτὲ μὲν μεῖζον γίνεται, ποτὲ δὲ ἔλασσον, ποτὲ δὲ ἴσον αὐτῷ. ἔστω

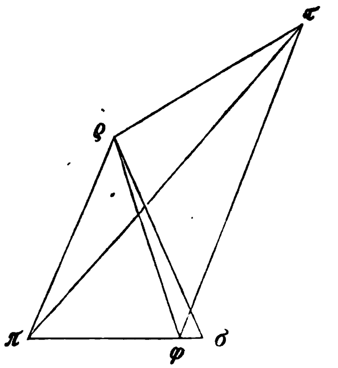


γὰρ τρίγωνον τὸ ΠΡΣ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΠΡ τῇ ΖΓ, τὴν δὲ ΡΣ τῇ ΔΖ, τὴν δὲ ΠΣ τῇ ΓΔ· ἴσα ἄρα καὶ ὅμοιά ἐστι τὰ ΓΖΔ ΠΡΣ τρίγωνα ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶν τῆς ΓΔ, τουτέστιν τῆς ΠΣ, καὶ αἱ ΑΕ ΕΒ ἴσαι ταῖς ΠΡ ΡΣ (ἐπεὶ καὶ ταῖς ΓΖ ΖΔ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ), γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΠΡΣ μείζων ἐστίν (ἐπεὶ καὶ τῆς ὑπὸ ΓΖΔ μείζων ἐστίν). κείσθω ἡ ὑπὸ ΠΡΤ γωνία τῇ Ε ἴση, καὶ ἡ ΡΤ τῇ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΤ· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΠΡΤ τρίγωνον τῷ ΑΕΒ τριγώνῳ. ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΠΣΥ, καὶ τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΠΥ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΥ· μείζων ἄρα ἡ ΡΥ τῆς ΡΣ καὶ τῆς ΡΤ (ἑκατέρα γὰρ τῶν ΠΡ ΡΤ ἴση ἐστὶν τῇ ΡΣ). τὸ οὖν ΠΡΤ τρίγωνον τῷ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν καὶ ὅμοιον, τῷ δὲ ΠΡΣ τὸ ΠΡΤ ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἐὰν ἡ ΤΣ παράλληλος ᾖ τῇ ΡΠ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι ὦσιν αἱ ὑπὸ ΡΠΤ ΠΤΣ (ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς

4. συνισταμέναι coni. Hu, constitutae sunt Co 6 — p. 332, 10. totum caput 16 interpolatum esse videtur 15. ἡ PC τῆι PT ABS,

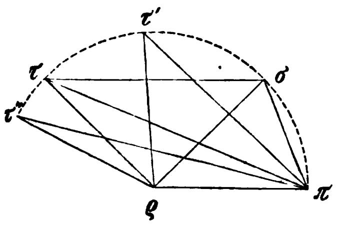
latera $\gamma\nu$ $\nu\delta$ intra $\gamma\zeta$ $\zeta\delta$ positae sunt). Et apparet triangula $\alpha\xi\beta$ $\gamma\nu\delta$ similia fore, quoniam est $\alpha\beta : \gamma\delta = \eta\varkappa : \varkappa\vartheta = \eta\lambda : \varkappa\mu = \lambda\varkappa : \mu\vartheta$, id est $= \alpha\xi : \gamma\nu = \xi\beta : \nu\delta$.

[Sed triangulum $\alpha\varepsilon\beta$ modo maius, modo minus fit triangulo $\gamma\zeta\delta$, modo eidem aequale[1]). Sit enim triangulum $\pi\varrho\sigma$, cuius latus $\pi\varrho = \gamma\zeta$, et $\varrho\sigma = \zeta\delta$, et $\pi\sigma = \gamma\delta$; ergo est $\Delta\, \pi\varrho\sigma \simeq \Delta\, \gamma\zeta\delta$. Iam quia



est $\alpha\beta > \gamma\delta$, id est $> \pi\sigma$, et $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta = \pi\varrho + \varrho\sigma$ (quia $\alpha\varepsilon + \varepsilon\beta = \gamma\zeta + \zeta\delta$), angulus igitur $\alpha\varepsilon\beta$ maior est angulo $\pi\varrho\sigma$ (quoniam angulo $\gamma\zeta\delta$ maior est). Ponatur $\angle\, \pi\varrho\tau = \angle\, \alpha\varepsilon\beta$, et $\varrho\tau = \varrho\sigma$, et iungatur $\pi\tau$; ergo est $\Delta\, \pi\varrho\tau \simeq \Delta\, \alpha\varepsilon\beta$. Producatur $\pi\sigma$ ad υ, sitque $\pi\upsilon = \alpha\beta$, et iungatur $\varrho\upsilon$; est igitur $\varrho\upsilon > \varrho\sigma$, itemque $> \varrho\tau$ (est enim $\varrho\tau = \varrho\sigma$). Iam triangulum $\pi\varrho\tau$ triangulo $\alpha\varepsilon\beta$ aequale est et simile; idem autem triangulum $\pi\varrho\tau$ aut triangulo $\pi\varrho\sigma$ aequale est, si recta $\tau\sigma$ parallela sit ipsi $\varrho\pi$, et anguli alterni $\varrho\pi\tau$ $\pi\tau\sigma$ aequales sint (nam in

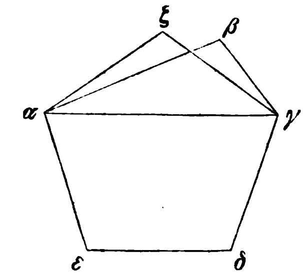
1) Latino sermone haec expressimus, sicut Graece cap. 16 tradita sunt; sed tamen totus locus interpolatus esse videtur. Mitto ambages scriptoris vix tolerabiles; maxime autem in eo peccat, quod $\pi\upsilon$ aequalem $\alpha\beta$ ponit; hoc enim nihil ad rem, quoniam id tantummodo agitur, utrum recta per τ ipsi $\varrho\pi$ parallela ducta extra σ cadat, an intra, an in ipsum σ. Ne multa, ad modum eius quam hic adscribimus figurae binorum triangulorum aequicrurium areae comparandae et termini definiendi erant.



corr. *Hu* auctore *Co* 18. 19. ἑκατέρα — τῇ ΡΣ] satius erat scribere ἴση γὰρ ἡ ΡΤ τῇ ΡΣ, optimum autem hanc parenthesin tamquam consentaneam omittere 22. ὦσιν *Hu* auctore *Co* pro εἰσὶν *ἐστιν τῆς ΡΠ τὰ τρίγωνα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΡΠ ΤΣ), ἢ μείζων ἐστὶν αὐτοῦ, ἐὰν ἡ ΤΥ παράλληλος ᾖ τῇ ΡΠ, καὶ ἡ ὑπὸ ΠΤΥ γωνία τῇ ἐναλλὰξ ὑπὸ ΡΠΤ ἴση (γίνεται γὰρ πάλιν τὸ ΠΡΤ ἴσον τῷ ΡΥΠ· μεῖζον δὲ τὸ ΠΡΥ τοῦ ΠΡΣ· καὶ τὸ ΠΡΤ ἄρα μεῖζόν ἐστιν τοῦ ΠΡΣ). ἐὰν δὲ ἡ ΤΦ παράλληλος ᾖ τῇ ΡΠ, διὰ τὰς ἴσας ἐναλλὰξ ὑπὸ ΡΠΤ ΠΤΦ γωνίας καὶ τὸ ΠΡΤ ἴσον τῷ ΡΠΦ, ὥστε μεῖζον εἶναι τὸ ΠΡΣ τοῦ ΠΡΦ, τουτέστιν τοῦ ΠΡΤ, ὥστε καὶ τὸ ΛΕΒ τρίγωνον ἴσον ὂν τῷ ΠΡΤ τριγώνῳ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἴσον ἢ ἔλασσον τοῦ ΠΡΣ, τουτέστιν τοῦ ΓΖΔ.]*

17 *Τὸ λοιπὸν τῶν ἐν ὑπερθέσει* * * * * * * * * * * * * *

18 *θʹ. Τούτων προγραφέντων τὸ προκείμενον δείξομεν, τουτέστιν ὅτι τῶν ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τέ ἐστιν καὶ ἰσογώνιον.*



Ἔστω γὰρ πολύπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ μέγιστον τῶν ἰσοπεριμέτρων αὐτῷ καὶ ἰσοπληθεῖς πλευρὰς ἐχόντων· λέγω ὅτι ἰσόπλευρόν ἐστιν. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ ΑΒΓ ἄνισοι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, ἐφ' ἧς συνεστάτω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΖΓ, ὥστε συναμφοτέρας τὰς ΑΖΓ ἴσας εἶναι συναμφοτέραις ταῖς ΑΒΓ διὰ τὸ δʹ. ἐπεὶ οὖν πρὸ τριῶν ἐδείχθη ὅτι τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστιν, μεῖζον ἄρα τὸ ΑΖΓ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ΑΓΔΕ τετραπλεύρου ἔσται τι χωρίον τὸ ΖΓΔΕΑ τοῦ ΑΒΓΔΕ μεγίστου, ἰσοπερίμετρον αὐτῷ καὶ ἰσαρίθμους πλευρὰς ἔχον, μεῖζον, ὅπερ ἀδύνατον· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓΔΕ. καὶ φανερὸν ὅτι τὸ ἰσοπλευρότερον ἀεὶ

2. *ἐὰν ἡ* S, *εανη ἡ* A, *ἐὰν ᾖ ἡ* B 9. 10. *μεῖζον ἐστι* (sic) A 12. Θ A[1] in marg. (BS) 24. *τὰ ΑΖΓ* A, corr. BS 26. *πρὸ τριῶν*, non *πρὸ τεττάρων* scriptor et hoc loco et paulo post numerat, quia

eadem basi $\varrho\pi$ et inter easdem parallelas $\varrho\pi$ $\tau\sigma$ sunt triangula),

aut maius est triangulo $\pi\varrho\sigma$, si recta $\tau\upsilon$ ipsi $\varrho\pi$ parallela et angulus $\pi\tau\upsilon$ alterno $\varrho\pi\tau$ aequalis sit (nam rursus fit $\Delta\,\pi\varrho\tau = \Delta\,\pi\varrho\upsilon$; sed est $\Delta\,\pi\varrho\upsilon > \Delta\,\pi\varrho\sigma$; ergo etiam $\Delta\,\pi\varrho\tau > \Delta\,\pi\varrho\sigma$),

aut denique minus est triangulo $\pi\varrho\sigma$, si recta $\tau\varphi$ ipsi $\varrho\pi$ parallela sit (propter aequales angulos alternos $\varrho\pi\tau$ $\pi\tau\varphi$ et triangulorum $\pi\varrho\tau$ $\pi\varrho\varphi$ aequalitatem, ita ut sit $\Delta\,\pi\varrho\sigma > \Delta\,\pi\varrho\varphi$, id est $> \Delta\,\pi\varrho\tau$);

itaque etiam triangulum $\alpha\varepsilon\beta$, quippe quod aequale sit ipsi $\pi\varrho\tau$, aut aequale est triangulo $\pi\varrho\sigma$, id est $\gamma\zeta\delta$, aut eodem maius, aut minus.]

Sequitur alterum quod supra dilatum est[2] *********** Prop. 9

IX. His praemissis id quod propositum erat (*supra p. 317*) demonstrabimus, id est, figurarum rectilinearum, quae aequalem perimetrum eundemque laterum numerum habent, maximam esse aequilateram et aequiangulam. Prop. 10

Sit enim polygonum $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ maximum eorum, quae aequalem perimetrum eundemque laterum numerum habent; dico hoc aequilaterum esse.

Etsi non est; tamen, si fieri possit, non sit $\alpha\beta = \beta\gamma$, et iungatur $\alpha\gamma$, in qua triangulum aequicrure $\alpha\zeta\gamma$ ita constituatur, ut sint $\alpha\zeta + \zeta\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma$, iuxta IV *lemma*. Iam quia V *lemmate* demonstravimus triangulorum, quae aequalem perimetrum et eandem basim habent, aequicrure maximum esse, triangulum igitur $\alpha\zeta\gamma$ maius est triangulo $\alpha\beta\gamma$. Communi apposito quadrilatero $\alpha\gamma\delta\varepsilon$ erit spatium quoddam $\zeta\gamma\delta\varepsilon\alpha$ et aequalem perimetrum eundemque laterum numerum habens ac polygonum $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ et eodem maius, cum *tamen ex hypothesi* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ maximum sit, quod quidem fieri non potest; ergo $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ aequilaterum est. Atque apparet polygonum,

2) Vide supra p. 327 cum adnot. 1.

---

illud quod supra est lemma VI tamquam corollarium lemmati VII subiungit *μεῖζον· καὶ γὰρ τὸ ἰσοσκελέστερον ἀεὶ μεῖζον, ὡς ἐδείχθη πρὸ τριῶν.*

19 *ι'. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύπλευρον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ Β γωνία τῆς Δ μείζων. καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα τῆς ΓΕ ἄρα μείζων (ἴσαι γὰρ αἱ ΑΒΓ ΓΔΕ). συνεστάτω ἐπὶ τῶν ΑΓ ΓΕ ἀνίσων ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὡς πρὸ ἑνὸς ἐδείχθη, τὰ ΑΖΓ ΓΗΕ τὰς ΑΖΓ ΓΗΕ πλευρὰς συναμφοτέρας ἴσας ἔχοντα συναμφοτέραις ταῖς ΑΒΓ ΓΔΕ. μείζονα δὴ ἔσται τὰ συσταθέντα τὰ ΑΖΓ ΓΗΕ ἅμα τῶν ἐξ ἀρχῆς ΑΒΓ ΓΔΕ· καὶ τοῦτο γὰρ δέδεικται πρὸ δύο. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ΑΓΕ τριγώνου ἔσται τὸ αὐτὸ ἄτοπον· τὸ γὰρ ΑΖΓΗΕ μεῖζον ἔσται τοῦ ΑΒΓΔΕ μεγίστου καὶ ἰσοπεριμέτρου αὐτῷ. καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ πολύπλευρον· τῶν ἄρα ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τέ ἐστιν καὶ ἰσογώνιον.*

Καὶ δῆλον ὅτι μέγιστος πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων ὁ κύκλος, ἐπειδὴ τοῦ ἰσοπεριμέτρου τεταγμένου σχήματος, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἐδείχθη μείζων.

20 *ια'. Τῆς αὐτῆς δέ ἐστιν τοῖς προειρημένοις θεωρίας καὶ τοῦτο. τῶν ἴσην ἐχόντων περιφέρειαν κυκλικῶν τμημάτων μέγιστόν ἐστι τὸ ἡμικύκλιον. δείξομεν δὲ τοῦτο προγράψαντες πρότερον τὰ εἰς αὐτὸ λαμβανόμενα.*

21 *Αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι.*

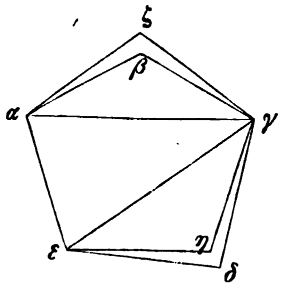
Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέ-

---

3. ι̅ A[1] in marg. (BS) *πολύπλευρον Hu* pro *πεντάπλευρον*, item vs. 14 4. *γὰρ* S, om. AB 12. *τὸ γὰρ ΑΖΓ ΗΕ* A, coniunx. BS 17. *ὀρθογώνιον* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 18. *τῶν* B[1]S, om. A, del. B[3] 22. *ια̅* A[1] in marg. (BS) 25. *αὐτὰ* ABS, corr. *Hu* auctore *Co*

quod magis ad aequalitatem laterum accedat, semper maius esse; nam etiam triangulum, quod ad aequicrure magis accedit, semper maius est, ut V *lemmate* demonstravimus.

X. Iam dico polygonum $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ etiam aequiangulum esse.



Etsi non est; tamen, si fieri possit, sit angulus β maior quam δ. Ergo etiam recta $\alpha\gamma$ maior est quam $\gamma\varepsilon$ (nam *ex hypothesi* est $\alpha\beta + \beta\gamma = \gamma\delta + \delta\varepsilon$). Construantur in rectis $\alpha\gamma$ $\gamma\varepsilon$, quae inaequales sunt, similia triangula $\alpha\zeta\gamma$ $\gamma\eta\varepsilon$ aequicruria, ut VIII *lemmate* demonstravimus, quorum summa laterum $\alpha\zeta + \zeta\gamma + \gamma\eta + \eta\varepsilon$ aequalis sit summae $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon$. Ergo summa eorum quae *statim* constructa sunt triangulorum $\alpha\zeta\gamma + \gamma\eta\varepsilon$ maior erit summâ eorum quae ab initio erant $\alpha\beta\gamma + \gamma\delta\varepsilon$; nam hoc quoque supra *lemmate* VII demonstratum est. Communi apposito triangulo $\alpha\gamma\varepsilon$ idem absurdum redibit; nam polygonum $\alpha\zeta\gamma\eta\varepsilon$, aequalem perimetrum habens atque $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, maius erit quam $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, cum *tamen ex hypothesi* hoc maximum sit. Et aequiangulum est polygonum $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$; ergo figurarum rectilinearum, quae aequalem perimetrum eundemque laterum numerum habent, maxima est aequilatera et aequiangula.

Et apparet omnium quae aequalem perimetrum habent figurarum circulum maximum esse, quippe quem figurâ ordinatâ aequalem perimetrum habente — aequilateram dico et aequiangulam — maiorem esse demonstraverimus (*propos.* 2).

XI. Ad eandem quaestionem hoc quoque pertinet. Circuli segmentorum quae aequalem circumferentiam habent maximus est semicirculus. Quod priusquam demonstremus, lemmata quae ad id adsumuntur praemittamus.

Circulorum circumferentiae inter se sunt ut diametri[1]. Prop. 11

Sint duo circuli $\alpha\beta$ $\gamma\delta$, earumque diametri $\alpha\beta$ $\gamma\delta$; dico

1) Idem lemma fere iisdem verbis enuntiatum infra VIII propos. 22 redit.

ρεια πρὸς τὴν τοῦ ΓΔ κύκλου περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς *τὴν ΓΔ.*

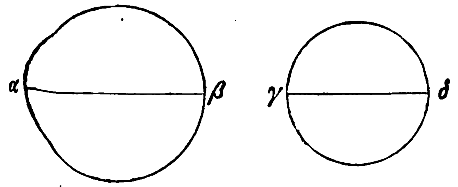
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν ΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ δὲ ΓΔ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστιν τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ εὐθείας καὶ τῆς τοῦ ΓΔ κύκλου περιφερείας (τοῦτο γὰρ προδέδεικται), καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒ κύκλου *πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς τοῦ* ΓΔ *κύκλου περιφερείας, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ ΑΒ* κύκλου *περιφερείας καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ ΓΔ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ τοῦ ΓΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ τοῦ ΑΒ περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ ΓΔ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ.*

22 *ιβ'. Τοῦτο ἀποδείκνυται καὶ χωρὶς τοῦ λαβεῖν ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας τετραπλάσιόν ἐστιν τοῦ κύκλου. τὰ γὰρ ἐγγραφόμενα τοῖς κύκλοις ἢ περιγραφόμενα ὅμοια πολύγωνα τὰς περιμέτρους ἔχει λόγον ἐχούσας πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων, ὥστε καὶ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι.*

23 *Πάλιν ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, ἐκ τοῦ κέντρου δὲ αὐτοῦ ἡ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω τις ἡ ΔΕ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ΒΖΕ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα.*

Εἰ μὲν οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΖΕ περιφέρεια τῇ ΑΒΓ περιμέτρῳ τοῦ κύκλου, ἐπεὶ διαιρεθείσης τῆς ΑΒΓ περιμέτρου τοῦ κύκλου εἰς τὰ μέτρα καὶ ἀπὸ τῶν τῆς διαιρέσεως σημείων ἐπὶ τὸ Δ κέντρον ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν

2. *εὐθεῖα*] *διάμετρος* Pappus VIII cap. 46 *πρὸς* BS, om. A 10. *κύκλου* et 11. *ΓΔ* add. *Hu* auctore *Co* 12. *καὶ ἐναλλὰξ* —

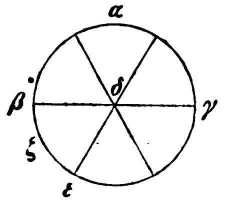


esse ut circuli $\alpha\beta$ circumferentiam ad circuli $\gamma\delta$ circumferentiam, ita rectam $\alpha\beta$ ad $\gamma\delta$.

Nam quia est[2])
circulus $\alpha\beta$: circ. $\gamma\delta = \alpha\beta^2 : \gamma\delta^2$ (*elem.* *12, 2*), et
circ. $\alpha\beta = \frac{1}{4}\alpha\beta \cdot$ circumf. $\alpha\beta$, et
circ. $\gamma\delta = \frac{1}{4}\gamma\delta \cdot$ circumf. $\gamma\delta$ (hoc enim supra *propos.* *3* demonstravimus), est igitur
$\alpha\beta \cdot$ circumf. $\alpha\beta : \gamma\delta \cdot$ circumf. $\gamma\delta = \alpha\beta^2 : \gamma\delta^2$, et vicissim
$\alpha\beta \cdot$ circumf. $\alpha\beta : \alpha\beta^2 = \gamma\delta \cdot$ circumf. $\gamma\delta : \gamma\delta^2$; ergo
circumf. $\alpha\beta : \alpha\beta =$ circumf. $\gamma\delta : \gamma\delta$, et vicissim
circumf. $\alpha\beta$: circumf. $\gamma\delta = \alpha\beta : \gamma\delta$.

XII. Idem etiam demonstratur non adsumpto theoremate, ex quo rectangulum quod diametro et circumferentia circuli continetur quadruplum est circuli. Nam similia polygona, quae circulis aut inscribuntur aut circumscribuntur, perimetros habent proportionales radiis circulorum, ita ut etiam circulorum circumferentiae inter se sint ut diametri.

Rursus sit circulus $\alpha\beta\gamma$ circa centrum δ, et radius $\delta\beta$, Prop. 12
et a centro *ad circumferentiam* ducatur quaelibet $\delta\varepsilon$; dico esse ut circuli $\alpha\beta\gamma$ perimetrum ad circumferentiam $\beta\zeta\varepsilon$, ita circulum $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$.



Si igitur circumferentia $\beta\zeta\varepsilon$ circuli $\alpha\beta\gamma$ perimetro commensurabilis erit, et, quota pars perimetri est circumferentia $\beta\zeta\varepsilon$, in tot partes perimetrus dividetur, et a punctis sectionum rectae ad centrum δ ducentur, omnes igitur sectores

2) Commodius visum est huius lemmatis demonstrationem ad formulas, quales nostra aetate adhiberi solent, redigere; infra autem libro VIII ipsam Graeci scriptoris orationem Latinis verbis expressimus.

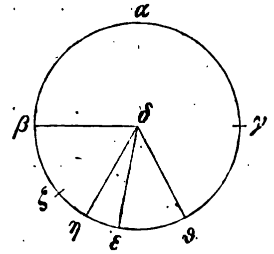
14. τῆς τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ add. A² in marg. 18. κύκλου add. *Hu* 19. $\overline{IB}$ A¹ in marg. (B), om. S Ταὐτὸ coni. *Hu* 20. τετραπλάσιόν *Hu* auctore *Co*, Δ A, δ' B, τέταρτόν S

ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλοις πάντες οἱ τομεῖς, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν μέτρων, ἔσται ἄρα ὡς ὅλη ἡ ΑΒΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ΒΖΕ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα [ιε'
24 *τοῦ ε' στοιχείων]. εἰ δὲ μή ἐστιν σύμμετρος τῇ ΒΖΕ περιφερείᾳ, ὁμοίως ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος πρὸς τὴν ΒΖΕ περιφέρειαν. ἔστω, εἰ δυνατόν, ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν ΒΖ περιφέρειαν πρότερον ἐλάσσονα οὖσαν τῆς ΒΖΕ περιφερείας, καὶ εἰλήφθω τις ἑτέρα περιφέρεια ἡ ΒΗ τῆς μὲν ΒΖ μείζων τῆς δὲ ΒΖΕ ἐλάσσων, σύμμετρος δὲ οὖσα τῇ ΑΒΓ περιμέτρῳ, ὡς ἔστιν λῆμμα σφαιρικῶν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ. ἔστιν οὖν διὰ τὰ προειρημένα καὶ ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΗ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ΒΖΗ περιφέρειαν. ἀλλὰ ἡ ΑΒΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν ΒΖΗ περιφέρειαν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΒΖ περιφέρειαν, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα· καὶ ὁ ΑΒΓ οὖν κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΗ τομέα ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἤπερ πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν ΒΖ περιφέρειαν ἐλάσσονα οὖσαν τῆς ΒΖΕ*
25 *περιφερείας. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα τῆς ΒΖΕ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὴν ΒΕΓ περιφέρειαν, καὶ εἰλήφθω τις ὁμοίως ἡ ΒΕΘ περιφέρεια τῆς μὲν ΒΖΕ περιφερείας μείζων τῆς δὲ ΒΕΓ περιφερείας ἐλάσσων, σύμμετρος δὲ πρὸς τὴν ΑΒΓ περίμετρον τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν πάλιν ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΘ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος τοῦ κύ-*

---

4. 5. *ιε' τοῦ ε' στοιχειων* A(B), *διὰ τὸ ιε τοῦ ε τῶν στοιχείων* S, interpolatori tribuit *Hu* 6. *ὁμοίως ἐστὶν Co* pro *μηδέ ἐστιν* 15. *πρὸς τὸν ΒΛΗ* AB, corr. S 17. *πρὸς τὴν ΕΖΗ* ABS, corr. *Co* 19. *οὖν*] *ἄρα* coni. *Hu* 23. *ΒΖ* om. *Co* ante *οὖσαν* super vs. add. *λόγον ἔχει* A[4], eadem codex *Co* habet pro *οὖσαν* *τῆς ΒΕΖ* et 24. *τῆς ΒΕ* ABS, corr. *Co*

inter se congruent, quorum cum numerus aequalis sit numero partium perimetri, erit igitur ut tota circuli $\alpha\beta\gamma$ perimetrus ad circumferentiam $\beta\zeta\varepsilon$, ita circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$ [*elem.* 5, 15]. At si *perimetrus* non commensurabilis est circumferentiae $\beta\zeta\varepsilon$, similiter *demonstratur* esse ut $\alpha\beta\gamma$ circulum ad $\beta\delta\varepsilon$ sectorem, ita perimetrum $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta\varepsilon$. Si fieri possit, sit primum ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, ita perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta$ minorem quam $\beta\zeta\varepsilon$, et sumatur alia quaedam circumferentia $\beta\eta$ maior quam $\beta\zeta$ et minor quam $\beta\zeta\varepsilon$ eademque perimetro $\alpha\beta\gamma$ commensurabilis, ut est lemma sphaericorum[1]), et iungatur $\delta\eta$. Ergo propter ea quae modo demonstravimus est ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\eta$, ita circuli perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta\eta$. Sed circuli perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta\eta$ minorem proportionem habet quam ad circumferentiam $\beta\zeta$ (*elem.* 5, 8), id est *minorem* quam circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$; itaque circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\eta$ minorem proportionem habebit quam ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, quod quidem absurdum est; ergo non est ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, ita perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta$ minorem quam $\beta\zeta\varepsilon$. Iam dico neque ad maiorem quam $\beta\zeta\varepsilon$. Etenim si fieri possit, sit ad circumferentiam $\beta\varepsilon\gamma$, et similiter sumatur quaedam circumferentia $\beta\varepsilon\vartheta$ maior quam $\beta\zeta\varepsilon$ et minor quam $\beta\varepsilon\gamma$, eademque circuli perimetro $\alpha\beta\gamma$ commensurabilis, et iungatur $\delta\vartheta$. Iam quia rursus ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\vartheta$, ita est circuli perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad cir-



1) His verbis scriptor illam quae sequitur propositionem 27 respicere videtur, ubi Pappus Archimede auctore docet datam circumferentiam bifariam secandam esse, et rursus dimidiam bifariam, ac sic porro, donec circumferentia minor datâ aliquâ (eademque, ut supra praecipitur, maior aliâ datâ) inventa sit.

κλου πρὸς τὴν ΒΕΘ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΑΒΓ περίμετρος πρὸς τὴν ΒΕΘ περιφέρειαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΒΕΓ περιφέρειαν, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, ἕξει δηλονότι καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΘ τομέα μείζονα λόγον ἤπερ πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς μείζονα τῆς ΒΖΕ περιφέρειαν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΒΔΕ τομέα, οὕτως ἡ ΑΒΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν ΒΖΕ περιφέρειαν.

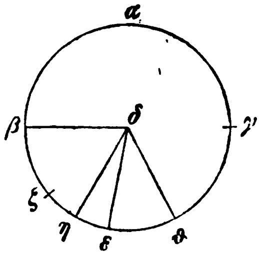
26 ιγ'. Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν κύκλων πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, καὶ αἱ περιφέρειαι δὲ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ὡς μὲν τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, ὡς δὲ ἡ ΑΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΔΖ.

Προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν κέντρα τὰ Η Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗΓ ΔΘΖ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστιν τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τμήματα, ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Η γωνία τῇ πρὸς τῷ Θ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ, καὶ ἡ ΑΒΓ περιφέρεια ὁμοία τῇ ΔΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΑΗΓΒ τομέα, οὕτως ἡ περίμετρος τοῦ ΑΒΓ κύκλου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν, τουτέστιν δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν Η γωνίαν. ὡς δὲ ὁ ΔΕΖ κύκλος πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, οὕτως ἡ περίμετρος τοῦ ΔΕΖ κύκλου πρὸς τὴν ΔΕΖ περιφέρειαν, τουτέστιν δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν Θ γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ Θ γωνία τῇ

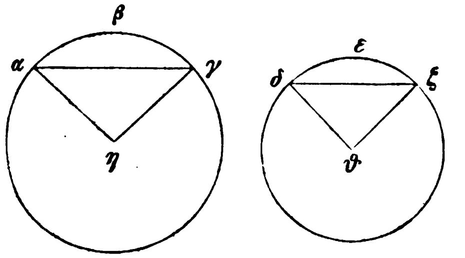
5. τὸν (ante ΒΔΘ) om. A, add. BS 8. τῆς ΒΖΕ περιφερείας ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 11. ΙΓ A[1] in marg. (BS) 16. ἀπὸ τῆς ΔΕΖ ABS, corr. *Co Sca* 17. περιφέρεια add. *Hu* auctore *Co* 19. τὰ ΗΘ A, distinx. BS αἱ ΑΗΓ ΔΕΖ ABS, corr. *Sca* (*Co*) 21. τὸ ΑΒΓ η τρίγωνον A (in archetypo igitur pro *B* correctum erat *H*), τὸ αβγη τρίγωνον BS, corr. *Co Sca* 23. τὸν ΑΗ ΓΒ A, coniunx. BS 26. ΔΘΖΕ τομέα οὕτ\ A[2] ex ΔΘ** ******** 27. πρὸς τὴν ΔΒΖ ABS, corr. *Co Sca* τουτέστιν *Hu* pro καὶ

cumferentiam $\beta\varepsilon\vartheta$, et perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\varepsilon\vartheta$ maiorem proportionem habet quam ad circumferentiam $\beta\varepsilon\gamma$, id est (*ex hypothesi*) quam circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, circulus igitur $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\vartheta$ maiorem habebit proportionem quam ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, quod quidem absurdum est; ergo non est ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, ita perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam maiorem quam $\beta\zeta\varepsilon$. Sed demonstravimus neque ad minorem; ergo ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\beta\delta\varepsilon$, ita est perimetrus $\alpha\beta\gamma$ ad circumferentiam $\beta\zeta\varepsilon$.



XIII. Similia circulorum segmenta inter se sunt ut quadrata ex basibus[1]), et segmentorum circumferentiae inter se ut bases. Prop. 13

Sint similia circulorum segmenta $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$; dico esse ut segmentum $\alpha\beta\gamma$ ad $\delta\varepsilon\zeta$, ita $\alpha\gamma^2 : \delta\zeta^2$, et ut $\alpha\beta\gamma$ circumferentiam ad $\delta\varepsilon\zeta$, ita $\alpha\gamma : \delta\zeta$.



Compleantur circuli, et sumantur eorum centra η ϑ, et iungantur $\alpha\eta$ $\eta\gamma$ $\delta\vartheta$ $\vartheta\zeta$. Iam quia segmenta $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$ similia sunt, aequales sunt anguli η ϑ, et similia triangula $\alpha\eta\gamma$ $\delta\vartheta\zeta$, et similes circumferentiae $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$. Ergo ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\alpha\eta\gamma\beta$, ita est circuli $\alpha\beta\gamma$ perimetrus ad circumferentiam $\alpha\beta\gamma$, id est quattuor recti ad angulum η. Atque ut circulus $\delta\varepsilon\zeta$ ad sectorem $\delta\vartheta\zeta\varepsilon$, ita est circuli $\delta\varepsilon\zeta$ perimetrus ad circumferentiam $\delta\varepsilon\zeta$, id est quattuor recti ad angulum ϑ. Et aequales sunt anguli η ϑ;

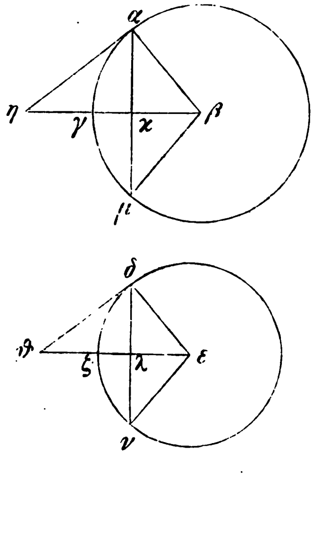
1) Conf. supra p. 269 adnot. ††.

Η γωνίᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΑΗΓΒ τομέα, οὕτως ὁ ΔΕΖ κύκλος πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ ΑΒΓ κύκλος πρὸς τὸν ΔΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα. ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ, τουτέστιν τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, οὕτως τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον. καὶ λοιπὸν τὸ ΑΒΓ τμῆμα πρὸς τὸ ΔΕΖ τμῆμά ἐστιν ὡς τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ.

27 *Λέγω δὴ ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ.*

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ. ὡς δὲ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ.

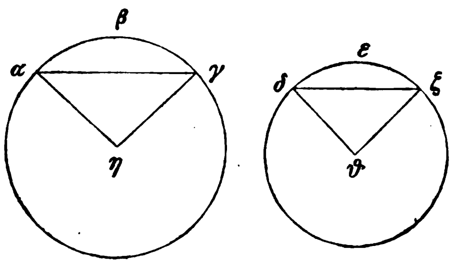
28 *ιδʹ. Ἔστωσαν δύο κύκλοι καὶ πρὸς τοῖς κέντροις αὐτῶν ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ περιεχόμεναι, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΗ ΔΘ, κάθετοι δὲ αἱ ΑΚ ΔΛ· δεῖξαι ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΚ τρίγραμμον, οὕτως καὶ τὸ ΔΘΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΖΛ τρίγραμμον.*



Ἔστι δὲ φανερὸν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου. ὅμοιον γὰρ γίνεται τὸ ΑΗΚ τρίγωνον τῷ ΔΘΛ, καὶ τὸ ΑΓΚ τρίγραμμον τῷ ΔΖΛ τριγράμμῳ, καὶ λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ἑκά-

est igitur ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad sectorem $\alpha\eta\gamma\beta$, ita circulus $\delta\varepsilon\zeta$ ad sectorem $\delta\vartheta\zeta\varepsilon$, et vicissim ut circulus $\alpha\beta\gamma$ ad circulum $\delta\varepsilon\zeta$, ita sector $\alpha\eta\gamma\beta$ ad sectorem $\delta\vartheta\zeta\varepsilon$. Sed ut circulus ad circulum, ita est $\alpha\eta^2 : \delta\vartheta^2$ (*elem.* 12, 2), id est $\Delta\ \alpha\eta\gamma : \Delta\ \delta\vartheta\zeta$ (*elem.* 6, 19); ergo etiam ut sector $\alpha\eta\gamma\beta$ ad sectorem $\delta\vartheta\zeta\varepsilon$, ita est $\Delta\ \alpha\eta\gamma : \Delta\ \delta\vartheta\zeta$. Et subtrahendo (*elem.* 5, 19) ut segmentum $\alpha\beta\gamma$ ad segmentum $\delta\varepsilon\zeta$, ita est $\Delta\ \alpha\eta\gamma : \Delta\ \delta\vartheta\zeta$, id est $\alpha\gamma^2 : \delta\zeta^2$.

Iam dico esse etiam ut circumferentiam $\alpha\beta\gamma$ ad $\delta\varepsilon\zeta$, ita $\alpha\gamma : \delta\zeta$.



Iisdem enim constructis est ut circuli $\alpha\beta\gamma$ circumferentia ad circuli $\delta\varepsilon\zeta$ circumferentiam, ita circumferentia $\alpha\beta\gamma$ ad $\delta\varepsilon\zeta$. Sed ut circulorum circumferentiae inter se, ita est $\alpha\eta : \delta\vartheta$ *), id est (*elem.* 6, 4) $\alpha\gamma : \delta\zeta$; ergo etiam ut circumferentia $\alpha\beta\gamma$ ad $\delta\varepsilon\zeta$, ita est $\alpha\gamma : \delta\zeta$.

XIV. Sint duo circuli et ad centra eorum aequales an- Prop. 14
guli $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$, et tangentes $\alpha\eta$ $\delta\vartheta$, *quas rectae* $\beta\gamma$ $\varepsilon\zeta$ *productae secent in* η ϑ, et *iisdem* $\beta\gamma$ $\varepsilon\zeta$ perpendiculares $\alpha\varkappa$ $\delta\lambda$; demonstretur esse ut triangulum $\alpha\eta\varkappa$ ad trilineum $\alpha\gamma\varkappa$, ita triangulum $\delta\vartheta\lambda$ ad trilineum $\delta\zeta\lambda$.

Est vero manifestum ex superiore *lemmate*. Nam triangulum $\alpha\eta\varkappa$ simile est triangulo $\delta\vartheta\lambda$, et trilineum $\alpha\gamma\varkappa$ trilineo

*) Nam ex undecima huius circumferentiae inter se sunt ut $2\ \alpha\eta : 2\ \delta\vartheta$ (*Co*).

---

3. 4. ὁ $\overline{AH\Gamma}$ τομεὺς AB, corr. S   4. πρὸς τὸν $\overline{\Delta EZ}$ AB, πρὸς τὸν $\overline{\delta\zeta\varepsilon\vartheta}$ S, corr. *Co*   9. τμῆμά ἐστιν *Hu*, εστιν ἐστιν A, sed alterum ἐστιν expunctum, unde unum ἐστὶν BS   11. τὸ (ante ἀπὸ τῆς $A\Gamma$) om. A, add. BS   21. $\overline{I\Delta}$ A[1] in marg. (BS)

τερον πρὸς ἑκάτερον, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΚ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΑ*.

29 ιε΄. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ *ΑΒΓ*, καὶ περὶ κέντρον τὸ *Γ* διὰ τοῦ *Α* περιφέρεια γεγράφθω ἡ *ΑΔ*, ὀρθὴ δὲ ἔστω ἡ πρὸς τῷ *Β* γωνία· δεῖξαι ὅτι ὁ *ΑΔΓ* τομεὺς πρὸς τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν *ΒΓΑ* περιεχομένην.

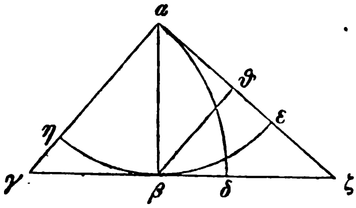
Ἤχθω τῇ *ΓΑ* ὀρθὴ ἡ *ΖΑ* (ἐφάπτεται ἄρα τῆς *ΑΔ* περιφερείας), καὶ διὰ τοῦ *Β* περὶ κέντρον τὸ *Α* περιφέρεια γεγράφθω ἡ *ΕΒΗ*, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν *ΑΖ* ἤχθω ἡ *ΒΘ*. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ *ΕΒΖ* τρίγραμμον πρὸς τὸ *ΕΒΘ* τρίγραμμον ἤπερ πρὸς τὸν *ΕΑΒ* τομέα, καὶ συνθέντι μείζονα λόγον ἔχει τὸ *ΖΘΒ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΕΘΒ* τρίγραμμον ἤπερ τὸ *ΖΑΒ* τρίγωνον πρὸς τὸν *ΕΑΒ* τομέα, ὡς δὲ τὸ *ΖΘΒ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΕΒΘ* τρίγραμμον, οὕτως τὸ *ΖΑΒ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΑΔΒ* τρίγραμμον διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ *ΕΑΒ ΑΓΔ* γωνίας (τοῦτο γὰρ προδέδεικται), καὶ τὸ *ΖΑΒ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ αὐτὸ τρίγωνον πρὸς τὸν *ΕΑΒ* τομέα, μείζων ἄρα ὁ *ΕΑΒ* τομεὺς τοῦ *ΔΑΒ* τριγράμμου· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ *ΕΑΒ* τομεὺς πρὸς τὸν *ΑΗΒ* τομέα ἤπερ τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον πρὸς τὸν *ΑΗΒ* τομέα. τὸ δὲ *ΔΑΒ* τρίγραμμον πρὸς τὸν *ΑΗΒ* τομέα μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον· πολλῷ ἄρα ὁ *ΕΑΒ* τομεὺς πρὸς τὸν *ΒΑΗ* τομέα μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον πρὸς τὸ *ΒΑΓ* τρίγωνον. ὡς δὲ ὁ *ΕΑΒ* τομεὺς πρὸς τὸν *ΒΑΗ* τομέα, οὕτως ἡ ὑπὸ *ΖΑΒ* πρὸς τὴν ὑπὸ *ΒΑΓ*· καὶ ἡ ὑπὸ *ΖΑΒ* ἄρα πρὸς τὴν ὑπὸ *ΒΑΓ* μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον πρὸς τὸ *ΒΑΓ* τρίγωνον. καὶ ἀνάπαλιν τὸ *ΒΑΓ* τρίγωνον πρὸς τὸ *ΒΑΔ* τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ *ΒΑΓ*

---

3. $\overline{\iota\varepsilon}$ A[1] in marg. (BS) 5. δεῖξη AB, corr. S 12. πρὸς τὸν *ΘΕΑΒ* ABS, corr. *Co* 23. πρὸς τὸν *ΑΒΗ* ABS, corr. *Hu* (πρὸς τὸν *ΒΑΗ* voluit *Co*) 24. ἢ πρὸς *Hu* auctore *Co* pro ἤπερ 25. πρὸς τὸν *ΒΑΗ*] in A littera *Η* punctis notata est

$\delta\zeta\lambda$, et utrumque ad alterum rationem habet eandem atque $\alpha\varkappa^2 : \delta\lambda^2$*).

XV. Sit triangulum orthogonium $\alpha\beta\gamma$ recto angulo β, et circa centrum γ per α describatur circumferentia $\alpha\delta$; demonstretur sectorem $\delta\gamma\alpha$ ad trilineum $\delta\alpha\beta$ maiorem proportionem habere quam rectum angulum ad angulum $\beta\gamma\alpha$. Prop. 15



Ducatur ipsi $\gamma\alpha$ perpendicularis $\alpha\zeta$, *quam producta* $\gamma\beta$ *secet in puncto* ζ (recta igitur $\alpha\zeta$ circumferentiam $\alpha\delta$ tangit), et per β circa centrum α describatur circumferentia $\varepsilon\beta\eta$, et perpendicularis ad $\alpha\zeta$ *ducatur* $\beta\vartheta$. Iam quia trilineum $\varepsilon\beta\zeta$ ad trilineum $\varepsilon\beta\vartheta$ maiorem proportionem habet quam ad sectorem $\varepsilon\alpha\beta$ (*elem. 5, 8*), et componendo est

$\Delta\ \vartheta\beta\zeta$: trilin. $\varepsilon\beta\vartheta > \Delta\ \alpha\beta\zeta$: sect. $\varepsilon\alpha\beta$, et

$\Delta\ \vartheta\beta\zeta$: trilin. $\varepsilon\beta\vartheta = \Delta\ \alpha\beta\zeta$: trilin. $\delta\alpha\beta$ (propter superius *lemma,* quia anguli $\varepsilon\alpha\beta$ $\delta\gamma\alpha$ aequales sunt), itaque (*elem. 5, 13*)

$\Delta\ \alpha\beta\zeta$: trilin. $\delta\alpha\beta > \Delta\ \alpha\beta\zeta$: sect. $\varepsilon\alpha\beta$, est igitur (*elem. 5, 8. 10*)

sect. $\varepsilon\alpha\beta >$ trilin. $\delta\alpha\beta$. Ergo est

sect. $\varepsilon\alpha\beta$: sect. $\beta\alpha\eta >$ trilin. $\delta\alpha\beta$: sect. $\beta\alpha\eta$. Sed est

trilin. $\delta\alpha\beta$: sect. $\beta\alpha\eta >$ trilin. $\delta\alpha\beta : \Delta\ \beta\alpha\gamma$; multo igitur

sect. $\varepsilon\alpha\beta$: sect. $\beta\alpha\eta >$ trilin. $\delta\alpha\beta : \Delta\ \beta\alpha\gamma$. Sed est (*elem. 6, 33*)

sect. $\varepsilon\alpha\beta$: sect. $\beta\alpha\eta = \angle\ \zeta\alpha\beta : \angle\ \beta\alpha\gamma$; ergo etiam

$\angle\ \zeta\alpha\beta : \angle\ \beta\alpha\gamma >$ trilin. $\delta\alpha\beta : \Delta\ \beta\alpha\gamma$. Et e contrario (*infra VII propos. 7 extr.*)

$\Delta\ \beta\alpha\gamma$: trilin. $\delta\alpha\beta > \angle\ \beta\alpha\gamma : \angle\ \zeta\alpha\beta$, et componendo (*ibid. propos. 3*)

*) Scilicet trilinea $\alpha\gamma\varkappa$ $\delta\zeta\lambda$ sunt dimidia segmenta $\alpha\gamma\mu$ $\delta\zeta\nu$, et triangula $\alpha\varkappa\beta$ $\delta\lambda\varepsilon$ dimidia triangula $\alpha\mu\beta$ $\delta\nu\varepsilon$, et $\Delta\ \alpha\eta\varkappa \sim \Delta\ \alpha\beta\varkappa$, et $\Delta\ \delta\vartheta\lambda \sim \Delta\ \delta\varepsilon\lambda$. Latius eadem persequitur Co.

πρὸς τὴν ὑπὸ *ΒΑΖ*, καὶ συνθέντι ὁ *ΔΓΑ* τομεὺς πρὸς τὸ *ΔΑΒ* τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ *ΖΑΓ* πρὸς τὴν ὑπὸ *ΖΑΒ*, τουτέστιν ἤπερ ἡ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ *ΑΓΒ* (ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ *ΖΑΒ* τῇ ὑπὸ *ΑΓΒ* διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ *ΖΑΓ* κάθετον εἶναι τὴν *ΑΒ*, καὶ ὅμοιον τὸ *ΖΑΒ* τρίγωνον τῷ *ΑΓΖ*).

30 ιϛʹ. Ἔστω πάλιν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ *ΑΒΓ* ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ *Β*, καὶ περὶ κέντρον τὸ *Γ* διὰ τοῦ *Α* γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ *ΑΔ*· λέγω ὅτι ὁ *ΑΓΔ* τομεὺς πρὸς τὸ *ΑΒΔ* τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ *ΑΓΔ*.

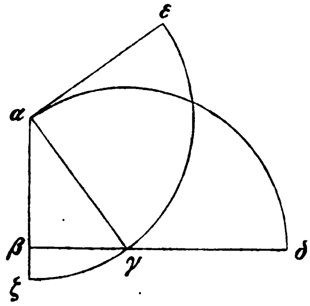
Ἤχθω τῇ *ΑΓ* ὀρθὴ ἡ *ΑΕ*, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ *ΒΑ*, καὶ διὰ τοῦ *Γ* σημείου περὶ κέντρον τὸ *Α* γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ *ΕΓΖ*. ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν ἐκ τοῦ κέντρου τὴν *ΓΑ* γεγραμμέναι εἰσὶν αἱ περιφέρειαι, φανερὸν ὅτι ἴσων εἰσὶ κύκλων. καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ *ΑΓΔ* γωνία τῆς ὑπὸ *ΓΑΕ*· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ *ΑΓΔ* τομεὺς τοῦ *ΑΓΕ* τομέως· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ *ΑΓΔ* τομεὺς πρὸς τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον ἤπερ ὁ *ΑΓΕ* τομεὺς πρὸς τὸ αὐτὸ τρίγωνον, καὶ πολὺ μᾶλλον ἤπερ ὁ *ΑΓΕ* τομεὺς πρὸς τὸν *ΑΓΖ* τομέα. ὡς δὲ ὁ *ΑΓΕ* τομεὺς πρὸς τὸν *ΓΑΖ*, οὕτως ἡ ὑπὸ *ΕΑΓ* γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ *ΓΑΖ*· καὶ ὁ *ΑΓΔ* ἄρα τομεὺς πρὸς τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὑπὸ *ΕΑΓ* γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ *ΓΑΖ*. καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι [καὶ ἀναστρέψαντι] μείζονα λόγον ἔχει ὁ *ΑΓΔ* τομεὺς πρὸς τὸ *ΑΒΔ* τρίγραμμον ἤπερ ἡ ὑπὸ *ΕΑΓ* γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ *ΕΑΖ*, τουτέστιν ἤπερ ὀρθὴ πρὸς τὴν ὑπὸ *ΑΓΔ* (ἔστιν γὰρ ἡ ὑπὸ *ΕΑΖ* γωνία ἴση τῇ ὑπὸ *ΑΓΔ*, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ *ΑΓΔ* ἴση ἐστὶν ὀρθῇ τῇ ὑπὸ *ΓΒΑ* καὶ τῇ ὑπὸ *ΒΑΓ*).

---

1. τὴν (ante ὑπὸ *ΒΑΖ*) om. A, add. BS 3. τὴν (ante ὑπὸ *ΖΑΒ*) add. *Hu* 4. ἡ (ante ὑπὸ *ΖΑΒ*) om. A, add. BS 7. ιϛ A[1] in marg. (BS) 11. ἡ ante ὀρθὴ γωνία add. B *Sca* 12. ἐκβεβλήσθω ἡ *ΒΔ* ABS, corr. *Co* 17. ὑπὸ **ΓΑΕ* A[2] ex ὑπὸ **ΓΑ* 24. τὴν (ante ὑπὸ *ΓΑΖ*) om. AS, add. B 25. καὶ ἀναστρέψαντι interpolatori tribuit

sect. $\delta\gamma\alpha$: trilin. $\delta\alpha\beta > \angle\,\zeta\alpha\gamma : \angle\,\zeta\alpha\beta$, id est
$> \angle$ rectus : $\angle\,\beta\gamma\alpha$ (est enim $\angle\,\zeta\alpha\beta = \angle\,\beta\gamma\alpha$, quia in triangulo orthogonio $\zeta\alpha\gamma$ perpendicularis est $\alpha\beta$, et similia sunt triangula $\zeta\alpha\beta$ $\zeta\gamma\alpha$).

XVI. Sit rursus triangulum orthogonium $\alpha\beta\gamma$ recto angulo β, et circa centrum γ per α describatur circuli circumferentia $\alpha\delta$, *quam recta $\beta\gamma$ producta secet in δ*; dico sectorem $\alpha\gamma\delta$ ad trilineum $\alpha\beta\delta$ maiorem proportionem habere quam rectum angulum ad angulum $\alpha\gamma\delta$. Prop. 16



Ducatur ipsi $\alpha\gamma$ perpendicularis $\alpha\varepsilon$, et producatur $\alpha\beta$, et per punctum γ circa centrum α describatur circuli circumferentia $\varepsilon\gamma\zeta$. Iam circumferentias, quia eodem radio $\alpha\gamma$ descriptae sunt, apparet aequalium circulorum esse. Et angulus $\alpha\gamma\delta$ maior est angulo *recto* $\alpha\beta\gamma$, *id est* $\gamma\alpha\varepsilon$; ergo sector $\alpha\gamma\delta$ maior sectore $\gamma\alpha\varepsilon$, itaque

sect. $\alpha\gamma\delta : \Delta\,\alpha\beta\gamma >$ sect. $\gamma\alpha\varepsilon : \Delta\,\alpha\beta\gamma$, et multo
$>$ sect. $\gamma\alpha\varepsilon$: sect. $\gamma\alpha\zeta$. Sed est

sect. $\gamma\alpha\varepsilon$: sect. $\gamma\alpha\zeta = \angle\,\gamma\alpha\varepsilon : \angle\,\gamma\alpha\zeta$; ergo etiam

sect. $\alpha\gamma\delta : \Delta\,\alpha\beta\gamma > \angle\,\gamma\alpha\varepsilon : \angle\,\gamma\alpha\zeta$. Atque e contrario et componendo *et rursus e contrario* (*infra VII propos. 7 et 5*) est

sect. $\alpha\gamma\delta$: trilin. $\alpha\beta\delta > \angle\,\gamma\alpha\varepsilon : \angle\,\zeta\alpha\varepsilon$, id est
$> \angle$ rectus : $\angle\,\alpha\gamma\delta$ (est enim $\angle\,\zeta\alpha\varepsilon = \angle\,\alpha\gamma\delta$, quia uterque aequalis est recto unà cum angulo $\beta\alpha\gamma$).

Co 26. τομεὺς add. A² initio folii 64 versi 28. ἔστιν — 30. ὑπὸ *BAΓ* forsitan interpolator addiderit

31 ιζ'. Τούτων προγεγραμμένων τὸ προκείμενον θεώρημα συγκριτικὸν ὑπάρχον δείξομεν οὕτως.

Ἔστω δύο τμήματα κύκλων τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ΕΔΖ πρότερον ἔλαττον ἡμικυκλίου· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστιν τὸ ἡμικύκλιον τοῦ τμήματος.

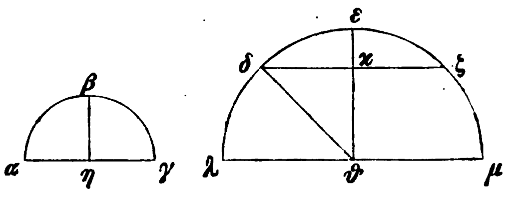
Εἰλήφθω κέντρα τῶν κύκλων τὰ Η Θ, καὶ ὀρθὴ μὲν ἡ ΗΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡ ΘΚΕ, καὶ τῇ ΔΖ παράλληλος ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΛΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΛΗ (αἱ γὰρ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι), ἴση δὲ ἡ ΛΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΛΗ. ὡς δὲ ἡ ΕΛ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕ, ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΕΘΔ τομέα. καὶ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς ΘΛ πρὸς ΗΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τουτέστιν ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΛΗΒ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΛΕΘ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΕΘ τομέα· τῶν ἄρα ΛΕΘ ΛΒΗ τομέων μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ὁ ΔΕΘ τομεύς. καὶ ἐπεὶ ἔχει διὰ τὸ προδειχθὲν λῆμμα μείζονα λόγον ὁ ΕΔΘ τομεὺς πρὸς τὸ ΕΔΚ τρίγραμμον ἤπερ ὀρθὴ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΛΘΕ, πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΕ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, ὡς δὲ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, οὕτως ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα, ὁ ἄρα ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΕΚ τρίγραμμον μείζονα

---

1. $\overline{\iota\zeta}$ A[1] in marg. (BS) 7. τὰ $\overline{Η Θ}$ A, distinx. BS 10. ἡ (ante ΛΘ) om. A, add. BS 13. περιφέρεια add. *Hu* auctore *Co* 14. ὡς δὲ ἡ $\overline{ΕΔ}$ ABS, corr. *Sca* (ὡς δὲ ἡ ΛΕ voluit *Co*) 14. 15. πρὸς τὴν $\overline{ΔΕ}$ AB, πρὸς $\overline{λε}$ S, sed πρὸς ΔΕ corr. *Sca* 17. τοῦ τῆς $\overline{ΔΘΛ}$ (ante πρὸς ΗΛ) ABS cod. *Co*, τοῦ τῆς ΛΘ *Co*, corr. *Sca* δὲ] ἄρα *Co* ἀπὸ τῆς $\overline{ΔΘΛ}$ ABS cod. *Co*, ἀπὸ τῆς ΛΘ *Co*, corr. *Sca* 18. ὁ $\overline{ΛΕΘ}$ AB Paris. 2368 *Co*, corr. S διπλασίονα BS, $\hat{\beta}$ A 20. μέσον S 23. τὴν add. *Hu* 25. 26. πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα add. *Sca* (item *Co*, nisi quod ΑΒΗ) 26. ὁ ἄρα ΔΘΕ τομεὺς add. *Co* (item *Sca*, nisi quod ΕΔΘ

XVII. His praemissis propositum theorema (*p. 335, XI*), quod comparativum est, demonstrabimus hoc modo. Prop. 17

Sint duo circulorum segmenta $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$, eorumque circumferentiae $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$ aequales, et sit $\alpha\beta\gamma$ semicirculus, segmentum autem $\delta\varepsilon\zeta$ primum minus semicirculo; dico semicirculum maiorem esse eo segmento.



Sumantur circulorum centra η ϑ, et ducantur perpendiculares $\eta\beta$ $\vartheta\varkappa\varepsilon$, et ipsi $\delta\zeta$ parallela $\lambda\mu$, et iungatur $\delta\vartheta$. Iam quia est ut circumferentia $\lambda\varepsilon$ ad $\alpha\beta$, ita recta $\lambda\vartheta$ ad $\alpha\eta$ (nam *propter propos. 11* circulorum circumferentiae inter se sunt ut diametri), et circumferentia $\alpha\beta = \delta\varepsilon$, est igitur

circumf. $\lambda\varepsilon$: circumf. $\delta\varepsilon = \lambda\vartheta : \alpha\eta$, id est (*elem. 6, 33*)
$=$ sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\delta\vartheta\varepsilon$. Sed est (*elem. 5 defin. 10*)

$\lambda\vartheta^2 : \alpha\eta^2 = \lambda\vartheta : x$ (*si sit* $\lambda\vartheta : \alpha\eta = \alpha\eta : x$), et *propter propos. 13**)

$\lambda\vartheta^2 : \alpha\eta^2 =$ sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\alpha\eta\beta$, *eratque*

$\lambda\vartheta : \alpha\eta =$ *sect.* $\lambda\vartheta\varepsilon$: *sect.* $\delta\vartheta\varepsilon$; ergo est

sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\delta\vartheta\varepsilon =$ sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: sect. $\alpha\eta\beta$. Et quia propter superius lemma *XV* est

sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: trilin. $\delta\varepsilon\varkappa > \angle$ rectus : $\angle\, \delta\vartheta\varepsilon$, id est
$> \angle\, \lambda\vartheta\varepsilon : \angle\, \delta\vartheta\varepsilon$, id est
$>$ sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\delta\vartheta\varepsilon$, et erat
sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\delta\vartheta\varepsilon =$ sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: sect. $\alpha\eta\beta$, est igitur

*) Scilicet demonstratum est semicirculos $\lambda\varepsilon\mu$ $\alpha\beta\gamma$ inter se esse ut quadrata ex basibus; ergo etiam dimidii semicirculi inter se sunt ut quadrata ex dimidiis basibus. Sed brevius et commodius scriptor illo lemmate uti poterat quod supra p. 269 adnot. †† significavimus.

λόγον ἔχει ἤπερ ὁ αὐτὸς τομεὺς πρὸς τὸν ΑΒΗ τομέα· μείζων ἄρα ὁ ΑΒΗ τομεὺς τοῦ ΔΚΕ τριγράμμου. καὶ τὰ διπλάσια· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον τοῦ ΔΕΖ τμήματος.

32 *ιη'. Ἔστω δὴ πάλιν τὸ ΔΕΖ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμικύκλιον.*

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτά. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, οὕτως ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ (ἴσαι γὰρ αἱ ΑΒ ΔΕ περιφέρειαι). καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ πρὸ δύο λῆμμα μείζονα λόγον ἔχει ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΚΕ τρίγραμμον ἤπερ ὀρθὴ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΛΘΕ, πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΕ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΒΗ, ἔσται μείζων ὁ ΑΗΒ τομεὺς τοῦ ΔΕΚ τριγράμμου. καὶ τὰ διπλάσια· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον τοῦ ΔΕΖ τμήματος· πάντων ἄρα τῶν ἴσας ἐχόντων τὰς περιφερείας κυκλικῶν τμημάτων μέγιστόν ἐστιν τὸ ἡμικύκλιον.

Περὶ τῶν στερεῶν.

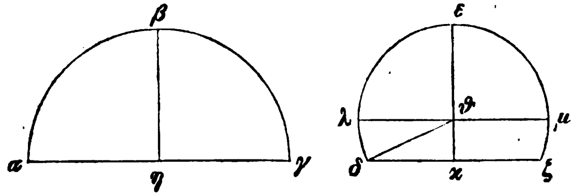
33 *ιθ'. Τὸν πρῶτον καὶ δημιουργὸν τῶν πάντων θεὸν οἱ φιλόσοφοί φασιν εἰκότως τῷ κόσμῳ σχῆμα περιθεῖναι σφαιρικὸν ἐκλεξάμενον τῶν ὄντων τὸ κάλλιστον, τά τε προσόντα τῇ σφαίρᾳ φυσικὰ συμπτώματα λέγοντες ἔτι καὶ τοῦτο προστιθέασιν ὅτι πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μεγίστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα. τἄλλα μὲν οὖν ὅσα προσεῖναι λέγουσιν αὐτῇ πρόδηλά τέ ἐστιν καὶ παραμυθίας ἐλάσσονος δεῖται, τὸ δ' ὅτι μείζων ἐστὶ τῶν ἄλλων σχημάτων οὐδ' οἱ φιλόσοφοι δεικνύουσιν, ἀλλ' ἀποφαίνονται μόνον, οὔτε παραμυθήσασθαι ῥᾴδιον ἄνευ θεωρίας πλείονος. φέρ' οὖν, ὥσπερ ἐν τοῖς πρόσθεν*

---

5. $\overline{IH}$ A[1] in marg. (BS) 10. *πρὸ δύο Hu, β́ A, δεύτερον* BS 15. *μείζονα ἄρα* A, corr. BS 16. *τοῦ* $\overline{\Delta E}$ AB, corr. S 19. *πε͂ͬ στερεων* add. A[3] in marg. (BS) 20. $\overline{I\Theta}$ A[1] in marg. (BS) 22. 23. *τὰ δὲ προσόντα* coni. *Hu* 24. *σχημάτων* om. *Ei* 26. *τἄλλα Hu* pro *τὰ ἄλλα*

sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: trilin. $\delta\varepsilon\varkappa$ > sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: sect. $\alpha\eta\beta$; itaque
sect. $\alpha\eta\beta$ > trilin. $\delta\varepsilon\varkappa$. Itemque dupla; ergo
semicirc. $\alpha\beta\gamma$ > segment. $\delta\varepsilon\zeta$.

XVIII. Iam rursus segmentum $\delta\varepsilon\zeta$ maius sit semicirculo; dico sic etiam semicirculum eo segmento maiorem esse.



Construantur enim eadem; similiter igitur demonstrabimus esse ut sectorem $\lambda\vartheta\varepsilon$ ad $\delta\vartheta\varepsilon$, ita sectorem $\delta\vartheta\varepsilon$ ad $\alpha\eta\beta$ (aequales enim sunt circumferentiae $\alpha\beta$ $\delta\varepsilon$). Et quia propter superius lemma XVI est

sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: trilin. $\delta\varepsilon\varkappa$ > $\angle$ rectus : $\angle\,\delta\vartheta\varepsilon$, id est
> $\angle\,\lambda\vartheta\varepsilon$: $\angle\,\delta\vartheta\varepsilon$, id est
> sect. $\lambda\vartheta\varepsilon$: sect. $\delta\vartheta\varepsilon$, id est
> sect. $\delta\vartheta\varepsilon$: sect. $\alpha\eta\beta$, erit

sect. $\alpha\eta\beta$ > trilin. $\delta\varepsilon\varkappa$. Et item dupla; ergo
semicirc. $\alpha\beta\gamma$ > segment. $\delta\varepsilon\zeta$.

Ergo omnium circuli segmentorum quae aequales circumferentias habent maximus est semicirculus.

LIBRI QUINTI PARS SECUNDA.
In Archimedis solidorum doctrinam.

XIX. Primum et effectorem omnium deum sphaericam figuram mundo recte tribuisse, quoniam omnium pulcherrimam elegerit, philosophi docent, qui cum sphaerae naturalia symptomata exponunt, hoc quoque addunt, omnium solidarum figurarum aequalem superficiem habentium sphaeram esse maximam. Iam alia quidem quae ei tribuuntur tam perspicua sunt, ut vix ulla comprobatione indigeant, hoc autem, maiorem esse *sphaeram* reliquis figuris *solidis*, neque demonstratur a philosophis (qui id affirmant tantummodo) nec nisi longiore quaestione facile comprobatur. Age igitur,

εὕρομεν τὸν κύκλον μέγιστον ὄντα τῶν ἴσην ἐχόντων αὐτῷ τὴν περίμετρον τεταγμένων πολυγώνων σχημάτων, καὶ νῦν τὴν σφαῖραν κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἀποδεῖξαι πειραθῶμεν μεγίστην οὖσαν τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων αὐτῇ τεταγ-
34 μένων στερεῶν σχημάτων. πρότερον δὲ περὶ τῶν στερεῶν αὐτῶν, πρὸς ἃ δεῖ συγκρίνειν τὴν σφαῖραν, ὀλίγα προδιαληψόμεθα· πολλὰ γὰρ ἐπινοῆσαι δυνατὸν στερεὰ σχήματα παντοίας ἐπιφανείας ἔχοντα, μᾶλλον δ' ἄν τις ἀξιώσειε λόγου τὰ τετάχθαι δοκοῦντα [καὶ τούτων πολὺ πλέον τούς τε κώνους καὶ κυλίνδρους καὶ τὰ καλούμενα πολύεδρα]. ταῦτα δ' ἐστὶν οὐ μόνον τὰ παρὰ τῷ θειοτάτῳ Πλάτωνι πέντε σχήματα, τουτέστιν τετράεδρόν τε καὶ ἑξάεδρον, ὀκτάεδρόν τε καὶ δωδεκάεδρον, πέμπτον δ' εἰκοσάεδρον, ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα τρισκαίδεκα τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ ἰσοπλεύρων μὲν καὶ ἰσογωνίων οὐχ ὁμοίων δὲ πολυγώνων περιεχόμενα.

τὸ μὲν γὰρ πρῶτον ὀκτάεδρόν ἐστιν περιεχόμενον ὑπὸ τριγώνων δ' καὶ ἑξαγώνων δ'.

τρία δὲ μετὰ τοῦτο τεσσαρεσκαιδεκάεδρα, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ς', τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις ς' καὶ ἑξαγώνοις η', τὸ δὲ τρίτον τριγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ς'.

μετὰ δὲ ταῦτα ἑκκαιεικοσάεδρά ἐστιν δύο, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ιη', τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις ιβ', ἑξαγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ς'.

μετὰ δὲ ταῦτα δυοκαιτριακοντάεδρά ἐστιν τρία, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις κ' καὶ πενταγώνοις ιβ',

1. εὕρομεν A² ex εὕρωμεν 5. στερεῶν alterum om. S *Ei* 8. μᾶλλον ἄν, deleto δ', vel μᾶλλόν γ' ἄν coni. *Hu* 9. λόγον S *Ei* τὰ add. *Hu* auctore *Co* 9. 10. καὶ τούτων — πολύεδρα interpolatori tribuit *Hu* 18. τριγώνων $\overline{\Delta}$ A, τριγώνων τεσσάρων B, τεσσάρων τριγώνων S *Ei* δ' alterum] $\overline{\Delta}$ A (ac similiter posthac, lineolâ super numerorum notas ductâ), τεσσάρων BS (ac similiter posthac B saepius, S fere constanter pro notis numeralibus) 19. τρία S, δύο AB 20. τετρα$\underline{\gamma}$ώνοις *Ei* pro ὀκταγώνοις 22. ὀκταγώνοις *Ei* pro τετραγώνοις 23. ς̄ καιεικοσαεδρα (sine acc.) A, ἓξ καὶ εἰκοσάεδρά B, ἑξκαιεικοσάεδρά S *Ei*, corr. *Hu* 25. δεύτερον BS, β' A, item p. 354, 1 26. δύο καὶ τριακον-

quemadmodum in superioribus invenimus circulum maximum esse polygonorum regularium, quae aequalem ipsi perimetrum habent, nunc simili ratione demonstrare conemur sphaeram maximam esse ordinatarum figurarum solidarum, quae aequalem ipsi superficiem habent. Sed prius de solidis ipsis, cum quibus sphaera comparanda est, paucis disseramus. Etenim cum multae figurae solidae, quae varias superficies habeant, cogitatione fingi possint, inprimis tamen respiciendae sunt eae quae ordinatae esse videntur. Quo ex genere non solum quinque sunt figurae, de quibus Plato ille divinus exposuit [1]), tetraedrum dico et hexaedrum, octaedrum et dodecaedrum, denique icosaedrum, sed etiam tredecim illae ab Archimede inventae, quas aequilatera et aequiangula, nec tamen similia polygona complectuntur [2]), quorum

(1) primum est polyedrum 8 basium (*ὀκτάεδρον*), quod 4 triangulis et 4 hexagonis continetur;

tum tria polyedra 14 basium (*τεσσαρεσκαιδεκάεδρα*), quorum

(2) primum 8 triangulis et 6 quadratis,

(3) secundum 6 quadratis et 8 hexagonis,

(4) tertium 8 triangulis et 6 octagonis continetur;

tum duo polyedra 26 basium (*ἑκκαιεικοσάεδρα*), quorum

(5) prius 8 triangulis et 18 quadratis,

(6) alterum 12 quadratis, 8 hexagonis, 6 octagonis continetur;

tum tria 32 basium (*δυοκαιτριακοντάεδρα*), quorum

(7) primum 20 triangulis et 12 pentagonis,

1) Tim. p. 54 sq., de anima mundi p. 98, Euclid. elem. 13, 13—18.

2) Qua ratione Archimedes haec polyedra invenerit eorumque numerum definiverit, apparet ex iis quae Ioannes Kepplerus in Harmonice mundi (Lincii Austriae 1619) p. 62—65 acutissime demonstrat. Conf. etiam Baltzer, *Elemente der Mathematik* II, 5 § 7, 6.

ταεδρα A, *δύο καὶ τριακοντάεδρά* BS, coniunx. Paris. 2368 (vel Waitzius in describendo codice) 27. *πενταγώνοις* *Hu* pro *δεκαγώνοις* (conf. infra cap. 36, ubi ex numero solidorum angulorum manifesto apparet hanc veram esse scripturam) *τὸ δὲ δεύτερον πενταγώνοις ιβʹ καὶ ἑξαγώνοις κʹ, τὸ δὲ τρίτον τριγώνοις κʹ καὶ δεκαγώνοις ιβʹ.*

μετὰ δὲ ταῦτα ἕν ἐστιν ὀκτωκαιτριακοντάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ τριγώνων λβʹ καὶ τετραγώνων ϛʹ.

μετὰ δὲ τοῦτο δυοκαιεξηκοντάεδρά ἐστι δύο, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις κʹ καὶ τετραγώνοις λʹ καὶ πενταγώνοις ιβʹ, τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις λʹ καὶ ἑξαγώνοις κʹ καὶ δεκαγώνοις ιβʹ.

μετὰ δὲ ταῦτα τελευταῖόν ἐστιν δυοκαιενενηκοντάεδρον, ὃ περιέχεται τριγώνοις πʹ καὶ πενταγώνοις ιβʹ.

35 *Ὅσας δὲ γωνίας ἕκαστον ἔχει στερεὰς τῶν ιγʹ τούτων σχημάτων πολυέδρων καὶ ὅσας πλευράς, διὰ τοῦδε τοῦ τρόπου θεωρεῖται· ὅσων μὲν γὰρ ἁπλῶς πολυέδρων αἱ στερεαὶ γωνίαι τρισὶν ἐπιπέδοις περιέχονται γωνίαις, ἐξαριθμηθεισῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἃς ἔχουσιν πᾶσαι αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου, δῆλον ὡς ὁ τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀριθμὸς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, ὅσων δὲ πολυέδρων ἡ στερεὰ γωνία περιέχεται τέσσαρσιν ἐπιπέδοις, ἐξαριθμηθεισῶν πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἃς ἔχουσιν αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου, τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ τὸ τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ὅσων πολυέδρων ἡ στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ εʹ γωνιῶν ἐπιπέδων, τὸ πέμπτον τοῦ πλήθους τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἐστιν ὁ ἀριθμὸς τοῦ πλήθους τῶν στερεῶν γωνιῶν.*

36 *Τῶν δὲ πλευρῶν τὸ πλῆθος ἃς ἕκαστον ἔχει τῶν πολυέδρων τόνδε* τὸν τρόπον *εὑρήσομεν. ἐξαριθμηθεισῶν γὰρ πασῶν τῶν πλευρῶν ἃς ἔχει τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα τὸ*

---

2. *τρίτον* BS, *Γʹ* A *δεκαγώνοις Hu*, *πενταγώνοις Ei* pro *τετραγώνοις* 3. *μεταταῦτα* A(S), *δὲ* add. B[1], sed alia manus id rursus delevit 5. *δύο καὶ ἑξηκονταεδρα* A, *δύο καὶ ἑξηκοντάεδρά* B, coniunx. S 9. *δύο καὶ ενενηκοντάεδρον* A(B), *δυοκαιεννενηκοντάεδρον* S *Ei* 11. *$\overline{ΙΓ}$* A, *δεκατριῶν* BS, item p. 356, 5 14. *γωνίαις* pro *γωνιῶν* scripsit et 15. *ἃς* add. *Ei* auctore *Co* 17. *τρίτον* BS, *Γ̂* A 19. *ἃς* add. *Ei* auctore *Co* 23. *τὸ πέμπτον Ei* auctore *Co*, *$\overline{ε}$* AS, *πέντε* B 27. *τὸν* add. B[1]

(8) secundum 12 pentagonis et 20 hexagonis,

(9) tertium 20 triangulis et 12 decagonis continetur;

(10) tum unum 38 basium (ὀκτωκαιτριακοντάεδρον), quod 32 triangulis et 6 quadratis continetur;

tum duo 62 basium (δυοκαιεξηκοντάεδρα), quorum

(11) prius 20 triangulis, 30 quadratis, 12 pentagonis,

(12) alterum 30 quadratis, 20 hexagonis, 12 decagonis continetur;

(13) postremo unum 92 basium (δυοκαιενενηκοντάεδρον), quod 80 triangulis et 12 pentagonis continetur.

Quot autem angulos unumquodque horum tredecim polyedrorum, et quot latera habeat, hac ratione perspicitur. Quorum enim, ne multa, polyedrorum solidi anguli ternis planis constant, enumeratis angulis planis quos habent cunctae polyedri bases, manifesto numeri sic effecti tertia pars est numerus solidorum angulorum; quorum autem polyedrorum solidus angulus quattuor planis constat, enumeratis cunctis planis angulis quos habent bases polyedri, numeri effecti quarta pars est numerus solidorum polyedri angulorum; denique quorum polyedrorum solidus angulus quinque planis constat, similiter quinta pars numeri planorum angulorum est numerus angulorum solidorum [3]).

Quot autem latera unumquodque polyedrum habeat, hoc modo inveniemus. Enumeratis enim cunctis lateribus quae sunt planorum polyedrum complectentium, numerus eorum

3) Haec sine dubio Graecus scriptor ita composuit, ut vel discipulos qui ea audirent vel lectores huius collectionis polyedrorum exempla sive solida sive in plano descripta ante oculos vellet habere; quare, etsi verba quae supra leguntur per se obscuriora videantur, nulla tamen difficultas restat, dummodo nos quoque figuras adhibeamus. Ergo, ut apparatu qui est apud Kepplerum utar, polyedrum huius Latinae versionis primum (1) habet angulos solidos ex 3 planis angulis constantes (fig. 2 Keppl.), secundum ex 4 (fig. 8), tertium ex 3 (fig. 5), quartum ex 3 (fig. 1), quintum ex 4 (fig. 10), sextum ex 3 (fig. 6), septimum ex 4 (fig. 9), octavum ex 3 (fig. 4), nonum ex 3 (fig. 3), decimum ex 5 (fig. 12), undecimum ex 4 (fig. 11), duodecimum ex 3 (fig. 7), tertiumdecimum ex 5 (fig. 13).

πολύεδρον, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν δῆλον ὡς ἴσος ἐστὶν τῷ πλήθει τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. ἀλλ' ἐπειδὴ δύο ἐπιπέδων ἑκάστη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κοινή ἐστιν, δῆλον ὅτι τοῦ πλήθους τὸ ἥμισυ αἱ πλευραί εἰσι τοῦ πολυέδρου.

τὸ μὲν οὖν πρῶτον τῶν ἀνομοιογενῶν ιγ' πολυέδρων ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις δ' καὶ ἑξαγώνοις δ', γωνίας μὲν ἔχει στερεὰς ιβ', πλευρὰς δὲ ιη' · τῶν μὲν γὰρ τεσσάρων τριγώνων αἵ τε γωνίαι ιβ' εἰσιν καὶ αἱ πλευραὶ ιβ', τῶν δὲ δ' ἑξαγώνων αἵ τε γωνίαι κδ' εἰσιν καὶ αἱ πλευραὶ κδ' · γενομένου δὴ τοῦ ἀριθμοῦ παντὸς λς' ἀναγκαῖόν ἐστιν τὸν μὲν τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀριθμὸν τρίτον μέρος εἶναι τοῦ προειρημένου ἀριθμοῦ, ἐπεὶ καὶ ἑκάστη τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπιπέδοις γωνίαις περιέχεται γ', τὸ δὲ τῶν πλευρῶν πλῆθος τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ, τουτέστιν τοῦ λς', ὥστε εἶναι πλευρὰς ιη'.

τῶν δὲ τετρακαιδεκαέδρων τὸ πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ς', ὥστε ἔχειν στερεὰς μὲν γωνίας ιβ' (ἑκάστη γὰρ αὐτοῦ γωνία ὑπὸ τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν περιέχεται), πλευρὰς δὲ [ἔχει] κδ'. τὸ δὲ δεύτερον τῶν τετρακαιδεκαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις ς' καὶ ἑξαγώνοις η', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ' (ἑκάστη γὰρ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ περιέχεται ὑπὸ γ' γωνιῶν ἐπιπέδων), πλευρὰς δὲ [ἔχει] λς'. τὸ δὲ τρίτον τῶν τετρακαιδεκαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ς', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευρὰς δὲ λς'.

τῶν δὲ ἑκκαιεικοσαέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε η' καὶ τετραγώνοις ιη', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευρὰς δὲ μη'. τὸ δὲ δεύτερον τῶν ἑκκαιεικοσαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις ιβ' καὶ ἑξαγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ς', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας μη', πλευρὰς δὲ οβ'.

τῶν δὲ δυοκαιτριακονταέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἕξει στε-

9. *τε* post *γωνίαι* repetit A 10. *τὸν* (post *ἐστιν*) A[1] ex *τῶν* 11. *τρίτον* BS, *Γ'* A 12. *αὐτοῦ* AB[3]S, om. B[1] 14. *ἥμισυ* BS,

laterum manifesto aequalis est summae planorum angulorum; sed quia singula polyedri latera binorum *angulorum* planorum communia sunt, numerum laterum dimidium numeri *angulorum* esse apparet. Ergo tredecim polyedrorum quorum dissimiles sunt bases

(1) primum, quia triangulis 4 et hexagonis 4 continetur, angulos habet solidos 12, latera 18; nam quattuor triangulorum sunt anguli 12 et latera 12, tum quattuor hexagonorum anguli 24 et latera 24; itaque cum *et angulorum et laterum* prodeat summa 36, necessario eius numeri tertia pars est numerus angulorum solidorum (quoniam eius *polyedri* anguli solidi ternis planis constant), dimidium autem eiusdem numeri est laterum numerus, scilicet 18; tum

(2) primum polyedrum 14 basium, triangulis 8 et quadratis 6 continetur, quapropter solidos angulos 12 (nam unusquisque polyedri angulus quattuor planis angulis constat), latera 24 habet,

(3) secundum polyedrum 14 basium, quia quadratis 6 et hexagonis 8 continetur, solidos habet angulos 24 (nam unusquisque polyedri angulus tribus planis angulis constat), latera 36,

(4) tertium polyedrum 14 basium, quia triangulis 8 et octagonis 6 continetur, solidos habet angulos 24, latera 36; tum

(5) prius polyedrum 26 basium, quia triangulis 8 et quadratis 18 continetur, solidos habet angulos 24, latera 48,

(6) alterum polyedrum 26 basium, quia quadratis 12 et hexagonis 8 et octagonis 6 continetur, solidos habet angulos 48, latera 72; tum

(7) primum polyedrum 32 basium, quia triangulis 20

L′ A 16. *τεσσαρεσκαιδεκαέδρων* coni. *Hu*, item vs. 20 et 23 *πρῶτον* S, $\bar{α}$ AB 17. *μὲν* om. *Ei* 19. *ἔχει* del. *Hu*, item vs. 23 *δεύτερον* BS, $\hat{β}$ A, item vs. 28 23. *τὸ δὲ τρίτον* — 25. *λς′* add. *Ei* (nisi quod om. *τῶν τετρακαιδεκαέδρων*) 26. *ἑξκαιεικοσαέδρων* A(B)S, corr. *Hu*, item vs. 29 *ἐπεὶ* add. *Hu* auctore *Co* 27. *τε* om. S *Ei* 33. *τε καὶ* $\bar{κ}$ A, sed *καὶ* del. prima m. *πενταγώνοις* AB, *δεκαγώνοις* S *Ei* *ἔξεις* A, corr. BS *ρεὰς μὲν γωνίας λ', πλευρὰς δὲ ξ'. τὸ δὲ δεύτερον τῶν δυοκαιτριακονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται πενταγώνοις ιβ' καὶ ἑξαγώνοις κ', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευρὰς δὲ ϙ'. τὸ δὲ τρίτον τῶν δυοκαιτριακονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευρὰς δὲ ϙ'.*

τὸ δὲ ὀκτωκαιτριακοντάεδρον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε λβ' καὶ τετραγώνοις ἕξ, ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευρὰς δὲ ξ'.

τῶν δὲ δυοκαιεξηκονταέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ τετραγώνοις λ' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευρὰς δὲ ρκ'. τὸ δὲ λοιπὸν τῶν δυοκαιεξηκονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις λ' καὶ ἑξαγώνοις κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας ρκ', πλευρὰς δὲ ρπ'.

τὸ δὲ δυοκαιενενηκοντάεδρον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε π' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἕξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευρὰς δὲ ρν'.

37 *Ταῦτα μὲν οὖν τὰ ιγ' σχήματα [ἤτοι ἀνομοιογώνια ὄντα ἢ] ὑπὸ ἀνίσων καὶ ἀνομοίων πολυγώνων περιεχόμενα διὰ τὸ ἀτακτότερον παρῃτήσθω τὸ νῦν, τὰ δὲ καλούμενα ε' σχήματα τῇ σφαίρᾳ συγκρίνειν ἄξιον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα μόνα ταῦτα τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας ἔχει, καὶ διὰ τοῦτ' εὔτακτα παρὰ τὰ λοιπὰ μᾶλλόν ἐστιν. ὅτι δὲ πλείω τῶν ε' τούτων ἀδύνατόν ἐστιν εὑρεῖν ἄλλα σχήματα ἴσοις καὶ ὁμοίοις ἰσοπλεύροις πολυγώνοις περιλαμβανόμενα, καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὑπό τινων ἄλλων ἀποδέδεικται. συγκρίνωμεν οὖν αὐτὰ ταῦτα πρότερον τὰ πολύεδρα τῇ σφαίρᾳ.*

38 *Ἔστω γὰρ σφαῖρα μὲν ἐν ᾗ τὸ Α, ἓν δέ τι τῶν προειρημένων ε' σχημάτων ἴσην ἔχον τὴν σύμπασαν ἐπι-*

---

1. *δεύτερον* BS, $\hat{\beta}$ A 3. *ἕξεις* AB, corr. S, item vs. 5. 8. 12. 14 4. *τρίτον* BS, $\hat{\Gamma}$ A *δύο καὶ τριακονταέδρων* AB, coniunx. S 5. *δεκαγώνοις* AB Ei, *τετραγώνοις* S 9. *κδ'* Ei, $\overline{\mu}$ AB, *τεσσαράκοντα* S 10. *δυοκαὶ εξηκονταέδρων* A, *δύο καὶ ἑξ.* B, coniunx. Paris. 2368

et pentagonis 12 continetur, solidos habet angulos 30, latera 60,

(8) secundum polyedrum 32 basium, quia pentagonis 12 et hexagonis 20 continetur, solidos habet angulos 60, latera 90,

(9) tertium polyedrum 32 basium, quia triangulis 20 et decagonis 12 continetur, solidos habet angulos 60, latera 90; tum

(10) polyedrum 38 basium, quia triangulis 32 et quadratis 6 continetur, solidos habet angulos 24, latera 60, tum

(11) prius polyedrum 62 basium, quia triangulis 20 et quadratis 30 et pentagonis 12 continetur, solidos habet angulos 60, latera 120,

(12) alterum polyedrum 62 basium, quia quadratis 30 et hexagonis 20 et decagonis 12 continetur, solidos habet angulos 120, latera 180; denique

(13) polyedrum 92 basium, quia triangulis 80 et pentagonis 12 continetur, solidos habet angulos 60, latera 150.

Ut igitur has tredecim figuras, quae inaequalibus et dissimilibus polygonis continentur, nunc omittamus, quia minus ordinatae (*sive regulares*) sunt, quinque illa polyedra *Platonica* cum sphaera comparare operae est pretium, quae quidem, quoniam aequalibus ac similibus planis continentur, sola aequales habent angulos solidos et praeter cetera bene ordinata sunt. Sed exceptis his quinque figuris nullas inveniri posse alias, quae aequilateris polygonis aequalibus ac similibus contineantur, et ab Euclide (*elem. 13 extr.*) et aliis quibusdam demonstratum est. Primum igitur haec cum sphaera comparemus.

Sit enim sphaera, cuius centrum α, et unum quodpiam horum quinque polyedrorum, cuius tota superficies sphaerae Prop. 18

πρῶτον BS, $\bar{\alpha}$ A 13. *δύο καὶ ἑξηκονταεδρῶν* A(B), coniunx. S 14. $\bar{\varkappa}$ B, *εἴκοσι* AS 16. *δύο καὶ ἐνενηκοντάεδρον* AB, *δυοκαιεννενηκοντάεδρον* S 17. *καὶ* om. AS, add. B *ἕξει** A 19. *ιγ'* S[a] *Ei*, *τρισκαίδεκα* e Parisino 2368 descripsit Waitzius, $\overline{\Gamma}$ A, *τρία* B 19. 20. *ἤτοι — ὄντα ἢ* interpolatori tribuit *Hu* 28. *συγκρίνομεν* B *φάνειαν τῇ τῆς Α σφαίρας· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ σφαῖρα.*

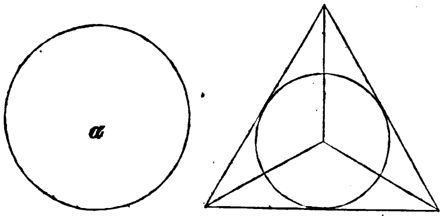
Νοείσθω γὰρ εἰς τὸ πολύεδρον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, ὥστε τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων ἅπτεσθαι· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας· περιέχει γὰρ αὐτήν. ἀλλ' ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ τῆς Α σφαίρας ἐπιφανείᾳ, ὥστε καὶ ἡ τῆς Α σφαίρας ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης τῷ πολυέδρῳ σφαίρας· καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἄρα τῆς Α σφαίρας μείζων ἐστὶν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας. ἴση δὲ ἡ τῆς Α σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Α σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς Α σφαίρας, *μείζων ἐστὶν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν ἐχούσης εὐθύγραμμον τὸ ἴσον τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης αὐτῷ σφαίρας. ἀλλ' ὁ μὲν κῶνος ἴσος ἐστὶν τῇ Α σφαίρᾳ (τοῦτο γὰρ ἐκ τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους δεδειγμένων ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ τῶν ἄλλων ὑφ' ἡμῶν ὑποτεταγμένων λημμάτων ἐστὶ φανερόν), ἡ δὲ πυραμὶς ἴση τῷ πολυέδρῳ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Α σφαῖρα τοῦ ὑποκειμένου πολυέδρου.*

39 *κʹ. Ἔχει δέ τινα σύγκρισιν καὶ ταῦτα τὰ εʹ σχήματα πρὸς ἄλληλα, περὶ ἧς ὕστερον ἐπισκεψόμεθα· δείκνυται γὰρ ὑποκειμένων ἴσων τῶν ἐπιφανειῶν τὸ πολυεδρότερον ἀεὶ καὶ μεῖζον. οἷον τὸ μὲν εἰκοσάεδρον τοῦ δωδεκαέδρου, τὸ δὲ δωδεκάεδρον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ ὁμοίως τὸ μὲν ὀκτάεδρον τοῦ κύβου, ὁ δὲ κύβος τῆς πυραμίδος· ὅμοιον γάρ τι πέπονθεν τὰ στερεὰ ταῦτα τοῖς ἐπιπέδοις πολυγώνοις· καὶ γὰρ ἐπ' ἐκείνων, ὁπότε τὰς περιμέτρους ἴσας*

---

1. *τῇ τῆς Α σφαίρας Hu* auctore *Co*, *τῇ* om. AB, unde *τῇ α σφαίρᾳ* Paris. 2368 (S) *Ei* 5. *ἐπιφάνεια τῆι ἐπιφανείαι* AB, corr. S 7. *Α* om. B[1] *Ei* 12. *Α* om. *Ei* 13. *ὁ τὴν βάσιν* A, sed *τὴν* del. prima m. *κύκλον* A[s] *Ei*, *κύκλου* BS *τὸ* ante *ἴσον* add. ABS, del. *Ei* 14. 15. *ὕψος — σφαίρας* add. *Ei* 15. *τῆς* (ante *πυραμίδος*) om. *Ei*

superficiei aequalis sit; dico sphaeram maiorem esse *polyedro*.



Fingatur enim polyedro inscripta sphaera, quae plana polyedri tangat; ergo superficies polyedri maior est superficie sphaerae inscriptae, quoniam hanc complectitur illa. Sed *ex hypothesi* polyedri superficies aequalis est sphaerae α superficiei, ita ut sphaerae α superficies maior sit superficie sphaerae polyedro inscriptae; ergo etiam radius sphaerae α maior est radio sphaerae inscriptae. Sed sphaerae α superficies aequalis est superficiei polyedri; ergo conus basim habens circulum aequalem superficiei sphaerae α et altitudinem radio sphaerae α aequalem maior est pyramide cuius basis est rectilineum aequale superficiei polyedri et altitudo radius sphaerae polyedro inscriptae. Sed conus ille aequalis est sphaerae α — hoc enim et ex iis quae Archimedes in libro de sphaera et cylindro *primo propos. 35 et 36* demonstravit et ex his quae sequuntur lemmatis a nobis subiunctis (*propos. 20 sqq.*) apparet — et pyramis illa polyedro aequalis (*id quod ex elem. 12, 6 sequitur*); ergo sphaera α maior est eo quod supra posuimus polyedro.

XX. Sed est etiam quaedam horum quinque polyedrorum inter se comparatio, de qua infra videbimus (*cap. 72 sqq.*). Etenim, si aequales *polyedrorum* superficies supponantur, demonstratur semper id quod plures bases habeat maius esse, velut icosaedrum *maius* dodecaedro, et dodecaedrum octaedro, et similiter octaedrum cubo, et cubum pyramide. Nam simile quid in his solidis contingit atque in planis polygonis, quoniam in illis quoque, si aequales perimetros habebant,

---

τὴν βάσιν AB, corr. Paris. 2368 S 20. *ἄλλων* B[1], *ἄλλως* AB[3]S *Ei*
23. $\bar{\varkappa}$ A[1] in marg. (BS) 24. *ἐπισκεψώμεθα* A[1] ex *ἐπισκειψόμεθα*

εἶχεν, ἀεὶ μεῖζον ἀπεδείκνυτο τὸ πολυγωνότερον, καὶ πάντων ὁ κύκλος μείζων, ὥσπερ ἐδείχθη νῦν τῶν πολυέδρων

40 ἡ σφαῖρα. πρόδηλον δ' ὅτι καὶ ὁ κῶνος καὶ ὁ κύλινδρος ἑκάτερος ὁ ἴσην ἔχων ἐπιφάνειαν τῇ τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν αὐτῆς. ὁ μὲν γὰρ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὅλην δὲ τὴν ἐπιφάνειαν μείζονα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἴσος αὐτῇ καταλαμβάνεται, ὅταν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἴσον ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχων τῷ κώνῳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ γ' τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου, καὶ ἴσος ὢν τῷ κώνῳ, ἴσος εὑρίσκεται καὶ τῇ σφαίρᾳ μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν ἔχων αὐτῆς· αἱ γὰρ δύο βάσεις αὐτοῦ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, τουτέστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διπλασίους εἰσίν, ὥστε ὅταν ἑκάτερον τῶν σχημάτων ἴσην ἔχῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῇ τῆς σφαίρας, τότ' ἐξ ἀνάγκης ἡ σφαῖρα ἑκατέρου σχήματος μείζων ἐστίν.

41 Τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ τῆς συγκρίσεως τῆς σφαίρας πρὸς τὰ ε' σχήματα καὶ τὸν κῶνον καὶ κύλινδρον, τὰ δ' ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς εἴρηται, δειχθέντα καὶ ἄλλως ἀποδείξομεν, προγράψαντες ὅσα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν συντείνει λημμάτια.

42 (α'). Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου καὶ τυχοῦσαι ἐπὶ τὴν διάμετρον κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΕ· ὅτι τὸ δὶς ὑπὸ ΖΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΕΗ, καὶ ληφθέντος τοῦ Θ κέντρου ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΕΘ τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΗΕΘ ἔσται λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΓΕΗ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἴση. ἀλλὰ καὶ ὀρθὴ ἡ Ζ τῇ Η ἴση· ἰσογώνιον ἄρα

4. τῇ τῆς σφαίρας *Hu*, τῆι σφαίραι ABS, τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας *Ei* 10. τὸ Γ A, τὸ τρίτον BS 14. διπλασίους A[1] ex διπλασίου 15. τῇ add. *Hu* (τῇ ἐπιφανείᾳ add. *Ei*) 20. ὅσα post αὐτῶν transpos. S *Ei* 21. λημμάτι· A[1], α add. A[2] 22. α' add. *Hu* (quoniam lemmata huius secundae quinti libri partis a scriptore seorsum numerantur)

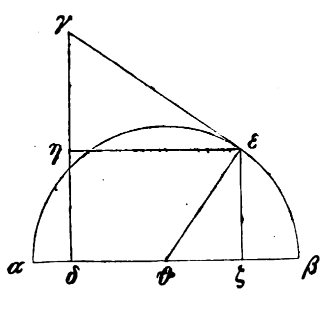
semper maius demonstrabatur id quod plures angulos habebat (*propos. 1*), et omnibus *polygonis* maior circulus (*propos. 2*), sicut polyedris sphaeram *maiorem esse* statim ostendimus. Apparet etiam

et conum et cylindrum, si uterque aequalem superficiem ac sphaera habeat, eàdem minorem esse. Prop. 19

Nam conus cuius basis superficiei sphaerae aequalis est (tota igitur superficies maior superficie sphaerae), aequalis sphaerae deprehenditur, si altitudinem radio sphaerae aequalem habeat (*propter Archim. de sphaer. et cyl. I, 35. 36*); cylindrus autem eandem cum eo cono basim habens (quae est superficiei sphaerae aequalis), altitudinem autem coni axis tertiam partem, quoniam aequalis est cono (*ibid. 36. 37*) sphaerae etiam aequalis invenitur, cum tamen maiorem eà superficiem habeat (namque, *ut curvam superficiem omittamus*, *ipsae* duae bases cylindri duplae sunt baseos coni, id est superficiei sphaerae); itaque si et conus et cylindrus aequalem ac sphaera superficiem habeat, utroque sphaeram maiorem esse necesse est.

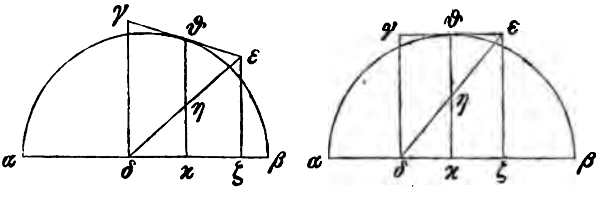
Haec igitur de sphaerae cum quinque polyedris et cono et cylindro comparatione; eadem autem quae ab Archimede, ut diximus, demonstrata sunt nos alia ratione ostendemus praemissis lemmatis quaecunque ad eam demonstrationem adhibentur.

(*Lemma 1*). *Sit* semicirculus diametro $\alpha\beta$, et quaelibet ad diametrum *ducantur* perpendiculares $\gamma\delta$ $\varepsilon\zeta$, et tangens $\gamma\varepsilon$; dico esse $2\,\zeta\varepsilon\cdot\varepsilon\gamma = \alpha\beta\cdot\delta\zeta$. Prop. 20



Ducatur a puncto ε ad rectam $\gamma\delta$ perpendicularis $\varepsilon\eta$, et sumpto centro ϑ iungatur $\varepsilon\vartheta$. Iam quia rectus angulus $\gamma\varepsilon\vartheta$ recto $\eta\varepsilon\zeta$ aequalis est, communi sublato angulo $\eta\varepsilon\vartheta$ restat angulus $\gamma\varepsilon\eta$ aequalis angulo $\vartheta\varepsilon\zeta$. Sed quia etiam anguli η ζ, ut *τὸ ΓΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΕΘ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΘΕΗ, ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΖΕΓ τῷ δὶς ὑπὸ ΘΕΗ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ ΘΕΗ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΗΕ τῇ ΔΖ)· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΖΕ ΕΓ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΖ ΔΗ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ.*

43 *κα′ (β′). Ἔστωσαν δὴ πάλιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τυχοῦσαι κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ, καὶ ἡ ΕΘΓ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΓΘ τῇ ΘΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ.*



Ἤχθω κάθετος ἡ ΘΚ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗΕ. ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΓΔ ΘΚ ΕΖ, καὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΓΕ τῆς ΕΘ, διπλῆ ἐστιν καὶ ἡ μὲν ΓΔ τῆς ΘΗ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΗΚ, ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ ΓΔ ΕΖ τῆς ΘΚ ἐστὶν διπλῆ. διὰ δὲ τὸ προδειχθὲν τὸ δὶς ὑπὸ ΚΘΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΚ. καὶ τὰ διπλάσια· τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ.

44 *κβ′ (γ′). Ἔστω πάλιν τὸ ἡμικύκλιον καὶ τυχοῦσα ἡ ΓΕ καὶ κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ΔΖ καὶ τῆς ὑποτεινούσης περιφέρειαν, ἥ ἐστιν μετὰ τῆς ΓΕ ἡμικυκλίου.*

Προσαναγεγράφθω ὁ κύκλος, καὶ ἔστω διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΓΘ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΔ ἐπὶ τὸ Κ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΕΚ. ἐπεὶ ἡ

---

4. *τῶι* A[1] ex *τὸ* (item *τῷ* B Paris. 2368, sed *τὸ* S[8]) *τὸ δὶς ὑπὸ ΘΕΓ Ei* 4. 5. *τὸ ὑπὸ* AB, *τῷ ὑπὸ* S *Ei* 5. post *ΑΒ ΔΖ* repe-

recti, aequales sunt, triangulum igitur $\gamma\varepsilon\eta$ simile est triangulo $\vartheta\varepsilon\zeta$; est igitur

$\zeta\varepsilon : \varepsilon\vartheta = \eta\varepsilon : \varepsilon\gamma$, itaque $\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma = \vartheta\varepsilon \cdot \varepsilon\eta$, sive

$2\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma = 2\vartheta\varepsilon \cdot \varepsilon\eta$. Sed est $2\vartheta\varepsilon \cdot \varepsilon\eta = \alpha\beta \cdot \delta\zeta$ (quia $2\vartheta\varepsilon = \alpha\beta$, *et* $\varepsilon\eta = \delta\zeta$); ergo etiam

$2\zeta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma = \alpha\beta \cdot \delta\zeta$, sive $(\delta\eta + \zeta\varepsilon)\varepsilon\gamma = \alpha\beta \cdot \delta\zeta$.

XXI (2). Sint rursus ad diametrum *ductae* quaelibet perpendiculares $\gamma\delta$ $\varepsilon\zeta$, et recta $\gamma\vartheta\varepsilon$ tangens semicirculum, ita ut sit $\gamma\vartheta = \vartheta\varepsilon$; dico esse $\alpha\beta \cdot \delta\zeta = (\gamma\delta + \varepsilon\zeta)\gamma\varepsilon$. Prop. 21

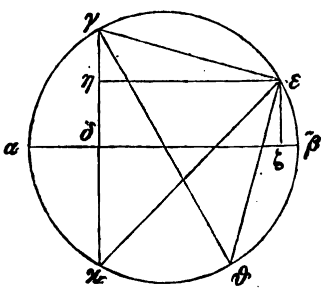
Ducatur perpendicularis $\vartheta\varkappa$, et iungatur recta $\delta\eta\varepsilon$. Quoniam parallelae sunt $\gamma\delta$ $\vartheta\varkappa$ $\varepsilon\zeta$, et $\gamma\varepsilon = 2\vartheta\varepsilon$, est etiam *propter triangulorum similitudines* $\gamma\delta = 2\vartheta\eta$, et $\varepsilon\zeta = 2\eta\varkappa$, itaque etiam

$\gamma\delta + \varepsilon\zeta = 2\vartheta\varkappa$. Sed propter superius lemma est $2\varkappa\vartheta \cdot \vartheta\gamma = \alpha\beta \cdot \delta\varkappa$; atque item dupla, *id est*

$2\varkappa\vartheta \cdot \gamma\varepsilon = \alpha\beta \cdot \delta\zeta$; ergo est

$(\gamma\delta + \varepsilon\zeta)\gamma\varepsilon = \alpha\beta \cdot \delta\zeta$.

XXII (3). Sit rursus semicirculus, et *ducatur* quaelibet $\gamma\varepsilon$, et *diametro* $\alpha\beta$ perpendiculares $\gamma\delta$ $\varepsilon\zeta$; dico rectangulum $(\gamma\delta + \varepsilon\zeta)\gamma\varepsilon$ aequale esse rectangulo quod rectâ $\delta\zeta$ et eâ continetur quae circumferentiam unâ cum circumferentia $\gamma\varepsilon$ semicirculum efficientem subtendit[1]). Prop. 22



Compleatur circulus sitque diametrus eius $\gamma\vartheta$, et producatur $\gamma\delta$ ad $\varkappa$ *punctum circumferentiae*, et ad eam perpendicularis ducatur $\varepsilon\eta$, et iungantur $\varepsilon\vartheta$ $\varepsilon\varkappa$. Quoniam $\alpha\beta$

1) Ad Graecum ἡμικυκλίου apparet supplendum esse περιφέρεια. Ipsa autem scriptoris verba, quae primo obscuriora videantur, clara quasi luce collustrantur, simulatque ex constructione circumferentias $\gamma\varepsilon + \varepsilon\vartheta$ semicirculum efficere cognovimus.

tunt ἔστιν AB 9. $\overline{\kappa\alpha}$ A[1] in marg. (BS), β' add. *Hu* δὴ ABS, δὲ *Ei* 10. καὶ $\overline{HE\Theta\Gamma}$ A[1], corr. A[2] 20. $\overline{KB}$ A[1] in marg. (BS), γ' add. *Hu* τὸ om. *Ei* 25. προσαναπληρώσθω (voluit προσαναπεπληρώσθω) *Ei* auctore *Co*

ΑΒ τὴν ΓΚ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΚ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· ἡ ΗΚ ἄρα συναμφοτέρῳ τῇ ΓΔ ΕΖ ἐστὶν ἴση [ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΗΕ]. ἡ δὲ τὴν λοιπὴν ὑποτείνουσα τοῦ ΓΕΘ ἡμικυκλίου ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Κ γωνία τῇ Θ, ἡ δὲ ὑπὸ ΘΕΓ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθὴ ἴση ἐστὶν τῇ Η, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶν τὰ ΘΕΓ ΚΕΗ τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΘΕ καὶ τῆς ΕΗ, τουτέστιν τῆς ΔΖ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΗΚ ΓΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ.

45 *κγ′ (δ′). Καὶ ἐκ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἡμικυκλίου τινὸς ὡς τοῦ ΑΒΓ περιφέρειά τις ὡς ἡ ΑΓΔ διαιρεθῇ εἰς ὁποσαοῦν ἴσα καὶ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΕ ΕΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΑΒ στροφὴν γινόμεναι ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται, ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΒ, τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΘ.*

Ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ τῆς ΗΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΔΘ καὶ τῆς ΗΔ [ὧν μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εἰρημένου κύκλου]. λέγει γὰρ Ἀρχιμήδης ὅτι "ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις". ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς ΗΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ

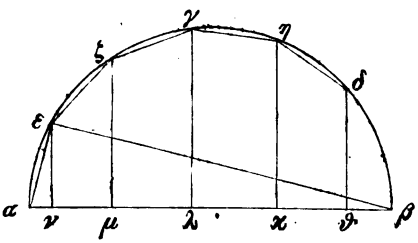
---

2. ἡ $\overline{ΗΔ}$ A[1] ex ἡ $\overline{ΝΔ}$ 3. *ἡ δὲ — ΗΕ* interpolatori tribuit *Hu* τῇ $\overline{ηε}$ BS, τῆι $\overline{HC}$ A 4. *τοῦ Ei* pro *τὸ* 9. *τῶν Ei* pro *τῆς* 10. *τῆς* $\overline{ΓΔΕΖ}$ AS, distinx. B 11. $\overline{ΚΓ}$ A[1] in marg. (BS), *δ′* add. *Hu* 15. *επιφανειας καὶ εἰσὶν* A(B), *ἐπιφανείας καὶ εἰσὶν ἐν* S, corr. *Ei* auctore *Co* 20. 21. *ὧν μέση — κύκλου* interpolatori tribuit *Hu* 21. ὁ ante *Ἀρχιμ.* add. B[1], del. B[3], item p. 368, 21 24. ὁ ante *κύκλος* add. S *Ei* (invitis AB atque ipso Archimede) 25. *τῆς τε πλευρᾶς* Archim.

ipsam $\gamma\varkappa$ ad rectos angulos secat, aequales sunt $\gamma\delta$ $\delta\varkappa$ (*elem.* 3, 3). Sed etiam $\eta\delta$ $\varepsilon\zeta$ aequales sunt; ergo est $\eta\varkappa = \gamma\delta + \varepsilon\zeta$. Sed ea quae circumferentiam semicirculum $\gamma\varepsilon\vartheta$ complentem subtendit est $\varepsilon\vartheta$. Iam quia anguli $\varkappa$ ϑ aequales sunt (*elem.* 3, 21), itemque angulus $\gamma\varepsilon\vartheta$, ut in semicirculo, aequalis est recto $\varkappa\eta\varepsilon$, similia igitur sunt triangula $\vartheta\varepsilon\gamma$ $\varkappa\eta\varepsilon$. Ergo est $\vartheta\varepsilon : \varepsilon\gamma = \varkappa\eta : \eta\varepsilon$; itaque

$\vartheta\varepsilon \cdot \eta\varepsilon = \varkappa\eta \cdot \varepsilon\gamma$. Et est $\eta\varepsilon = \delta\zeta$, et $\varkappa\eta = \gamma\delta + \varepsilon\zeta$; ergo $(\gamma\delta + \varepsilon\zeta)\gamma\varepsilon = \delta\zeta \cdot \varepsilon\vartheta$.

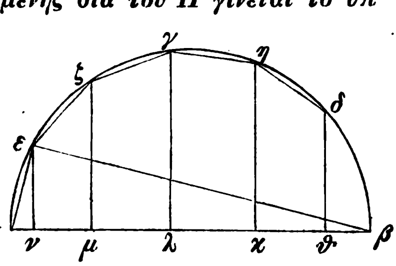
XXIII (4). Atque ex his manifestum est, si semicirculi, velut $\alpha\beta\gamma$, circumferentiae pars quaedam, velut $\alpha\gamma\delta$, in quotcunque aequales *partes* dividatur rectaeque, *velut* $\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\gamma$ $\gamma\eta$ $\eta\delta$, iunganter, eas superficies, quas hae rectae conversione circa axem $\alpha\beta$ efficiunt, aequales esse circulo, cuius radii quadratum (iunctâ $\varepsilon\beta$) aequale est rectangulo $\varepsilon\beta \cdot \alpha\vartheta$. Prop. 23



Nam superficies, quam $\eta\delta$ efficit, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $(\eta\varkappa + \delta\vartheta)\eta\delta$, *id est circulo, cuius radius media proportionalis est rectarum* $\eta\varkappa + \delta\vartheta$ *et* $\eta\delta$ *). Docet enim Archimedes (*de sphaer. et cyl.* I, 17): "si conus isosceles plano secetur basi parallelo, coni superficiei, quae inter parallela plana interiicitur, aequalis est circulus, cuius radius media proportionalis est inter coni latus, quod interiicitur inter parallela plana, et rectam aequalem summae radiorum circulorum qui in parallelis sunt planis". Itaque superficies, quam $\eta\delta$ efficit, aequalis est cir-

*) Significemus radium eius de quo agitur circuli nota x; ergo Pappus ponit $x^2 = (\eta\varkappa + \delta\vartheta)\eta\delta$, itemque Archimedes $\eta\delta : x = x : \eta\varkappa + \delta\vartheta$, quae Graece sic dici poterant: τουτέστιν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογόν ἐστιν cet. (velut Latinis verbis perspicuitatis causa supra expressimus), neque vero ea ratione quam in Graeco contextu interpolator secutus est.

ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΔΘ καὶ τῆς ΗΔ, ὅπερ ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΕΒ ΚΘ ἴσον. ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΓΗ ὁμοίως ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΔΚ [*καὶ γὰρ τοῦ κύκλου προσαναπληρουμένου καὶ τῆς ἴσης τῇ ΕΒ εἰς τὸν κύκλον ἐναρμοζομένης διὰ τοῦ Η γίνεται τὸ ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΔΚ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΗΚ καὶ τῆς ΓΗ. ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΖ ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΜΝ· τοῦτο γὰρ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΝ ΖΜ καὶ τῆς ΕΖ*], *καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τὰ αὐτά. καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ἐσχάτης τῆς ΑΕ κωνικὴ ἐπιφάνεια γινομένη ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΝ, ὅπερ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΝ* (*καὶ γὰρ ἰσογώνιά ἐστιν τὰ ΑΕΒ ΑΕΝ τρίγωνα, καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ΑΕ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΕΝ· καὶ τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν*). *καὶ ἡ ὑπὸ πασῶν ἄρα τῶν ΔΗ ΗΓ ΓΖ ΖΕ ΕΑ γινομένη σύνθετος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΘ.*

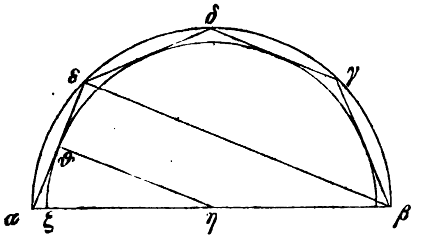


Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἐὰν ἡ ὅλη τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια εἰς ἴσα διαιρεθῇ, ὧν μία ἐστὶν ἡ ΑΕ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐπιφάνεια κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒΑ.

---

1. *τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου* — 4. *δύναται* om. S, quorum verborum loco add. *Ei τὸ ὑπὸ ΕΒ ΘΚ, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΗΓ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται* 4. *καὶ γὰρ* — 15. *καὶ τῆς ΕΖ* interpolatori tribuit *Hu* 5. *τῇ ΕΒ Ei* auctore *Co* pro *τῆς* $\overline{ΕΒ}$ 8. 9. *καὶ τῆς* $\overline{ΓΝ}$ ABS, corr. *Co* 9. 10. *ὑπὸ τῆς ΕΖ Hu* pro *ὑπὸ τῆς* $\overline{ΓΖ}$ 12. *δύναται τὸν ὑπὸ* AB, corr. S 19. post *ΑΕΝ* add. $\overline{ΝΕΒ}$ ABS, del. *Hu* post *ὑπὸ τῆς ΑΕ* add. *Ν καὶ γὰρ ἰσογώ-*

culo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $(\eta\varkappa + \delta\vartheta)\eta\delta$, id est, ut *superiore lemmate* demonstravimus, rectangulum $\varkappa\vartheta \cdot \varepsilon\beta$ **). Similiter superficies, quam $\gamma\eta$ *efficit*, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\lambda\varkappa \cdot \varepsilon\beta$, et eadem ratione in reliquis. Et superficies conica, quam ultima $\alpha\varepsilon$ efficit, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\nu \cdot \varepsilon\beta$, quod quidem rectangulo $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\nu$ aequale est (nam propter triangulorum $\alpha\varepsilon\beta$ $\alpha\nu\varepsilon$ similitudinem est $\alpha\varepsilon : \varepsilon\beta = \alpha\nu : \varepsilon\nu$, et superficies, quam $\alpha\varepsilon$ efficit, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\nu$, ut Archimedes *l. c. propos. 15* demonstravit). Ergo superficies, quam omnes $\delta\eta$ $\eta\gamma$ $\gamma\zeta$ $\zeta\varepsilon$ $\varepsilon\alpha$ efficiunt, composita aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\varepsilon\beta \cdot \alpha\vartheta$.



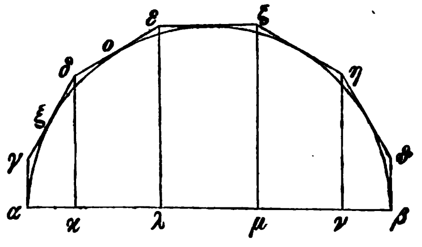
Ac manifestum est, si tota semicirculi circumferentia in aequales partes dividatur, quarum una sit $\alpha\varepsilon$, et rectae, *ut supra*, iungantur, superficiem, quam omnia polygoni latera simili conversione efficiunt, aequalem esse circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\varepsilon\beta \cdot \beta\alpha$.

Atque item apparet rectam $\varepsilon\beta$ aequalem esse diametro circuli eidem polygono inscripti; nam si ex contactûs puncto ϑ ad centrum duxerimus $\vartheta\eta$, haec ipsi $\varepsilon\beta$ parallela est;

**) Facile apparet rectam quae hic ponitur $\varepsilon\beta$ respondere illi $\varepsilon\vartheta$ in superiore lemmate; est enim $\alpha\varepsilon = \eta\delta$, itaque, ut generaliter dictum est propositione 22, ipsa est recta $\varepsilon\beta$ "quae circumferentiam unâ cum circumferentia $\eta\delta$ semicirculum efficientem subtendit". Quae Graecus scriptor tamquam consentanea omisit; interpolator autem paulo post, alieno scilicet loco, demonstrationem quandam similem inculcavit.

νια ἐστιν A, sed del. prima m. 27. εὐθεῖαι add. Ei γιγνομένη A, corr. BS

46 *κδʹ* (εʹ). *Διῃρήσθω δὲ πάλιν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια εἰς ἴσα ὁποσαοῦν, ἀφ᾽ ὧν ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν, ὡς καταγέγραπται· ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινόμεναι ἐπιφάνειαι κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴσαι εἰσὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ.*



Κάθετοι ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ Ε Ζ Η ἐπὶ τὴν διάμετρον. διὰ δὴ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΞ τῇ ΞΔ καὶ καθέτους τὰς ΓΑ ΔΚ, τὸ ὑπὸ ΒΑΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ· τοῦτο γὰρ βʹ θεωρήματι προδέδεικται. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ τῆς ΓΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ διὰ τὸ αὐτὸ Ἀρχιμήδους ιζʹ θεώρημα· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΚ ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΓΔ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ. ὁμοίως δὲ καὶ ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒ ΚΛ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι πάλιν τὴν ΔΟ τῇ ΟΕ, ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΔΕ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ, καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τὰ αὐτά. καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ

---

1. ΚΔ A[1] in marg. (BS), *εʹ* add. *Hu* *δὴ* B[1], sed *δὲ* restituit B[2] 6. *τῶν* ΔΕ ΖΗ A, distinx. BS 8. *τὰς* ΓΑΔΚ et 9. *τῆς* ΓΑΔΚ A, distinx. BS 9. *βʹ*] Β́ Γ́ AB, β̄ γ̄ S, *τῷ δευτέρῳ Ei* (conf. adnot. ad p. 362, 22) 10. *γινομένης* AB, corr. S 12. ΙΖ AB cod. *Co*, *ἑπτακαιδέκατον* S *Ei* (ex edit. Basil. *ιςʹ* voluit *Co*) 15. *γινομένη ἐπιφάνεια* A, corr. BS 16. *διὰ τὸ* S, *διὰ τοῦ* AB 17. *τὴν* Δ* Ο *τῆς* Ε A, *τὴν* δ̄ ὁ *τῆς* ε̄ BS, corr. *Co* 17. 18. *γινομένη ἐπιφανεία* A, corr. BS

itaque ob triangulorum $\alpha\varepsilon\beta$ $\alpha\vartheta\eta$ *similitudinem est* $\varepsilon\beta = 2\vartheta\eta = 2\zeta\eta$, *id est aequalis diametro circuli polygono inscripti*[1]).

XXIV (*5*). Rursus semicirculi circumferentia in quotcunque aequales *partes* dividatur, a quibus tangentes ducantur, ut *in figura* descriptum est; dico superficiem, quam rectae $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ $\eta\vartheta$ simili conversione efficiunt, aequalem esse circulo, cuius radius est $\alpha\beta$. Prop. 24

A punctis δ ε ζ η perpendiculares ducantur ad diametrum. Iam quia est $\gamma\xi = \xi\delta$ *), et perpendiculares sunt $\gamma\alpha$ $\delta\varkappa$, est *igitur* $\alpha\beta\cdot\alpha\varkappa = (\gamma\alpha + \delta\varkappa)\gamma\delta$, id quod supra theoremate 2 (*propos. 21*) demonstravimus. Sed superficies, quam $\gamma\delta$ efficit, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $(\gamma\alpha + \delta\varkappa)\gamma\delta$ propter idem, *quod modo citavimus*, Archimedis theorema[2]) decimum septimum; ergo etiam circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta\cdot\alpha\varkappa$ aequalis est superficiei, quam $\gamma\delta$ efficit. Similiter etiam circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta\cdot\varkappa\lambda$, quia rursus est $\delta o = o\varepsilon$, *et perpendiculares sunt* $\delta\varkappa$ $\varepsilon\lambda$, aequalis est superficiei, quam $\delta\varepsilon$ efficit, et eadem ratione in reliquis. *Nam si unum latus, velut* $\varepsilon\zeta$ *in figura adscripta, diametro* $\alpha\beta$ *parallelum sit, rursus propter superius theorema 2 est* $\alpha\beta\cdot\lambda\mu = (\lambda\varepsilon + \zeta\mu)\varepsilon\zeta = 2\lambda\varepsilon\cdot\varepsilon\zeta$, *et propter Archimedis theorema 14 superficies, quam* $\varepsilon\zeta$ *efficit, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum* $2\lambda\varepsilon\cdot\varepsilon\zeta$;

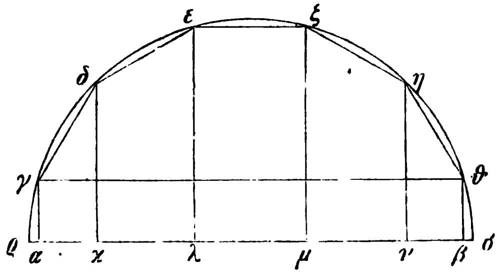
1) Haec auctore Commandino (cuius vide commentarios ad propos. 24) addidimus propter eum Pappi locum qui infra cap. 68 legitur, ubi verbis διὰ τὸ δ' θεώρημα haec ipsa quae supra restituimus, in nostris codicibus deperdita, citantur. Vel idem etiam ea ratione quam scriptor lemmatis XXV breviter attigit (vide ibi adnot. **) demonstrari potest.

*) Hoc e Graeci scriptoris sententia sic demonstrandum esse videtur. Sumatur semicirculi centrum π, et ducantur $\gamma\pi$ $\xi\pi$ $\delta\pi$ $o\pi$. Iam primum ex arcuum $\alpha\xi$ ξo aequalitate efficitur angulos $\alpha\pi\xi$ $\xi\pi o$ inter se aequales esse (elem. 3, 27). Tum angulos $\alpha\pi\gamma$ $\xi\pi\gamma$, itemque $\xi\pi\delta$ $o\pi\delta$ aequales esse demonstratur ex elem. 6, 7; est igitur $\angle\,\gamma\pi\xi = \frac{1}{2}\angle\,\alpha\pi\xi$, et $\angle\,\delta\pi\xi = \frac{1}{2}\angle\,\xi\pi o$, itaque $\angle\,\gamma\pi\xi = \angle\,\delta\pi\xi$. Ergo propter elem. 1, 26 est $\gamma\xi = \delta\xi$.

2) Θεώρημα scriptor ἀπὸ τοῦ κοινοῦ posuit pro πρότασιν; nam inter has 17 Archimedis propositiones sunt problemata 5, theoremata 12. Conf. supra p. 80, 7 sqq.

ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ πασῶν τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ.

κε΄. Ἢ οὕτως τὸ αὐτό. ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓΔΕΖΗΘΒ πολύγωνον εἰς ἕτερον ἡμικύκλιον περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον,



καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ ΡΣ, καὶ κάθετοι ὁμοίως ἤχθωσαν· γίνεται δὴ διπλῆ ἡ μὲν ΓΔ τῆς ΓΡ, ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΘΣ διὰ τὸ προκείμενον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ μετὰ τῆς ΓΔΘ ἴση ἐστὶν τῇ ΡΘΣ. ὑποτείνει δὲ τὴν ΓΔΘ ἡ ἐπὶ τὰ Γ Θ ἐπιζευγνυμένη ἴση τῇ ΑΒ· ἔσται δὴ διὰ τὸ γ΄ θεώρημα τὸ ὑπὸ ΘΓ ΑΚ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΑΚ, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΑ ΚΛ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΚ ΕΛ καὶ τῆς ΔΕ. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τὰ αὐτά. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ ἴσος ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινομέναις ἐπιφανείαις.

47 *κς΄ (ς΄). Ἡμικύκλιον οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω*

2. *ΓΔ ΔΕ Co* pro *ΓΔ ΔΒ* *γινομένῃ* AB, corr. S *ἐπιφανεια* (sine acc.) A, *ἐπιφάνεια* B, corr. S 3. *ΚΕ* A[1] in marg. (BS) *ἐγγεγράφθω* AB, *γεγράφθω* S *Ei* *τὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΒ* AB, *τὸ αβδεζηθβ* S, corr. *Co* 4. *περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον Co, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ ΑΘΒ* AB, *καὶ ἔστω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ αβ* S, om. *Ei* 5. *διάμετρος αὐτοῦ Ei* 6. 7. *τῆς ΓΑ ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΘΒ* ABS, corr. *Hu* 7. 8. *ἡ ΓΔ μετὰ τῆς ΔΘ* ABS, *ἡ ΓΔΘ μετὰ τῆς ΔΕ Ei*, corr. *Hu* 8. *τῇ ΡΘΣ Ei* pro *τῆι ΔΘC* *ἡ* om. AB Paris. 2368, add. S[2] *Ei* 9. *τὰ ΓΘ* A, distinx. BS post *τῇ ΑΒ* add. *τουτέστιν τῆι ΔΕ* ABS, del. *Ei* *γ΄ Hu, Δ* A, *δ΄* B, *τέταρτον* S *Ei*, *κα΄* voluit *Co* (qui omnino in corruptissimo hoc theoremate restituendo aliam, nec tamen rectam viam ingressus est; circumferentiam enim *γδ* bifariam divisit in *ξ* et rectam *ξσ* iunxit, quibus ambagibus abstinuit vetus scrip-

ergo etiam circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta \cdot \lambda\mu$, *aequalis est superficiei, quam* $\varepsilon\zeta$ *efficit*[3]. Ergo circulus, *cuius radii quadratum aequat rectangulum*

$$\alpha\beta(\alpha\varkappa + \varkappa\lambda \ldots + \nu\beta),$$

id est cuius radius est ipsa $\alpha\beta$, aequalis est superficiei quam cunctae $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ $\eta\vartheta$ efficiunt.

XXV. Vel idem hoc modo. Inscribatur *idem* polygonum $\alpha\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta$ in alterum semicirculum circa idem centrum, sitque eius diametrus $\varrho\sigma$, et perpendiculares similiter ducantur; fit igitur ex eo quod propositum est *circumferentia* $\gamma\delta$ dupla ipsius $\gamma\varrho$ et $\eta\vartheta$ dupla ipsius $\vartheta\sigma$, ideoque *circumferentia* $\gamma\delta$ + $\gamma\delta\vartheta$ aequalis ipsi $\varrho\vartheta\sigma$, *id est semicirculo*. Sed circumferentiam $\gamma\delta\vartheta$ subtendit recta $\gamma\vartheta$, ipsi $\alpha\beta$ aequalis; erit igitur propter theorema 3**)

$$\gamma\vartheta \cdot \alpha\varkappa, \text{ id est } \alpha\beta \cdot \alpha\varkappa = (\gamma\alpha + \delta\varkappa)\gamma\delta, \text{ et}$$
$$\alpha\beta \cdot \varkappa\lambda = (\delta\varkappa + \varepsilon\lambda)\delta\varepsilon,$$

et eadem ratione in reliquis. Ergo etiam summae inter se aequales, itaque circulus, cuius radius $\alpha\beta$, aequalis est summae superficierum quas rectae $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ $\eta\vartheta$ efficiunt[4].

XXVI (*6*). Sit semicirculus, cuius diametrus $\alpha\beta$, et du- Prop. 25

3) Interpolator ille qui infra cap. 70 verba μέση ἀνάλογον cet. inculcavit Archimedis propositionem 17, quae est de cono, etiam de cylindri curva superficie valere voluit, quod, etsi re verum est, tamen nisi peculiari lemmate demonstratum enuntiari non debebat. Quare nobis hoc loco non Graecus scriptor aliquid, quod necessarium esset, incuria omisisse, sed codicum scriptura, sicut fere ubique in hac quinti libri parte, gravius corrupta esse videtur, quam nos sic, ut supra perscriptum est, restituimus. Ac simile quiddam sine dubio sensit ille Graecus scriptor, qui sub titulo Ἢ οὕτως τὸ αὐτό lemma XXV, demonstratione elegantissima insigne, addidit.

**) Ut fere fit, locus olim desperatissimus nunc correctis et litteris geometricis et theorematis numero mira perspicuitate enitet; nam, ut est in lemmate 3 (propos. 22), ipsa recta $\gamma\vartheta$ circumferentiam unâ cum circumf. $\gamma\delta$ (id est $\gamma\varrho + \vartheta\sigma$) semicirculum efficientem subtendit.

4) Demonstratio in brevius contracta ex superiore lemmate supplenda est.

---

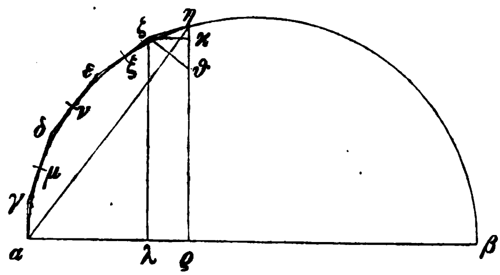
tor Graecus) 10. ὑπὸ *ΘΓ ΑΚ*] ὑπὸ $\overline{\text{ΔΓ}}$ $\overline{\text{ΑΚ}}$ ABS, ὑπὸ *ΓΘ ΑΚ Co Ei* 11. τῆς $\overline{\text{ΓΔΑΚ}}$ AS, distinx. B, corr. *Co* 12. $\overline{\text{ΒΑΚΛ}}$ τῶι et τῆς $\overline{\text{ΔΚΕΛ}}$ A, distinx. BS 16. $\overline{\text{Κϛ}}$ A[1] in marg. (BS), ϛʹ add. *Hu* ἡ ante διάμετρος add. S *Ei* *τυχοῦσα ἡ ΑΗ, καὶ ἡ ΑΗ περιφέρεια διῃρήσθω εἰς ἴσας ὁποσασοῦν περιφερείας τοῖς Μ Ν Ξ σημείοις καὶ ἀπὸ τῶν Α Η καὶ τῶν διαιρέσεων ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ, καὶ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΗΘ καθέτου οὔσης τῆς ΗΡ· ὅτι, εἰ περὶ ἄξονα τὸν ΑΒ στραφὲν τὸ ἡμικύκλιον ἀποκατασταίη, ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΗ μείζων ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ.*

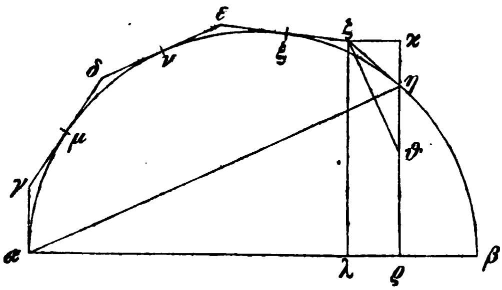
Ἤχθωσαν κάθετοι ἀπὸ τοῦ Ζ, ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ ἡ ΖΛ, ἐπὶ δὲ τὴν ΗΡ ἡ ΖΚ, τῆς ΖΚ καθέτου, ὀξείας μὲν οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, μεταξὺ τῶν Η Θ πιπτούσης, ἀμβλείας δὲ οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, ἐκτὸς τοῦ Η, ὡς ἔχουσιν αἱ καταγραφαί. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ὑπὸ ΡΗΘ ἢ ΡΗΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΑΡ (τοῦτο γὰρ ἐν τῷ α΄ θεωρήματι δέδεικται), κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ ΑΡ καὶ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΡΗΘ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ ΑΡ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΒΑΡ, ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ τῷ δὶς ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ καὶ τοῦ ὑπὸ ΒΑΛ. ἀλλὰ τῷ δὶς ὑπὸ ΡΗΘ καὶ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ (τοῦτο γὰρ ἑξῆς δειχθήσεται)· καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΗ

---

2. *ὁποιασοῦν Ei* *τοῖς* $\overline{\text{ΜΝΞ}}$ et 3. $\overline{\text{ΑΗ}}$ *καὶ* A, distinx. BS 3. *αἱ* om. S *Ei* 4. *κάθετος* AB, corr. S 7. *κύκλου η εκκέντρου* A, *κύκλου ἢ ἐκ τοῦ κέντρου* B, *κύκλου ἢ ἐκ κέντρου* S, corr. *Ei* auctore *Co* *κύκλῳ Ei* auctore *Co* pro *κύκλου* 8. *ἡ* om. A, add. BS *τὸ ἥμισυ* BS, *τὸ* L΄ A *ἐπὶ τὸ* $\overline{\text{ΖΘ}}$ ABS, corr. *Co* (conf. adnot. ad p. 376, 16. 17) 11. *τῶν* $\overline{\text{ΗΘ}}$ A, distinx. BS 13. *ἢ* S, *ἡ* A (cum proximis sic confundit B $\overline{\text{ηρ}}$ $\overline{\text{ηζ}}$) 14. *ὑπὸ* $\overline{\text{ΑΒ}}$ $\overline{\text{ΑΡ}}$ A[1], corr. A[2] (BS) *α΄ Hu*, *Β̂* A(B), *δευτέρῳ* S *Ei*, *κ΄* voluit *Co* 21. *τῶ δις ὑπὸ* $\overline{\text{ΡΗΘ}}$ *μετὰ τοῦ ὑπὸ* $\overline{\text{ΗΘΚ}}$ A[2] in marg. (fuerat primum *τῶ τε*, sed *τε* deletum), *τῷ δὶς* etc. BV (nisi quod V habet *μετὰ τοῦ ὑπὸ θηκ*), om. A[1] Paris. 2368 S, *τῷ τε δὶς ὑπὸ ΡΗΘ καὶ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ Ei* *καὶ τοῦ* ABS, *μετὰ τοῦ Ei* 22. *τῷ* (ante *ὑπὸ ΗΘΚ*) add. *Ei* 23. *τὸ ἀπὸ* AS, *τῷ ἀπὸ* B, *ὑπὸ* corr. *Ei* auctore *Co*

catur quaelibet $\alpha\eta$, et circumferentia $\alpha\eta$ in quotcunque aequales partes dividatur, *velut* in punctis $\mu\ \nu\ \xi$, et ab $\alpha\ \eta$ itemque a punctis divisionis ducantur tangentes $\alpha\gamma\ \gamma\delta\ \delta\varepsilon\ \varepsilon\zeta\ \zeta\eta$, et ipsi $\zeta\eta$ aequalis *ponatur* $\eta\vartheta$, cum $\eta\varrho$ sit perpendicularis *ad diametrum*; dico, si semicirculus circa axem $\alpha\beta$ conversus *in priorem locum* restituatur, superficiem, quam cunctae $\alpha\gamma\ \gamma\delta\ \delta\varepsilon\ \varepsilon\zeta\ \zeta\eta$ efficiunt, aequalem esse circulo, cuius radius $\alpha\eta$, unà cum circulo, cuius radii quadratum aequat dimidium $\zeta\vartheta^2$.





Ducantur a puncto ζ perpendiculares $\zeta\lambda$ ad *diametrum* $\alpha\beta$, et $\zeta\varkappa$ ad $\varrho\eta$, *qua in constructione* perpendicularis $\zeta\varkappa$, si angulus $\zeta\eta\vartheta$ acutus sit, inter puncta $\eta\ \vartheta$ cadit, sin vero obtusus, extra punctum η *), ut figurae ostendunt. Iam quia propter theorema 1 (*propos.* 20) est

$2\zeta\eta\cdot\eta\varrho = \alpha\beta\cdot\lambda\varrho$, id est (*quia* $\zeta\eta = \eta\vartheta$)

$2\varrho\eta\cdot\eta\vartheta = \alpha\beta\cdot\lambda\varrho$, commune apponatur $\beta\alpha\cdot\alpha\lambda + \eta\vartheta\cdot\vartheta\varkappa$; ergo

$\beta\alpha\cdot\alpha\lambda + \beta\alpha\cdot\lambda\varrho + \eta\vartheta\cdot\vartheta\varkappa = 2\varrho\eta\cdot\eta\vartheta + \beta\alpha\cdot\alpha\lambda + \eta\vartheta\cdot\vartheta\varkappa$. Sed est $\beta\alpha\ \alpha\lambda + \beta\alpha\cdot\lambda\varrho$, id est $\beta\alpha\cdot\alpha\varrho = \alpha\eta^2$ (*elem.* 6, 8 *coroll. et* 17), et $2\varrho\eta\cdot\eta\vartheta + \eta\vartheta\cdot\vartheta\varkappa = (\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2$, id quod deinceps (8) demonstrabitur; ergo

*) In tertio casu, nimirum si angulus rectus sit, quid fiat, tamquam consentaneum omisit scriptor.

μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΑΔ καὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς *ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ. ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων, καὶ ἐδείχθη πρὸ ἑνὸς τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ἐφαπτομένων κωνικῶν ἐπιφανειῶν γινόμενον σχῆμα ἴσον κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΖΗ ἐν τῇ στροφῇ γινόμενον σχῆμα κωνικῆς ἐπιφανείας ἴσον κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ [ἔστιν Ἀρχιμήδους ιζʹ θεωρήματι], τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΓΑ γινόμενον σχῆμα κύκλος ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ ΗΘ, οἱ τρεῖς ἄρα κύκλοι, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ γινομένη ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου* οὗ *ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΗΘΚ, τουτέστιν* τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ.

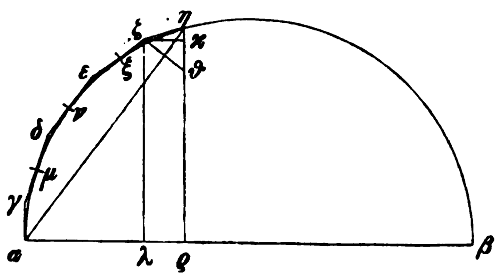
48 (ζʹ). Ὅτι δὲ *τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΗΘΚ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς, ὀξείας οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, τὸ ἀπὸ ΖΘ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΖΗ ΗΘ, ὡς ἔστιν δευτέρῳ στοιχείων· τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΗ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ). ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΘΗ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΗΚ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ λοιπὸν ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ ἐστὶν ἴσον. ἀμβλείας δὲ οὔσης τῆς*

---

2. *τῆς* (ante *ΗΘ μετὰ*) add. *Ei* 10. 11. *ἔστιν — θεωρήματι* interpolatori tribuit *Hu* (servat, et *ὡς* ante *ἔστιν* add. *Ei*) 11. *θεωρήματα* B, sed extremum *τα* erasum, *θεώρημα* igitur voluit corrector 13. *τρεῖς* BS, $\overset{\prime}{\Gamma}$ A 14. *κύκλου οὗ* S, *οὗ* om. AB 16—19. *δύναται τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. Ὅτι δὲ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ δῆλον Ei* 16. *τουτέστιν — 19. τῷ ὑπὸ ΗΘΚ* om. Paris. 2368 S (non V) 16. 17. *τὸ ἥμισυ — τὰ Ζ Θ* add. *Co* 18. *ζʹ* add. *Hu*, *Ὅτι δὲ* add. *Co* *τὰ* $\overline{Z\Theta}$ AV, distinx. B 19. *πρώτης* S, *ά* A, $\overline{\alpha}^{\tau\eta\varsigma}$ B 22. *δευτέρῳ* S, $\hat{\beta}$ A, $\overline{\beta}^{\omega}$ B *στοιχείω* A(BS), corr. *Hu* auctore *Co* *ἥμισυ* S, L′ AB 23. 24. *ἴση — τῇ ΗΘ* om.

$$\alpha\eta^2 + \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa = \beta\alpha \cdot \alpha\lambda + (\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2.$$

Sed quia circuli inter se sunt ut quadrata ex diametris (*elem.* 12, 2), id est ut quadrata ex radiis, et propter ea quae proxime (*propos.* 24) demonstravimus, primum summa superficierum conicarum, quas rectae $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ *conversione circa axem* $\alpha\beta$ efficiunt, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\beta\alpha \cdot \alpha\lambda$, tum superficies conica, quam recta $\zeta\eta$ *eâdem* conversione efficit, aequalis circulo, cuius radii quadratum aequat *rectangulum* $(\zeta\lambda + \eta\varrho)\zeta\eta$, *id est, quia* $\zeta\lambda = \varkappa\varrho$, *et* $\zeta\eta = \eta\vartheta$, rectangulum $(\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta$, denique figura, quam *perpendicularis* $\alpha\gamma$ efficit, circulus est, cuius radii quadratum aequat $\eta\vartheta^2$ (*scilicet* $\eta\vartheta = \zeta\eta = \alpha\gamma$), ergo summa trium *quos diximus* circulorum, id est superficies, quam *cunctae* $\alpha\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ efficiunt, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat $\alpha\eta^2$, unà cum circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa$, id est dimidium $\zeta\vartheta^2$.



(7). Sed esse $\eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa = \frac{1}{2}\zeta\vartheta^2$ ex his apparet. In prima figura, ubi acutus est angulus $\zeta\eta\vartheta$, propter elem. 2, 13 est

$$\zeta\vartheta^2 + 2\,\vartheta\eta \cdot \eta\varkappa = \zeta\eta^2 + \eta\vartheta^2;$$ ergo (quia $\zeta\eta = \eta\vartheta$)

$$\tfrac{1}{2}\zeta\vartheta^2 + \vartheta\eta \cdot \eta\varkappa = \eta\vartheta^2.$$ Sed est $$\eta\vartheta^2 = \vartheta\eta \cdot \eta\varkappa + \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa;$$ communi igitur sublato $\vartheta\eta \cdot \eta\varkappa$ restat

$$\tfrac{1}{2}\zeta\vartheta^2 = \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa.$$

Ei **24.** ἡ $\overline{\zeta\eta}$ S, ἡ $\overline{Z}$ AB *ἐστιν τῶι* A(B), corr. S **26.** ἥμισυ BS, L′ A *ἐπὶ τὰ* $\overline{\Xi\Theta}$ A, distinx. BS, *Z* corr. *Co* **27.** *τῶι ὑπὸ* $\overline{\Theta HK}$ ABS *Ei*, corr. *Co* *ὑπὸ ΖΗΘ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, πάλιν τὸ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον γίνεται τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ οὕτως· ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ μεῖζόν ἐστιν τῶν ἀπὸ ΖΗ ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ ΘΗΚ, καὶ τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ τοῦ ἀπὸ ΗΘ μεῖζόν ἐστιν τῷ ὑπὸ ΘΗΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ. τῷ δὲ ἀπὸ ΘΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΚΘΗ διὰ τὸ γ′ τοῦ β′ στοιχείων· καὶ τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΘΗ.*

Καὶ ἐπεὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἔλασσόν ἐστιν ἀεὶ τοῦ δὶς ἀπὸ Ζ Η, δῆλον ὡς ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ γινομένη ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΗ μετὰ δύο κύκλων, ὧν ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΖΗ, ἐλάσσων ἐστίν.

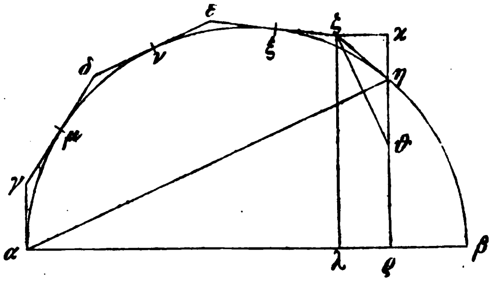
49 *κζ′ (η′). Ὅτι τὸ δὶς ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ.*

Κείσθω τῇ μὲν ΗΡ ἴση ἡ ΡΣ, τῇ δὲ ΘΡ ἡ ΡΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΣ τῇ ΘΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΡΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΡΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ ΡΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΡΘΗ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΗΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΗΡ τῇ ΡΣ, ἡ δὲ ΘΡ τῇ ΡΛ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΣΗΘ τῷ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΗΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΚΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΗΘ

---

1. *δευτέρας* BS, *β̂* A 2. *τὸ ὑπὸ* $\overline{KH\Theta}$ AB, corr. *Co* (*τὸ ὑπὸ* $\overline{\vartheta\eta\varkappa}$ S, quem errorem retinuit *Ei*, sed paulo post vs. 9 recte secutus est Commandinum) *ἡμίσει* S, L′ AB, item vs. 6 2. 3. *ἐπὶ τὰ* $\overline{Z\Theta}$ A, distinx BS, item vs. 5. 7. 9. 10 3. *οὕτως ἐπὶ τὸ* ABS, *τὸ γὰρ Ei*, corr. *Hu* 4. *ἥμισυ* S, L′ AB 8. *στοιχείου* ABS, corr. *Hu* 9. *ἥμισυ* S, L′ A, S″ B *τῷ ὑπὸ ΚΘΗ Co* pro *τῶι υπὸ* $\overline{KH\Theta}$ 10. *ἐπεὶ τὸ ἥμισυ* S, *ἐπὶ τὸ* L′ AB 10. 11. *ἐλάσσονα ἐστιν* A(B), corr. S 12. *ἡ* om. AB, add. S 13. *ἡ* (ante *ἐκ*) om. ABS, add. *Ei* 15. $\overline{\varkappa\zeta}$ A[1] in marg. (BS), *η′* add. *Hu* *μετὰ τὸ* AB, corr. S 20. post *ἐστὶν τῷ* add. *τε* ABS, om. *Ei*, item vs. 21 21. *δὶς ὑπερ* | $\overline{\Theta H}$ A(B[1]), *ὑπὸ* corr. B[2]S, *ΡΘΗ Co* 22. 23. *ἴση — ἀπὸ ΗΘ* om. *Ei* 24. *τὸ ἄρα* — p. 380, 7. *ὑπὸ ΚΘΗ*] pro his sic scribere ausus est *Ei*: *τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον*

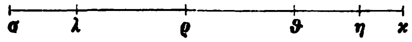
Sed si angulus $\zeta\eta\vartheta$ obtusus sit, ut est in altera figura, rursus fit $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2 = \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa$ hac ratione. Quoniam *propter elem. 2, 12* est



$\zeta\vartheta^2 = \zeta\eta^2 + \eta\vartheta^2 + 2\vartheta\eta \cdot \eta\varkappa$, est igitur $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2 = \eta\vartheta^2 + \vartheta\eta \cdot \eta\varkappa$. Sed propter elem. 2, 3 est $\eta\vartheta^2 + \vartheta\eta \cdot \eta\varkappa = \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa$; ergo $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2 = \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa$.

Et quia utique $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2$ minus est quam $2\zeta\eta^2$ (*nam propter elem. 1, 20 est* $2\zeta\eta > \zeta\vartheta$), apparet superficiem, quam rectae $\alpha\gamma$ $\gamma\delta$ $\delta\varepsilon$ $\varepsilon\zeta$ $\zeta\eta$ efficiunt (*quae aequalis est circulo, cuius radius* $\alpha\eta$, *unà cum circulo, cuius radii quadratum aequat* $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2$), minorem esse circulo, cuius radius $\alpha\eta$, unà cum duobus circulis, quorum radius est $\zeta\eta$.

XXVII (8). *Sequitur alterum quod supra distulimus:* esse $2\varrho\eta \cdot \eta\vartheta + \eta\vartheta \cdot \vartheta\varkappa = (\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2$.



Ponatur $\varrho\sigma = \eta\varrho$, et $\varrho\lambda = \vartheta\varrho$; restat igitur $\vartheta\eta = \lambda\sigma$. Iam quia est $\varrho\eta \cdot \eta\vartheta = \varrho\vartheta \cdot \vartheta\eta + \eta\vartheta^2$, ergo etiam $2\varrho\eta \cdot \eta\vartheta = 2\varrho\vartheta \cdot \vartheta\eta + 2\eta\vartheta^2$. Sed est $\varrho\eta = \varrho\sigma$, et $\varrho\vartheta = \varrho\lambda$; ergo $\sigma\eta \cdot \eta\vartheta = \lambda\vartheta \cdot \vartheta\eta + 2\eta\vartheta^2$. Commune addatur $\varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta$; iam quia est

---

ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΡΘΗ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΗΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ· καὶ ἔστι τὸ μὲν δὶς ὑπὸ ΡΘΗ, ἢ ΛΘΗ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΣΘΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΣΘΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΣΚ ΘΗ· τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ 24. *ἄρα ὑπὸ* CΘΗ ABS, corr. *Co* [τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΗΣΛ] μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΗΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ τῷ ὑπὸ ΛΗΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τῷ ὑπὸ ΗΘ ΛΣ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΣΗΘ, ὅπερ ἐστὶν τὸ δὶς ὑπὸ ΡΗΘ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ.

50 κη' (θ'). Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Γ Δ· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ ΑΔ καὶ τῆς ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ.

Τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, τῇ δὲ ΑΓ ἡ ΑΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ διὰ τὸ γ' θεώρημα τοῦ β' στοιχείων, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΓΒ. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΖΓΒ (διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΖΓ τῆς ΓΑ)· καὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΒ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΓΒ ΕΖ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓ ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΕΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ (τὸ γὰρ ὑπὸ ΕΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΒΓ διὰ τὸ αὐτὸ στοιχείων)· καὶ τὸ ὑπὸ ΕΒΓ ἄρα, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ ΑΔ καὶ τῆς ΒΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ, ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ [ὥστε τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΔ καὶ τῆς ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ].

---

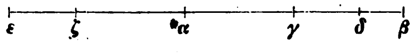
1. τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΗΣΛ interpolatori tribuit *Hu* 1. 2. τουτ' ἔστιν ἡ ὑπὸ ΚΗΘ A(BV), τουτέστιν τὸ ὑπὸ κηθ S, corr. *Hu* auctore *Co* 4. τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ *Co* pro τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ 6. ὑπὸ ΗΘ ΛΕ ἴση AB[1], σ super ε corr. B[2], ὑπὸ ηθ λθ ἴσον S 7. τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ *Co* pro τοῦ ὑπὸ ΚΗ ΘΗ 9. ΚΗ A[1] in marg. (BS), θ' add. *Hu* 10. τὰ ΓΔ A, distinx. BS 11. δὶς ὑπὸ ΑΒΓ *Ei* 12. Κείσθω τῇ μὲν ΑΔ ἴση *Ei* auctore *Co* 13. οὖν S, εἰ AB 15. στοιχείων *Hu*

$$\sigma\eta \cdot \eta\vartheta + \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta = \sigma\eta \cdot \eta\vartheta + \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta + \eta\vartheta^2$$
$$= (\sigma\eta + \varkappa\eta)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2$$
$$= (\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2,$$

est igitur

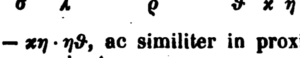
$(\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2 = \lambda\vartheta \cdot \vartheta\eta + 2\eta\vartheta^2 + \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta$. Sed est
$\lambda\vartheta \cdot \vartheta\eta + \eta\vartheta^2 = \lambda\eta \cdot \eta\vartheta$, et
$\eta\vartheta^2 = \eta\vartheta \cdot \lambda\sigma$, *itaque*
$\lambda\eta \cdot \eta\vartheta + \eta\vartheta \cdot \lambda\sigma = \sigma\eta \cdot \eta\vartheta$, id est
$= 2\varrho\eta \cdot \eta\vartheta$; ergo
$(\eta\varrho + \varrho\varkappa)\eta\vartheta + \eta\vartheta^2 = 2\varrho\eta \cdot \eta\vartheta + \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta$ *).

XXVIII (*9*). *Sit* recta $\alpha\beta$, et in ea quaelibet puncta γ Prop. 26
δ; dico esse $(\beta\alpha + \alpha\delta)\gamma\beta + \gamma\beta^2 = 2\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\delta$ **).



Ponatur $\alpha\varepsilon = \alpha\delta$, et $\alpha\zeta = \alpha\gamma$; restat igitur $\varepsilon\zeta = \gamma\delta$. Iam quia propter elem. 2, 3 est
$\alpha\beta \cdot \beta\gamma = \alpha\gamma \cdot \gamma\beta + \gamma\beta^2$, est igitur
$2\alpha\beta \cdot \beta\gamma = 2\alpha\gamma \cdot \gamma\beta + 2\gamma\beta^2$, id est (quia $\zeta\gamma = 2\gamma\alpha$, ideoque $2\alpha\gamma \cdot \gamma\beta = \zeta\gamma \cdot \gamma\beta$)
$= \zeta\gamma \cdot \gamma\beta + 2\gamma\beta^2$. Commune addatur $\gamma\beta \cdot \varepsilon\zeta = \beta\gamma \cdot \gamma\delta$; ergo est (*quia* $\zeta\gamma \cdot \gamma\beta + \gamma\beta \cdot \varepsilon\zeta = \varepsilon\gamma \cdot \gamma\beta$)
$2\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\delta = \varepsilon\gamma \cdot \gamma\beta + 2\gamma\beta^2$. Sed quia propter elem. l. c. est $\varepsilon\gamma \cdot \gamma\beta + \gamma\beta^2 = \varepsilon\beta \cdot \beta\gamma$, id est $= (\beta\alpha + \alpha\delta)\gamma\beta$, est igitur
$$2\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \beta\gamma \cdot \gamma\delta = (\beta\alpha + \alpha\delta)\gamma\beta + \gamma\beta^2.$$

*) Alterum huius theorematis casum, si punctum $\varkappa$ inter ϑ η cadat, brevitatis causa omisit scriptor.

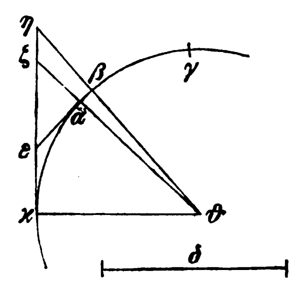


Neque quidquam differt, nisi quod pro $\sigma\eta \cdot \eta\vartheta + \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$ ponendum est $\sigma\eta \cdot \eta\vartheta - \varkappa\eta \cdot \eta\vartheta$, ac similiter in proxima parenthesi $(\sigma\eta - \varkappa\eta)$; reliqua autem conveniunt.

**) Si eisdem litteris atque in superiore lemmate utamur, haec propositio sic sonet: esse $(\eta\varrho + \varrho\varkappa)\vartheta\varkappa + \vartheta\varkappa^2 = 2\,\varrho\varkappa \cdot \varkappa\vartheta + \varkappa\vartheta \cdot \vartheta\eta$.

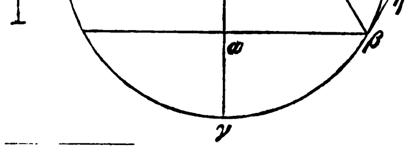
auctore *Co* pro στοιχείου, item vs. 24 pro στοιχεῖον ἐστιν τῶν A(B), corr. S 17. 18. καὶ τὸ S, καὶ τοῦ AB 19. 20. ὅ ἐστι S *Ei* 20. τὸ ὑπὸ *ΒΓΔ* et τὸ ἄρα ὑπὸ *ΕΓΒ* *Ei* 26. τῆς *ΒΑΔ* *Ei* 27. ὥστε — 29. ὑπὸ *ΒΓΔ* del. *Co*

51 κθ΄ (ι΄). Ἔστω τις κύκλου περιφέρεια ἡ ΚΑΒΓ καὶ εὐθεῖα ἡ Δ· ὅτι δυνατόν ἐστιν ἀπειραχῶς ἀπολαβεῖν τὴν ΚΑ περιφέρειαν μέρος οὖσαν τῆς ΚΒΓ, ὅπως, ἐφαπτομένων ἀχθεισῶν τῶν ΚΕ ΑΕ, ἐλάσσονες ὦσιν αὗται τῆς Δ.



Ἔστω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΚΗ ἴση τῇ Δ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ ΗΒΘ. τέμνοντες δὴ τὴν ΚΒΓ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες λείψομέν τινα περιφέρειαν ὡς τὴν ΚΑ ἐλάσσονα τῆς ΚΑΒ. καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος ἡ ΑΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΚΕ, καὶ ἔσται γεγονὸς τὸ ζητούμενον· ἡ γὰρ διὰ τῶν Θ Α ἐκβάλλεται ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ αἱ ΚΕΑ τῆς ΚΖ ἐλάσσονές εἰσιν διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ΖΕ ἑκατέρας τῶν ΑΕ ΕΚ, ὀρθῆς οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΑΕ, καὶ πολὺ μᾶλλον τῆς Δ ἴσης ὑποκειμένης τῇ ΚΗ.

52 λ΄ (ια΄). Παντὸς τμήματος σφαίρας ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶν τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος.



Ἔστω γὰρ τμῆμα σφαίρας, οὗ πόλος μέν ἐστιν τὸ Κ σημεῖον, ἐκ πόλου δὲ ἡ ΚΒ, καὶ ὁ διὰ τῶν Κ Β μέγιστος, οὗ διάμετρος ἡ ΚΓ, ἐφ᾽ ἣν κάθετος ἡ ΒΑ· λέγω

1. $\overline{K\Theta}$ A[1] in marg. (BS), ι΄ add. *Hu* ἡ $\overline{AKB\Gamma}$ AB, ἡ ΚΒΓ *Co*, corr. S 5. Ἔστω *Co* pro ὡς 6. ἴση τῇ idem pro ἐλάσσων τῆς 7. ἡ $\overline{\Theta BH}$ ABS, corr. *Co* 8. ἡμίσειαν S, L΄ AB 11. τὴν ΚΑ *Co* pro τὴν $\overline{K\Delta}$ 15. τῶν $\overline{\Theta A}$ A, distinx. B, τῶν $\bar{\vartheta}$ $\bar{\varepsilon}$ S *Ei* 17. τῆς ὑπὸ $\overline{\Theta Z A}$ ABS, corr. *Co* πολ*υ A[2] ex πολλυ 19. $\bar{\lambda}$ A[1] in marg. (BS), ια΄ add. *Hu* 26. τὸ $\overline{KC}$ σημεῖον AB, corr. S 26. 27. εκπολου

XXIX (*10*). Sit quaedam circuli circumferentia $\varkappa\alpha\beta\gamma$, et Prop. 27
recta δ; dico fieri posse, ut infinite abscindatur circumferentia $\varkappa\alpha$, quae circumferentiae $\varkappa\alpha\beta\gamma$ pars ita existat, ut, si tangentes $\varkappa\varepsilon$ $\alpha\varepsilon$ ducantur, hae minores sint quam δ.

Sit enim tangens $\varkappa\eta$ aequalis ipsi δ, et ad centrum *ducatur* recta $\eta\beta\vartheta$. Bifariam igitur circumferentiam $\varkappa\beta\gamma$ secantes, et *rursus* dimidiam bifariam, et id semper facientes relinquemus aliquam circumferentiam, velut $\varkappa\alpha$, minorem quam $\varkappa\alpha\beta$. Et ducatur ex α tangens $\alpha\varepsilon$; ergo est $\alpha\varepsilon = \varkappa\varepsilon$*), et factum erit id quod quaerimus; nam recta $\vartheta\alpha$ producta *cadit inter puncta* $\varkappa$ η (sitque sectionis punctum ζ), et $\varkappa\varepsilon + \varepsilon\alpha$ minores sunt quam $\varkappa\zeta$, propterea quod $\zeta\varepsilon$ maior est quam $\alpha\varepsilon$, quia angulus $\zeta\alpha\varepsilon$ rectus est, *itaque* $\zeta\varepsilon + \varepsilon\alpha$, *id est* $\varkappa\zeta$, *maior quam* $2\varepsilon\alpha$, *id est* $\varkappa\varepsilon + \varepsilon\alpha$. Ergo $\varkappa\varepsilon + \varepsilon\alpha$ multo minores sunt quam $\varkappa\eta$, quae aequalis supposita est ipsi δ.

XXX (*11*). Omnis segmenti sphaerae curva superficies Prop. 28
aequalis est circulo, cuius radius aequalis est rectae quae ex polo segmenti *ad circumferentiam baseos ducitur*[1]).

Sit enim sphaerae segmentum, cuius polus est punctum $\varkappa$, et ex polo[2]) *ducatur* $\varkappa\beta$, et per puncta $\varkappa$ β maximus *circulus*, cuius diametrus $\varkappa\gamma$, in eamque perpendicularis $\beta\alpha$;

*) Conf. supra p. 371 adnot. *.

1) Idem Archimedes primum de segmento, quod minus est hemisphaerio, tum de eo, quod maius est, demonstrat de sphaer. et cyl. 1, 48. 49; de hemisphaerio autem valere voluit propositionem suam 35, quae est de tota sphaera. Sed statim apparet Archimedis enuntiatum, ex quo hemisphaerii superficies aequalis est duobus maximis in sphaera circulis, congruere cum hac Pappi propositione, quoniam, si punctum α sit centrum sphaerae, fit $\varkappa\beta^2 = 2\,\alpha\beta^2$. Et conf. hanc propos. extr.

2) *Τὴν ἐκ πόλου* Pappus dicit cum Theodosio in sphaeric. 1, 16. 17 cet.; nam apud eundem 1 def. 5 *κύκλου πόλος ἐν σφαίρᾳ ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν*. Archimedes autem polum *κορυφὴν τοῦ τμήματος*, et, quam *τὴν ἐκ πόλου* Theodosius aliique, eam appellat *τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένην τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας*.

A² ex *εκπολο*, *ἐκ πόλου* BS, *ἡ ἐκ τοῦ πόλου* Ei   28. *τῶν* $\overline{KB}$ A, distinx. BS ὅτι σφαιρικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος, οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ.

Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἄνισα ταῦτα, καὶ πρότερον μείζων ἡ τοῦ τμήματος ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν νοείσθω ἐλάσσων κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ Θ, ὥστε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος μείζονα εἶναι τῶν δύο κύκλων, οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ καὶ οὗ διάμετρος ἡ Θ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΚΒ περιφέρεια εἰς ἴσας ὁποσασοῦν, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν, ὡς καταγέγραπται, ὥστε ἑκάστην αὐτῶν ἐλάσσονα εἶναι τῆς δυναμένης τὸ η΄΄ τοῦ ἀπὸ Θ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν προγέγραπται. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστιν τὸ ἀπὸ Θ τοῦ ὀκτάκις ἀπὸ ΗΒ, καὶ ὁ περὶ διάμετρον ἄρα τὴν Θ κύκλος μείζων ἐστὶν δύο κύκλων ὧν ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΗΒ. οὗτοι δὲ οἱ δύο κύκλοι καὶ ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ, ὡς προδέδεικται τῷ ϛ΄ θεωρήματι, μείζονές εἰσιν τῆς γινομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανείας, ἥτις περιγέγραπται περὶ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας· ἔσται ἄρα αὕτη ἡ ἐπιφάνεια, καὶ πολὺ μᾶλλον ἡ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, ἐλάσσων κύκλων οὗ τε ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ καὶ οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ Θ. ἀλλὰ καὶ μείζων ὑπόκειται, ὅπερ ἄτοπον.

53 λα΄ (ιβ΄). Ἔστω δὲ μείζων ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΓΚΑ μείζων ἐστὶν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. νοείσθω δὲ μεταξὺ αὐτῶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ Θ ΚΑ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΓ τῆς Θ· ἔστω τῇ Θ

1. ἡ ante σφαιρικὴ add. *Ei* 5. τῇ ὑπεροχῆι A, τῇ ὑπεροχῇ B, corr. S 8. τοῦ ante κέντρου add. B *Ei* 11. τὸ $\overline{H}$ A, τὸ $\overline{\eta}$ BS 15. ἡ ἐκ] ἐκ ABS, ἡ ἐκ τοῦ *Ei*, item proximo vs. 17. ϛ΄ *Hu*, $\overline{H}$ A, $\overline{\eta}'$ B, ὀγδόῳ S *Ei* (*in* 25. *huius Co*) εἰσιν *Ei* auctore *Co* pro εἶναι 17. 18. τῆς γινομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων om. *Ei* 20. οὔτε AB, corr. Paris. 2368 V (οὗ τὲ S) ἡ (ante ἐκ) add. *Hu* 20. 21. ἐκ τοῦ κέντρου *Ei* 23. $\overline{\lambda\alpha}$ A[1] in marg. (BS), ιβ΄ add. *Hu* ἡ ἐκ] ἐκ ABS, ἡ ἐκ τοῦ *Ei* 25. τὸ ὑπὸ ΚΓΑ AB, corr. S 27. post μεταξὺ repe-

dico sphaericam superficiem segmenti, cuius basis est circulus radio $\alpha\beta$, et vertex $\varkappa$, aequalem esse circulo, cuius radius $\varkappa\beta$.

Si enim fieri possit, haec sint inaequalia, ac primum maior sit segmenti superficies, et differentiâ, *quae sit inter segmenti superficiem et circulum radio* $\varkappa\beta$, minor fingatur circulus, cuius diametrus ϑ, ita ut superficies segmenti maior sit circulo, cuius radius $\varkappa\beta$, unâ cum circulo, cuius diametrus ϑ; et circumferentia $\varkappa\beta$ dividatur in quotcunque aequales partes, et tangentes, quemadmodum figura ostendit, ita ducantur, ut unaquaeque earum, *velut* $\eta\beta$, minor sit eâ rectâ, cuius quadratum aequat $\frac{1}{8}\vartheta^2$ (hoc enim fieri posse superiore *lemmate* demonstratum est). Iam quia est $\vartheta^2 > 8\eta\beta^2$, *id est* $> 2\,(2\eta\beta)^2$, ergo etiam circulus, cuius diametrus ϑ, maior est duobus circulis, quorum radius $\eta\beta$. Sed hi duo circuli unâ cum circulo, cuius radius est $\varkappa\beta$, ut supra theoremate 6 (*propos. 25*) demonstravimus, maiores sunt superficie segmento sphaerae circumscriptâ, quam tangentes efficiunt[3]; haec igitur superficies, et multo magis segmenti sphaerae superficies minor erit circulo, cuius radius est $\varkappa\beta$, unâ cum circulo, cuius diametrus est ϑ. At ex hypothesi *eadem superficies* maior est, quod quidem absurdum.

XXXI (*12*). Sed maior sit circulus, cuius radius est $\varkappa\beta$, segmenti sphaericâ superficie; ergo circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\gamma\varkappa \cdot \varkappa\alpha$ *), maior est curvâ segmenti superficie. Sed fingatur inter has *superficies*[4]) circulus, cuius radius aequat rectangulum $\vartheta \cdot \varkappa\alpha$; ergo est

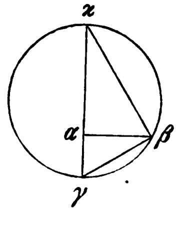
3) Ex ipsa propos. 25 superficies, quam tangentes efficiunt, aequalis est circulo, cuius radius $\varkappa\beta$, unâ cum circulo, cuius radii quadratum aequat id quod illic est $\frac{1}{2}\zeta\vartheta^2$. Sed cum illic sit $2\,\eta\zeta^2 > \frac{1}{2}\zeta\vartheta^2$, hoc igitur loco efficitur id quod supra perscriptum est.

*) Est enim propter elem. 6, 8 $\gamma\varkappa : \varkappa\beta = \varkappa\beta : \varkappa\alpha$, id est $\varkappa\beta^2 = \gamma\varkappa \cdot \varkappa\alpha$ (*Co*).

4) Scilicet inter circulum, qui superficiei segmenti aequalis est, et inter circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\gamma\varkappa \cdot \varkappa\alpha$, id est, cuius radius est $\varkappa\beta$.

---

tunt δὲ AB³, del. B¹S   ἡ S, om. AB   28. *τὸ ὑπὸ Θ ΚΑ Ei* pro τὸ ὑπὸ $\overline{ΔΚΑ}$ ἔσται ABS, corr. *Ei* auctore *Co* ἴση ἡ ΓΟ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΚΟΒ περιφέρεια εἰς περιφερείας ἴσας ὁσασδήποτε, ὧν ἑκάστη ἐλάσσων ἔστω τῆς ΚΛΟ, ὡς ἔστιν πρὸ ἑνός, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ ΛΜ ΜΝ ΝΒ. ἡ δὴ ὑπὸ τούτων γινομένη ἐπιφάνεια [κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΚΛ στροφῆς ἀποκατάστασιν] περιέχεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας [καὶ τὴν αὐτὴν αὐτῷ βάσιν ἕξει] καὶ ἔστιν ἴση μὲν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται, ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΛ, τὸ ὑπὸ ΛΓ ΚΛ διὰ τὸ δʹ θεώρημα, ἐλάσσων δὲ τῆς σφαιρικῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας· πολλῷ ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΟΓ ΚΛ ἢ τὸ ὑπὸ Θ ΚΛ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς σφαιρικῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας. ἀλλὰ καὶ μείζων ὑπόκειται μεταξὺ ὧν τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κύκλου οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΒ, ὅπερ ἀδύνατον· ἴσα ἄρα ἐστὶν τὰ ζητούμενα.

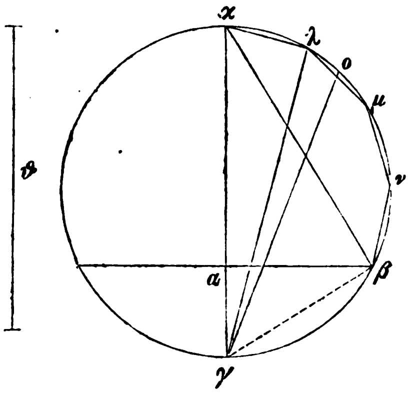


Καὶ δῆλον ὡς, ἐὰν τὸ Λ κέντρον ᾖ, γίνεται τὸ τμῆμα ἡμισφαίριον, καὶ ἔσται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὅλης ἴση κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΚΓ, ἢ καὶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων, ὁποῖα ἂν ᾖ, τὸ αὐτὸ συναχθήσεται.

54 λβʹ (ιγʹ). Ἐὰν ὦσιν γʹ εὐθεῖαι ὡς αἱ Α Β Γ, ὁ κῶνος

1. ἡ ΓΟ *Co* pro ἡ ΓΘ 2. 3. τῆς ΚΛΟ idem pro τῆς ΚΛΘ 4. δὴ AB, δὲ S *Ei* 4. 5. κατὰ — ἀποκατάστασιν interpolatori tribuit *Hu* 5. στροφὴν, deleto ἀποκατάστασιν, *Ei* 6. 7. καὶ τὴν — ἕξει interpolatori tribuit *Hu* 6. αὐτῷ om. *Co Ei* 7. μὲν om. *Ei* 8. τὸ ὑπὸ ΛΚ ΚΛ ABS, corr. *Co* 9. δʹ *Hu*, ἐ A, ε B, πέμπτον S *Ei* (*ex 23. huius Co*) 10. πολλῷ — 12. ἐπιφανείας om. Paris. 2368 S *Ei* 10. ἡ ἐκ] ἐκ AB1, ἐκ τοῦ B3, ἡ ἐκ τοῦ V 11. ἢ V, ἡ AB, τουτέστιν voluit *Co* τὸ ὑπὸ ΘΚΛ ABV, distinx. *Co* 12. 13. ἐπιφανείας — τμήματος bis scripta in A 13. ὧν om. S, unde *Ei* ὑπόκειται γὰρ μεταξὺ τοῦ cet. ἡ ἐκ] ἐκ ABS, ἡ ἐκ τοῦ *Ei* 16. ὡς ἐὰν *Ei*, ὥσο*ν A2 ex ὥσων, ut videtur, ὡς οὖ B, ὡς ὂν S, ὡς ἂν *Co* ᾖ *Co*, η A, ἠ B, ἢ S 19. οὗ ἡ ἐκ τοῦ *Co*, οὖση ἐκτου A, οὖση ἐκ τοῦ B cod. *Co*, οὗ ἴση ἐκ τοῦ S κέντρου add. S *Co*, om. AB cod. *Co* ἢ om. *Ei* 22. λβ A1 in marg. (BS), ιγʹ add. *Hu* Γ A, τρεῖς BS αἱ ΑΒΓ A, distinx. BS

$\vartheta < \varkappa\gamma$. Sit $\gamma o = \vartheta$, et dividatur circumferentia $\varkappa o \beta$ in quotcunque aequales partes, quarum unaquaeque minor sit



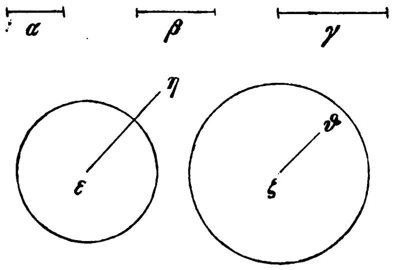
quam $\varkappa\lambda o$, ut proxime (*propos.* 27) *traditum* est, et iungantur $\varkappa\lambda$ $\lambda\mu$ $\mu\nu$ $\nu\beta$. Quam igitur hae rectae superficiem efficiunt, ea segmenti superficie continetur et aequalis est circulo, cuius radii quadratum, iunctâ $\gamma\lambda$, aequat rectangulum $\lambda\gamma \cdot \varkappa\alpha$ propter theorema 4 (*propos.* 23), eademque minor est quam sphaerica segmenti superficies; multo igitur circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $o\gamma \cdot \varkappa\alpha$, id est $\vartheta \cdot \varkappa\alpha$, minor est quam sphaerica segmenti superficies. At ex hypothesi *idem circulus* maior est, quoniam est inter segmenti *superficiem* et circulum, cuius radius $\varkappa\beta$ (*adnot.* 4), quod quidem fieri non potest. Ergo hae, de quibus quaeritur, *superficies* aequales sunt.

Et apparet primum, si punctum α centrum *sphaerae* sit, segmentum esse hemisphaerium, tum, *si maius semper fiat segmentum, tandem rectam* $\varkappa\beta$ *congruere cum* $\varkappa\gamma$ *diametro, itaque* totius sphaerae superficiem aequalem esse circulo, cuius radius est $\varkappa\gamma$; vel idem etiam ex summa segmentorum, qualiacunque sunt, concludetur, *nam utique totius sphaerae superficies aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat* $\varkappa\beta^2 + \beta\gamma^2$, *id est cuius radius est* $\varkappa\gamma$**).

XXXII (*13*). Si sint tres rectae, velut α β γ, conus basim Prop. 29

**) His verbis, quae nos partim e Graecis convertimus partim coniectura supplevimus, Pappus significat theorema suum, ut de quovis sphaerae segmento, ita singulariter de hemisphaerio, quin etiam de tota sphaera valere, ergo ab ipso in unum comprehensa esse ea quae Archimedes (supra adnot. 1) sub tribus theorematis disposuit.

οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ Α Β, ὕψος δὲ ἡ Γ, ἴσος ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ Β Γ, ὕψος δὲ ἡ Α.



Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κύκλοι οἱ Ε Ζ, καὶ τοῦ μὲν Ε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ Α Β, τοῦ δὲ Ζ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ Β Γ, ὕψος δὲ τοῦ μὲν Ε κώνου ἔστω τὸ ΕΗ ἴσον τῇ Γ, τοῦ δὲ Ζ ὕψος τὸ ΖΘ ἴσον ἔστω τῇ Α. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς Γ, τουτέστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΕΗ, τὸ ὑπὸ Α Β πρὸς τὸ ὑπὸ Β Γ [τουτέστιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ε πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ζ], τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ Ε κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΕΗ, τῷ κώνῳ οὗ βάσις μὲν ὁ Ζ κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ΖΘ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

55 λγʹ (ιδʹ). Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ μενούσης τῆς ΒΓ περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθεστάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἐν τῇ στροφῇ γινομένῃ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος.

Ἤχθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ κάθετοι ἀπὸ τῶν Α Γ αἱ ΓΕ ΑΔ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ Δ ὀρθῇ τῇ Ε ἴσῃ, κοινὴ

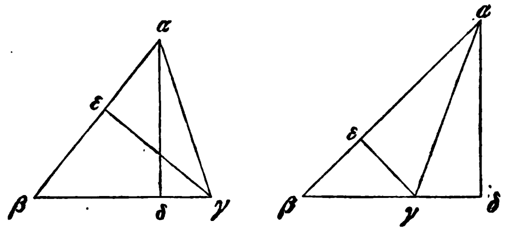
---

2. ὑπὸ $\overline{AB}$ et 3. ὑπὸ $\overline{B\Gamma}$ A Paris. 2368 S, distinx. BV 6. οἱ $\overline{EZ}$ A, distinx. BS 9. 10. τὸ ὑπὸ Α Β — δυνάσθω add. *Co* 11. ὑπὸ $\overline{B\Gamma}$ AS, distinx. B 12. κώνου *Hu* pro κύκλου (proprie dicenda erant τοῦ κώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ Ε κύκλου) 13. τῇ Γ *Ei*, τῶι $\overline{\Gamma}$ ABV, om. Paris. 2368 S 15. τῇ Α *Ei* pro τῶι $\overline{A}$ 16. ὑπὸ $\overline{AB}$ — ὑπὸ $\overline{B\Gamma}$ ABS, distinx. *Hu* 17. 18. τουτέστιν — τοῦ Ζ interpolatori tribuit *Hu*, δυνάμει post Ε et post Ζ add. *Ei*, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ζ coni. *Co* 18. πρὸς τὴν $\overline{Z}$

habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha \cdot \beta$, altitudinem autem γ, aequalis est cono basim habenti circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\beta \cdot \gamma$, altitudinem autem α.

Exponantur enim duo circuli $\varepsilon\ \zeta$, et circuli ε radii quadratum aequet rectangulum $\alpha \cdot \beta$, circuli autem ζ rectangulum $\beta \cdot \gamma$, et coni ε altitudo sit $\varepsilon\eta = \gamma$, altitudo autem coni ζ sit $\zeta\vartheta = \alpha$. Iam quia est $\zeta\vartheta : \varepsilon\eta = \alpha : \gamma = \alpha \cdot \beta : \beta \cdot \gamma$, id est $=$ circ. ε : circ. ζ, conus igitur, cuius basis est circulus ε et altitudo $\varepsilon\eta$, aequalis est cono, cuius basis est circulus ζ et altitudo $\zeta\vartheta$, quoniam bases e contrario altitudinibus respondent [1]).

XXXIII (*14*). *Sit* triangulum $\alpha\beta\gamma$, et manente rectā Prop. 30
$\beta\gamma$ triangulum convertatur in eundemque locum restituatur; dico id quod ita efficitur solidum aequale esse cono, cuius basis aequalis est conicae superficiei ab $\alpha\beta$ in conversione effectae, altitudo autem perpendicularis a γ ad $\alpha\beta$.



Ducantur enim a punctis α γ ad $\beta\gamma$ $\alpha\beta$ perpendiculares $\alpha\delta$ $\gamma\varepsilon$ *). Quoniam anguli δ ε, ut recti, aequales sunt et an-

1) Secundum elem. 6 def. 2 *ἀντιπεπονθότα σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγων ὅροι ὦσιν.* Ergo quia supra demonstratum est $\zeta\vartheta : \varepsilon\eta =$ circ. ε : circ. ζ, sive $\alpha : \gamma = \alpha \cdot \beta : \beta \cdot \gamma$, propter elem. 12, 15 coni, de quibus agitur, aequales sunt.

*) Figurae adscriptae duos theorematis casus exhibent, quibus accedunt tertius (secundo e contraria parte respondens), si angulus $\alpha\beta\gamma$ obtusus sit, quartus, si angulus $\beta\alpha\gamma$ obtusus sit (qui casus in proximo lemmate occurrit), denique tres alii simpliciores, si aut angulus $\beta\alpha\gamma$, aut $\alpha\gamma\beta$, aut $\alpha\beta\gamma$ rectus sit. Quos casus et enumerare et figuris illustrare supersedit scriptor, quia nullus peculiarem difficultatem habet.

ABS, corr. *Ei* auctore *Co* 22. $\overline{\mathit{\Delta\Gamma}}$ A[1] in marg. (BS), *ιδ'* add. *Hu* 25. 26. *γινομένη κωνικὴ ἐπιφανεια* A, *γιν. κων. ἐπιφάνεια* BS, corr. *Ei* auctore *Co* 27. *ἀπὸ τῶν* $\overline{\mathit{\Delta\Gamma}}$ A, distinx. BV, *ἀπὸ τῶν* $\overline{\alpha\beta}$ Paris. 2368 (distinx. S) 28. *ὀρθὴ τῆι* $\overline{E}$ A, corr. BS *δὲ ἡ Β, ἰσογώνιον γίνεται τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΒΓ πρὸς ΓΕ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, τὸ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΕ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΓΕ, ἴσος ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ (διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι πάλιν τὰς βάσεις αὐτῶν τοῖς ὕψεσιν). καὶ ἔστι τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐν τῇ στροφῇ στερεὸν ἴσον τῷ κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ· τὸ αὐτὸ ἄρα στερεὸν ἴσον ἐστὶν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΔ, ὕψος δὲ τὴν ΓΕ κάθετον. ἀλλ' ὁ μὲν κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἐν τῇ στροφῇ γινομένῃ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ διὰ τὸ ιε' πάλιν Ἀρχιμήδους θεώρημα [παντὸς γὰρ κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον ἀνάλογον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου]. ἐὰν ἄρα μενούσης τῆς ΒΓ περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἐν τῇ στροφῇ γινομένῃ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος.*

56 *λδ'* (ιε'). *Ἔστω πάλιν τρίγωνον τὸ ΑΓΖ καὶ τυχοῦσα διήχθω ἡ ΓΒ, ἧς μενούσης περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ*

---

1. 2. *ΒΓΕ τριγώνω* A[1] ex *ΒΓΕ τρίγωνον* 7. *ἡ ΓΕ Co* pro *ἡ Γ* 11. *ἡ* ante *βάσις* add. ABS, del. *Ei* 13. *τῷ* ante *κώνῳ* om. *Ei* *μὲν* om. S *Ei* 16. *γινομένη κωνικη επιφανεια* A, *γιν. κωνικὴ ἐπιφάνεια* B, corr. S *ιε' Hu*, *ΙΔ* AB *Co*, *ἑνδέκατον* S *Ei* (ergo hic Archimedem evolvere non duxit operae pretium) 17. *παντὸς* — 21. *κώνου* interpolatori tribuit *Hu* 19. aut *μέσον λόγον ἔχει* (sic *Ei*), aut *μέση ἀνάλογόν ἐστιν* scribere debuit interpolator 21. *ἐὰν ἄρα* S[s] *Co*, *εν αρα* A, *ἓν ἄρα* B, *|ἐὰν γὰρ* Paris. 2368 23. *κώνου* AB, corr. S 24. 25. *γινομένη κωνικὴ ἐπιφανεια* A, *γινομένη κωνικῇ ἐπι-*

gulus β communis, triangulum igitur $\alpha\beta\delta$ triangulo $\gamma\beta\varepsilon$ simile est, itaque

$$\alpha\beta : \alpha\delta = \gamma\beta : \gamma\varepsilon. \text{ Sed est } \alpha\beta : \alpha\delta = \alpha\beta \cdot \alpha\delta : \alpha\delta^2; \text{ ergo}$$
$$\alpha\beta \cdot \alpha\delta : \alpha\delta^2 = \gamma\beta : \gamma\varepsilon;$$

ergo *propter superius lemma* conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\beta\alpha \cdot \alpha\delta$, et altitudinem $\gamma\varepsilon$, aequalis est cono basim habenti circulum, cuius radius est $\alpha\delta$, et altitudinem $\beta\gamma$ (quia rursus bases altitudinibus e contrario respondent). Et solidum, quod a triangulo $\alpha\beta\gamma$ in conversione *circa axem* $\beta\gamma$ efficitur, aequale est cono basim habenti circulum, cuius radius est $\alpha\delta$, et altitudinem $\beta\gamma$**); ergo idem solidum aequale est cono basim habenti circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\beta\alpha \cdot \alpha\delta$, et altitudinem $\gamma\varepsilon$, *id est* perpendicularem *a* γ *ad* $\alpha\beta$. Sed rursus (*ut supra propos. 23*) propter Archimedis theorema 15 hic circulus aequalis est conicae superficiei quam recta $\alpha\beta$ in conversione *circa axem* $\beta\delta$ efficit[2]. Ergo, si manente rectâ $\beta\gamma$ triangulum $\alpha\beta\gamma$ convertatur in eundemque locum, unde moveri coeperit, restituatur, solidum ita effectum aequale est cono, cuius basis aequalis est conicae superficiei ab $\alpha\beta$ in conversione effectae, altitudo autem perpendicularis a γ ad $\alpha\beta$.

XXXIV (*15*). Sit rursus triangulum $\alpha\gamma\zeta$, et *extra triangulum* ducatur quaelibet recta $\gamma\beta$ *ita, ut productae* $\zeta\alpha$ *occurrat*[1], et rectâ $\gamma\beta$ manente triangulum *convertatur* in eun- Prop. 34

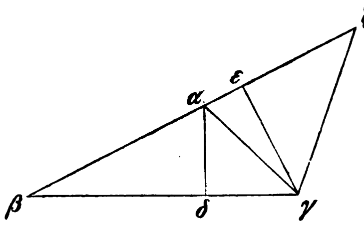
**) Hoc, sive angulus $\beta\alpha\gamma$ acutus, sive rectus, sive obtusus est, efficitur ex elem. 12, 14.

2) Similiter ac supra propos. 23 adnot. * ad Archimedis propos. 17 demonstravimus, verba Archimedis quae sunt de sphaer. et cyl. I, 15 sic fere mutare licet: *παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς, χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου.* Quo facto, quid Pappus citando hoc theoremate egerit, statim apparet.

1) Alter casus, si $\beta\gamma$ ipsi $\alpha\zeta$ parallela sit, proxima propositione additur.

φανεία (sic) B, corr. S 26. *ΛΔ* A[1] in marg. (BS), ιε′ add. *Hu*
27. ἡ add. *Ei*

αὐτὸ ἀποκαθεστάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος ἴσος τῇ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν στροφήν, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος.



Ἐκβεβλήσθω ἡ ΖΑ ἐπὶ τὸ Β· διὰ τὸ προδειχθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ἴση ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ΒΖΓ γινόμενον ὁμοίως ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΒΖ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΓΖ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κολούρου κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΑΖ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό [ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΖ].

57 λε' (ιϛ'). Ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΓ καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΓ ΑΔ· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ τριγώνου ἐν τῇ στροφῇ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΓΖ, ὕψος δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΖ, τουτέστιν τῆς ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ ΑΓ παραλληλογράμμου γινόμενος κύλινδρος ἴσος ἐστὶν κώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ τὴν τριπλασίαν τῆς ΔΓ, ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου γινόμενος κῶνος βάσιν μὲν ἔχει τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου μετὰ τοῦ ὑπὸ

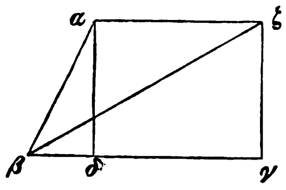
---

1. ὅτι om. S *Ei* 3. γινομενη ἐπιφανεια A, corr. BS κατὰ τὴν στροφὴν γινομένῃ ἐπιφανείᾳ *Ei* 7. τοῦ om. *Ei* 12. ην ποιω A, corr. BS 13. τοῦ ΒΖΓ *Co* pro τοῦ ΑΖΓ 16. τοῦ ΑΓΖ idem pro τοῦ ΛΓΖ 17. κολούρου] vide adnot. ad Lat. 18. τὸ αὐτό om. *Ei*, restituit et proxima ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΖ interpolatori tribuit *Hu* τοῦ Γ *Co* pro τοῦ ΓΕ 20. λε A[1] in marg. (BS), ιϛ' add. *Hu*

demque locum restituatur; dico id quod ita efficitur solidum aequale esse cono, cuius basis est circulus aequalis *conicae* superficiei ab $\alpha\zeta$ in conversione effectae, altitudo autem perpendicularis a γ ad $\alpha\zeta$.

Producatur $\zeta\alpha$ ad β, *et ducantur perpendiculares* $\gamma\varepsilon$ $\alpha\delta$; ergo propter superius *lemma* solidum, quod ab $\alpha\beta\gamma$ triangulo efficitur, aequale est cono, cuius basis aequalis est conicae superficiei ab $\alpha\beta$ effectae, altitudo autem perpendicularis a γ ad $\beta\alpha$; similiter solidum, quod a $\beta\zeta\gamma$ triangulo efficitur, aequale est cono, cuius basis aequalis est conicae superficiei a $\beta\zeta$ effectae, altitudo autem eadem; ergo *per subtractionem* 2) restat solidum ab $\alpha\gamma\zeta$ triangulo effectum aequale cono, cuius basis aequalis est superficiei conicae 3) ab $\alpha\zeta$ effectae, altitudo autem eadem.

XXXV (*16*). Sed sit $\beta\gamma$ ipsi $\alpha\zeta$ parallela, et ducantur perpendiculares $\alpha\delta$ $\zeta\gamma$; dico solidum, quod ab $\alpha\beta\zeta$ triangulo in conversione *circa axem* $\beta\gamma$ efficitur, aequale esse cono, cuius basis est circulus radio $\zeta\gamma$, altitudo autem dupla $\alpha\zeta$, id est dupla $\delta\gamma$. Prop. 32



Quoniam enim cylindrus, qui ab $\alpha\delta\gamma\zeta$ parallelogrammo efficitur, aequalis est cono basim habenti circulum radio $\alpha\delta$ (*sive* $\zeta\gamma$), altitudinem autem triplam $\delta\gamma$ (*elem. 12, 10. 14*), conus autem qui ab $\alpha\beta\delta$ triangulo efficitur, basim eandem, altitudinem autem $\beta\delta$ habet, solidum igitur, quod et ab

2) Subtrahi posse alterum conum ab altero sequitur ex Euclid. elem. 12, 11 (Archim. de sphaer. et cyl. 1, 17 lemm. 1).

3) Graecum κολούρου, id est coni detruncati, omisimus, ne languide addi necesse esset "praeter utramque basim". Atque aliis locis ipse scriptor hoc epitheto per se consentaneo abstinuit, quod forsitan interpolator huc intulerit.

---

22. *ἴση ἐστιν* A, corr. BS *κώνωι* A[2] ex *κοινῶι* 23. *ἡ ἐκ* B[1], *ἐκ* AB[3] S, *ἡ ἐκ τοῦ Ei* 27. *κύκλον — ἡ ΑΔ*] *τὴν* $\overline{ΑΔ}$ ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 28. τὸ ante *ὑπὸ τοῦ* add. ABV[1], del. Paris. 2368 SV[2]

τοῦ ΑΔΓΖ παραλληλογράμμου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως ὕψος ἔχοντι τὴν ΒΔ μετὰ τριῶν τῶν ΔΓ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ὑπὸ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου γινόμενος ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως κῶνος, ὕψος ἔχων τήν τε ΒΔ καὶ ἅπαξ τὴν ΔΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ ἢ τῆς ΑΖ.

58 *Ἔτι δὲ καὶ τοῦτο φανερὸν ὅτι τῇ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ, κυλινδρικῇ οὔσῃ, ἴσος ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως (τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν ιδʹ θεωρήματι περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου), ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν* κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται *τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΓΔ.*

59 *λϛʹ* (ιζʹ). *Ἐὰν μέντοι τὸ Β μεταξὺ ᾖ τῶν Δ Γ, εὐχερέστερον δείκνυται. ὁ γὰρ ὑπὸ τοῦ ΑΔΓΖ παραλληλογράμμου γινόμενος κύλινδρος, τοῖς ὑπὸ τῶν ΑΒΔ ΖΒΓ τριγώνων γινομένοις κώνοις τὴν αὐτὴν ἔχων [αὐτοῖς] βάσιν καὶ ὕψος τὴν ΔΓ, ὑπερέχει αὐτῶν τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως κώνῳ ὕψος ἔχοντι τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ τριγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν τῷ αὐτῷ κώνῳ, ὅπερ:* ~

60 *λζʹ* (ιηʹ). *Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὰς ΑΔ ΔΓ κάθετοι ἴσαι, καὶ διήχθω τις ἡ ΒΕ, καὶ μενούσης αὐτῆς περιενεχθὲν τὸ τετράπλευρον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθεστάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ τετραπλεύρου στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ στροφῇ γινομέναις ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ κάθετος.*

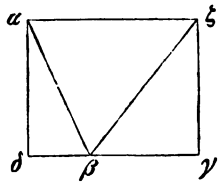
---

2. *τῷ* ante *ἀπὸ τῆς* add. B[1] 7. *αὐτήν Ei, αὐτὴν* $\overline{ΓΖ}$ A[1]B[3], *αὐτὴν τῷ* $\overline{ζγ}$ B[1], *αὐτὴν* $\overline{ζγ}$ S, *αὐτὴν τὴν ΓΖ* voluit *Co* 8. *Ἔστι δὲ Ei* 8. 9. *τῆς ὑπὸ τῆς* $\overline{ΑΖ}$ *γινομένης ἐπιφανείας κυλινδρικῆς οὔσης* ABS, corr. *Ei* auctore *Co* 12. *ιδʹ Hu*, $\overline{ΙΓ}$ A, $\overline{ΙΓ}^{ω}$ B, *τρισκαιδεκάτῳ* S *Ei* (conf. adnot. 2 ad propos. 24) 13. 14. *κύκλῳ — δύναται* add. *Co* 14. *τὸ Co, τῶι* ABS (quod quidem ante *κύκλῳ* reponit *Co*) 15. $\overline{λϛ}$ A[1] in marg. (BS), *ιζʹ* add. *Hu* *τῶν* $\overline{ΔΓ}$ A, distinx. B, *τῶν* $\overline{γ}$ $\overline{δ}$ S *Ei*

$\alpha\delta\gamma\zeta$ parallelogrammo et ab $\alpha\beta\delta$ triangulo efficitur, aequale est cono eandem basim et altitudinem $\beta\delta + 3\,\delta\gamma$ habenti. Communis subtrahatur conus, qui a a $\beta\zeta\gamma$ triangulo efficitur, eandem basim et altitudinem $\beta\delta + \delta\gamma$ habens; restat igitur solidum, quod ab $\alpha\beta\zeta$ triangulo efficitur, aequale cono eandem basim et altitudinem $2\,\delta\gamma$, sive $2\,\alpha\zeta$, habenti.

Hoc quoque manifestum est, superficiei cylindricae, quae ab $\alpha\zeta$ efficitur, aequalem esse circulum, cuius radius media proportionalis est inter cylindri latus et baseos diametrum (hoc enim Archimedes de sphaer. et cyl. *I* propos. 14 demonstravit); itaque superficies, quae ab $\alpha\zeta$ efficitur, aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat $2\,\zeta\gamma \cdot \gamma\delta$.

XXXVI (*17*). Sin vero punctum β inter δ γ cadat, facilius idem demonstratur. Nam cylindrus, qui ab $\alpha\delta\gamma\zeta$ parallelogrammo efficitur, quoniam eandem basim cum conis, qui ab $\alpha\beta\delta$ $\zeta\beta\gamma$ triangulis efficiuntur, et altitudinem $\delta\gamma$ habet, hos conos (*quorum summa est conus eiusdem baseos et altitudinis* $\delta\gamma$) superat eo cono, qui eandem basim et altitudinem $2\,\delta\gamma$ habet; itaque solidum, quod ab $\alpha\beta\zeta$ triangulo efficitur, eidem cono aequale est, q. e. d.



XXXVII (*18*). Sit quadrilaterum $\alpha\beta\gamma\delta$, et a β ad $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ perpendiculares *inter se* aequales, et *extra* ducatur quaelibet recta $\beta\varepsilon$, quâ manente quadrilaterum convertatur in eundemque locum restituatur; dico solidum, quod a quadrilatero efficitur, aequale esse cono, cuius basis aequalis est summae earum superficierum, quas rectae $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ in conversione efficiunt, altitudo autem perpendicularis a β ad $\alpha\delta$ vel $\delta\gamma$. Prop. 33

---

16. $\overline{A\Delta}$ $\overline{\Gamma Z}$ A, coniunx. BS, om. *Ei* 17. ὑπὸ τοῦ AB cod. *Cσ*, corr. S *Co* 18. τριγώνοις *Ei* invitis ABS αὐτοῖς del. *Hu* 22. ὅπερ om. *Ei* 23. $\overline{\kappa\zeta}$ (sic) A[1] in marg., corr. BS, ιη′ add. *Hu* τὸ ante τετραπλ. add. ABS, del. *Ei* 25. εἰς ABS, ἐπὶ *Ei* 29. τῶν $\overline{AB}$ $\overline{\Delta\Gamma}$ ABS, corr. *Co*

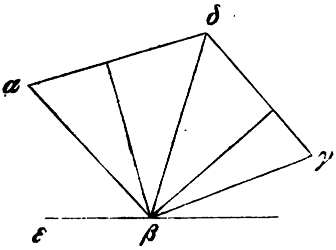
Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ τετραπλεύρου γινόμενον στερεὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΔ ΔΓΒ τριγώνων ἐστὶν γινόμενον. καὶ δέδεικται πρὸ δυοῖν τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ γινόμενον ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΑΔ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ κάθετος, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ΔΒΓ τριγώνου ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΔΓ γινομένῃ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραπλεύρου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ γινομέναις κατὰ τὴν στροφὴν ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ.

61 λη′ (ιθ′). Κἂν ἀντὶ τοῦ τετραπλεύρου δὲ πεντάπλευρον ᾖ τὸ ΔΑΒΖΓ ἢ καὶ ὁποσασοῦν πλευρὰς ἔχον, ὥστε τὰς ἀπὸ τοῦ Β ἐφ᾽ ἑκάστην τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΖ καθέτους ἴσας εἶναι, δειχθήσεται ὁμοίως τὸ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΖ γινομέναις ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ μία τῶν εἰρημένων ἴσων καθέτων. καὶ οὐδὲν διαφέρει, ἂν ἡ ἐσχάτη ἐφαρμόζῃ τῇ ΕΒ. [ἑξῆς τὸ σχῆμα.]

62 λθ′ (κ′). Τὸ δ᾽ αὐτό ἐστιν τῷ εἰρημένῳ λέγειν ὅτι, ἐὰν περὶ ἡμικύκλιον οὗ κέντρον τὸ Σ, γραφῇ τι πολύγωνον ὁποσασοῦν ἔχον πλευράς, ὡς τὸ ΒΕΖΘΛΓ, μενούσης δὲ τῆς ΒΓ περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκα-

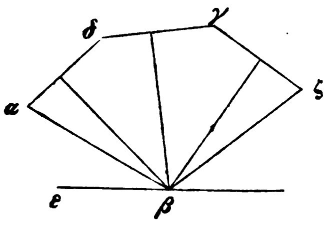
2. τρίγωνον ABS, corr. *Ei* auctore *Co* 3. πρὸ δυοῖν *Hu*, πρὸς δὲ ABS, *proxime Co*, πρὸ ἑνὸς *Ei* 5. γινομένης AB, corr. S ἐπιφάνεια A, corr. BS 6. τοῦ ΔΒΓ *Co* pro τοῦ ΑΒΓ τριγώνωι AB, corr. S 7. 8. γινομένης ἐπιφανείας AB, corr. S 13. ΛΗ A^1 in marg. (BS), ιθ′ add. *Hu* δὲ om. *Ei* 14. τὸ ΔΑΒ ΖΓΗ | καὶ A, τὸ δαβζγη καὶ BS, corr. *Co* post ἢ καὶ add. ἄλλο τι πολύγωνον *Ei* ὁποσαου A^1, ὁποσαουν A^2, ὁποσουν B^1, corr. B^3S 15. καθέτους A^1 ex καθέτου 19. ἴσων add. A^1 super vs. 20. τῇ ΕΒ *Hu* pro τῆι ΑΒ εξης (sine spir. et acc.) A, ἐξ ἧς BS, corr. *Hu* ἑξῆς τὸ σχῆμα del. *Co Ei* 21. ΛΘ A^1 in marg. (BS), κ′ add. *Hu* 22. τὸ Σ *Co* pro τὸ Ε γραφῆτι A (ι in rasura), distinx. BS 23. τὸ ΒΕΖ | ΘΛ A, coniunx. BS, Γ add. *Co*

Iungatur $\beta\delta$; ergo solidum, quod a quadrilatero, idem est ac quod ab $\alpha\beta\delta$ $\delta\beta\gamma$ triangulis efficitur. Et proxime



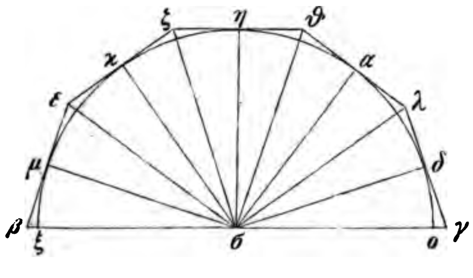
(*propos.* 31) demonstravimus solidum, quod ab $\alpha\beta\delta$ triangulo efficitur, aequale esse cono, cuius basis aequalis est superficiei ab $\alpha\delta$ effectae, altitudo autem perpendicularis a β ad $\alpha\delta$ vel $\delta\gamma$, et solidum, quod a $\delta\beta\gamma$ triangulo, aequale cono, cuius basis aequalis est superficiei a $\delta\gamma$ effectae, altitudo autem eadem; ergo etiam summa *eorum solidorum, id est* solidum, quod ab $\alpha\beta\gamma\delta$ quadrilatero efficitur, aequale est cono, cuius basis aequalis est superficiebus ab $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ in conversione effectis, altitudo autem perpendicularis a β ad $\alpha\delta$ vel $\delta\gamma$.

XXXVIII (*19*). Quodsi pro quadrilatero sit quinquelaterum $\delta\alpha\beta\zeta\gamma$ vel *polygonum* quotcunque latera *ita posita* Prop. 34



habens, ut perpendiculares ad singula latera $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\gamma\zeta$ . . . *ductae inter se* aequales sint, similiter demonstrabitur solidum, quod a polygono efficitur, aequale esse cono, cuius basis aequalis est superficiebus ab $\alpha\delta$ $\delta\gamma$ $\gamma\zeta$ . . . effectis, altitudo autem una earum quas diximus perpendicularium. Nec quidquam differt, si extrema *perpendicularis* congruat cum $\varepsilon\beta$.

XXXIX (*20*). Idem autem est, ac si dicamus, si circa



semicirculum, cuius centrum σ, polygonum aliquod describatur quotcunque latera habens, velut $\beta\varepsilon\zeta\vartheta\lambda\gamma$, et manente rectâ $\beta\gamma$ polygonum convertatur in eun-

ταστα‌θῇ, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεόν, ὃ δὴ καὶ περιγέγραπται περὶ τὴν σφαῖραν ἣν ποιεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ἡ ἐπιφάνειά ἐστιν ἡ ὑπὸ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν γινομένη κατὰ τὴν στροφήν, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Σ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰς πλευρὰς κάθετοι, ὡς αἱ ΣΜ, ΣΚ ΣΗ ΣΑ ΣΔ, ἴσαι εἰσίν. καὶ οὐ διαφέρει, ἐὰν τὸ Δ τῷ Ο, ἢ τὸ Μ τῷ Ξ ταὐτὸν ᾖ.

Δῆλον δ' ὅτι, κἂν περὶ τομέα κύκλου, οἷον τὸν ΞΣΑ ἢ ΜΣΑ περιγραφῇ τι πολύγωνον, τὰ αὐτὰ δειχθήσεται.

63 *μ'* (*κα'*). *Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου.*

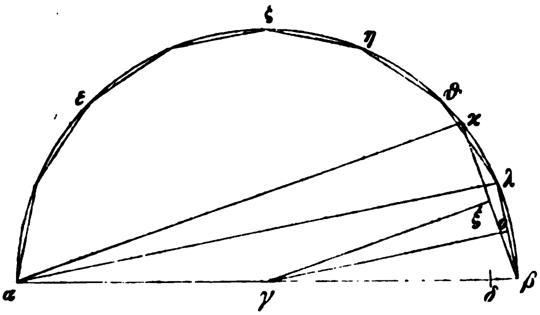
Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καί, εἰ δυνατόν, πρότερον ἔστω μείζων ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τουτέστιν ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, τουτέστιν ἐλάσσων μὲν τοῦ κώνου, μείζων δὲ τῆς σφαίρας, νοείσθω κῶνος ἄλλος, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ΒΔ, ἐλάσσων οὖσα τῆς ΓΒ, καὶ ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ ΑΕΒ ἤχθω ἡ ΑΚ δυναμένη τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Κ Β. καὶ τὰ ἡμίση· τὸ ὑπὸ ΑΒΔ ἴσον ἐστὶν ἡμίσει τῷ ἀπὸ

3. *βάσις μὲν ἡ Ei* auctore *Co* pro *ἡ μὲν* 9. *δ' ὅτι Hu* pro *ἤδη τὸν Ξ ΣΑ* A, coniunx. BS 11. *μ* A[1] in marg. (B Paris. 2368 V, om. S), *κα'* add. *Hu* *ἡ* ante *βάσις* add. *Ei* 14. *δὲ τὸ* BS, *το δε τὸ* A 20 — p. 402, 2] totus hic locus misere turbatus est in codicibus, quem nos, quantum probabili coniectura assecuti sumus, restituimus (longe alia ratione *Ei*, de quo vide append.) 20. 21. *ἡ ΒΔΕ ἐλάσσων* ABS, corr. *Co* 21. *τῆς ΓΒ Ei* pro *τῆς ΓΔ* *τοῦ ΑΕΒ Co* pro *τοῦ ΑΒΕ* 22. *ἤχθω Co*, *ἐδείχθη* ABS, *εἰλήφθω Ei* *ὑπὸ ΑΒΓΔ* AB, distinx. S 23. 24. *ἐπὶ τὰ ΚΒ* A, distinx. B, *ἐπὶ τὰ β κ* S 24. *καὶ τὰ ἡμίση* — p. 400, 1. *τὰ Β Κ* om. S *Ei* 24. *καὶ* AB[3], om. B[1] *ἡμίση Co* pro *ἥμισυ* *ἡμίσει* add. *Hu* (*ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Β Κ καὶ τῆς ἡμισείας Co*)

demque locum restituatur, id quod ita efficitur solidum, quod quidem sphaerae a semicirculo effectae circumscriptum est, aequale esse cono, cuius basis *circulus est aequalis* summae superficierum, quas polygoni latera in conversione efficiunt, altitudo autem radius sphaerae; nam omnes perpendiculares a centro σ ad latera ductae, velut $\sigma\mu$ $\sigma\varkappa$ $\sigma\eta$ $\sigma\alpha$ $\sigma\delta$, *inter se* aequales sunt. Nec quidquam differt, si punctum δ cum o, vel μ cum ξ congruat (*id est, si ipsa extrema polygoni latera diametro perpendicularia sint*).

Idem etiam demonstrabitur, si circa sectorem, velut $\xi\sigma\alpha$ vel $\mu\sigma\alpha$ polygonum quoddam describatur.

XL (*21*). Omnis sphaera aequalis est cono, cuius basis est sphaerae superficies, altitudo autem radius. Prop. 35

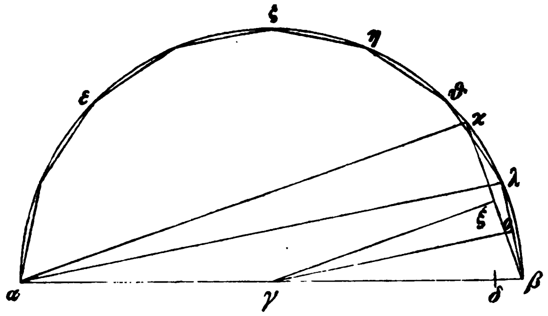


Sit enim sphaera, cuius diametrus $\alpha\beta$ ac centrum γ, et, si fieri possit, primum *hac sphaerâ* maior sit conus, cuius basis est sphaerae superficies, id est circulus radio $\alpha\beta$ (*propos. 28 extr.*), altitudo autem $\gamma\beta$ radius sphaerae; atque inter haec, id est minor eo *quem diximus* cono et maior sphaerâ, fingatur alius conus, cuius basis sit eadem, altitudo autem $\beta\delta$ minor quam $\gamma\beta$*), et in semicirculo $\alpha\varepsilon\beta$ ducatur $\alpha\varkappa$ ita, ut sit $\alpha\varkappa^2 = 2\,\alpha\beta\cdot\gamma\delta$; ergo, *quoniam est*

$\alpha\beta^2 = 2\,\alpha\beta\cdot\beta\gamma$, *si hinc subtrahatur*

*) Hinc in Graecis incipit gravissima scripturae traditae corruptela, quam sanari posse adeo desperavit Eisenmannus, ut suo arbitrio novam demonstrandi rationem concinnaret, de qua vide append.

τῆς ἐπὶ τὰ Β Κ [τὸ γὰρ δὶς ὑπὸ ΑΒΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΒ ΓΔ, τουτέστιν τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ ἀπὸ ΑΒ ἐστὶν ἴσον ὂν τοῖς ἀπὸ ΑΚΒ, ὀρθῆς οὔσης τῆς πρὸς τῷ Κ ἐν
64 *ἡμικυκλίῳ]. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ ἡμικύκλιον πολύγωνον ἰσόπλευρον [ἀρτιόπλευρον] τὸ ΑΕΖΗΘΛΒ, ὥστε ἐλάσσονα εἶναι τὴν ΒΛ περιφέρειαν τῆς ΒΛΚ (δυνατὸν δὲ τοῦτο·*



τέμνοντες γὰρ τὸ ἡμικύκλιον δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν περιφέρειαν δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες λείψομέν τινα περι-
65 *φέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΒΛΚ, ὡς τὴν ΒΛ). καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΟ. ἐπεὶ οὖν ἰσογώνιόν ἐστιν τὸ ΑΛΒ τρίγωνον τῷ ΓΟΒ τριγώνῳ καὶ διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΛ τῆς ΓΟ, ἡ δὲ ΑΒ τῆς ΒΟ, καὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΒ τῆς ΑΛ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΛ ΓΟ μεῖζόν ἐστιν ἡμίσους τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΒ. διὰ ταὐτὰ δὴ κἂν μὲν τὴν ΚΒ ἐπιζεύξωμεν, παράλληλον δὲ διὰ τοῦ Γ μέχρι τῆς ΚΒ τῇ ΑΚ ἀγάγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς ἀγομένης παραλλήλου καὶ τῆς ΑΚ μεῖζόν ἐστιν ἡμίσους τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΒ εὐθείας· καὶ*

---

1. *ἐπὶ τὰ* $\overline{BK}$ A, distinx. B *τὸ γὰρ δὶς* — 4. *ἡμικυκλίῳ* interpolatori tribuit *Hu* (om. *Ei*) *ὑπὸ ΑΒΔ* *Co* pro *ὑπὸ* $\overline{ΑΒΓ}$ 1. 2. *τοῦ δὶς ὑπὸ* $\overline{ΑΒΓΔ}$ A, distinx. BS 2. *ἀπὸ* add. *Co* *ἐστὶν* om. S 4. *γεγράφθω* S *Ei* 5. *ἀρτιόπλευρον* interpolatori tribuit *Hu* *τὸ* $\overline{ΑΕΖ}$ $\overline{ΗΘΛΒ}$ A, coniunx. BS 6. *δυνατὸν* — 9. *τὴν ΒΛ* forsitan interpolatori tribuenda sint, quoniam eadem iam supra cap. 51 scriptor exposuit 7. *τὸ* om. AS, add. B *Ei* *ἡμίσειαν* S, L' AB 13. *ὑπὸ* $\overline{ΑΛΓΟ}$ A, distinx. BS, item p. 402, 1. 3 sq. 7 13. 14. *ἡμίσους*

$$\alpha\varkappa^2 = 2\,\alpha\beta\cdot\gamma\delta, \text{ restat}$$
$$\varkappa\beta^2 = 2\,\alpha\beta\cdot\beta\delta, \text{ itemque dimidia}$$
$$\tfrac{1}{2}\varkappa\beta^2 = \alpha\beta\cdot\beta\delta.$$

Iam semicirculo polygonum aequilaterum $\alpha\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda\beta$ **) ita inscribatur, ut circumferentia $\beta\lambda$ minor sit quam $\beta\lambda\varkappa$ (quod potest fieri, quoniam semicirculum, *ut supra propos. 27 exposuimus,* bifariam secantes, et *rursus* dimidiam circumferentiam bifariam, et id semper facientes relinquemus aliquam circumferentiam, velut $\beta\lambda$, minorem quam $\beta\lambda\varkappa$). Et iungatur $\alpha\lambda$, eique parallela *ducatur* γo. Iam quia est $\Delta\,\alpha\lambda\beta \sim \Delta\,\gamma o\beta$, ideoque $\alpha\lambda = 2\gamma o$, et $\lambda\beta = 2\,o\beta$, et $\alpha\lambda > \lambda\beta$ ***), est igitur

$\alpha\lambda\cdot\gamma o > \lambda\beta\cdot o\beta$, *id est*

$> \tfrac{1}{2}\lambda\beta^2$. Eadem ratione, si rectam $\varkappa\beta$ iunxerimus[1]), et per γ ipsi $\alpha\varkappa$ parallelam duxerimus usque ad $\varkappa\beta$, *scilicet* $\gamma\xi$, est

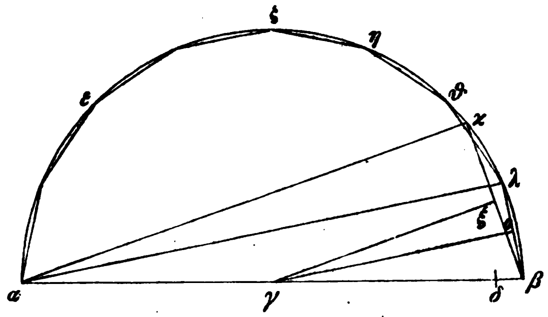
$\alpha\varkappa\cdot\gamma\xi > \tfrac{1}{2}\varkappa\beta^2$. *Sed est* $\alpha\lambda > \alpha\varkappa$; *ergo* eo magis

**) Quemadmodum haec litterarum series ac multitudo indicat, figura dimidii dodecagoni (vide append.) in codicibus exstat. Sed quoniam scriptor bifariam semper circumferentiam secari iubet, nos semicirculum in octo partes divisimus et, ut nostra figura ostendit, litteras geometricas satis probabiliter disposuisse videmur.

***) Ut in re manifesta scriptor exponere omisit, quibus terminis sit $\alpha\lambda > \lambda\beta$, et $\alpha\varkappa > \varkappa\beta$. Scilicet oportet esse circumferentiam $\lambda\beta < \varkappa\beta < \tfrac{1}{4}$ circumf. circuli. Sed quoniam polygonum ex scriptoris praecepto (si circulum completum fingimus) minime est 8 laterum, vel etiam $8\cdot 2$, vel $8\cdot 2\cdot 2$ etc., et silentio circumferentia $\varkappa\beta$ minor supponitur quam $\vartheta\varkappa\beta$, consentaneum est ipsam $\varkappa\beta$ utique minorem esse quadrante circumferentiae circuli.

1) Haec verba supervacanea videantur, quoniam de recta $\varkappa\beta$ iam supra dictum est. Sed illic in Graecis est ἡ ἐπὶ τὰ *K B*, quo dicendi genere non id diserte praecipitur, ut recta $\varkappa\beta$ ducatur.

τοῦ ἀπὸ τῆς *ΛB*] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς $\overline{ΛB}$ ABS, τοῦ ὑπὸ τῆς *ΛB* καὶ τῆς ἡμισείας τῆς *ΛB* Co, corr. *Hu*   14. ταὐτὰ *Hu*, ταῦτα AB, τὰ αὐτὰ S   τὴν *KB Hu*, $\overline{ZY}$ AB, $\overline{\zeta\nu}$ S   15. 16. τῆς *KB* τῇ *AK Hu*, τῆς *ΓB* ἐπ' εὐθείας ABS, *ipsi AK parallelam duxerimus usque ad KB Co*   17. ἡμίσους τοῦ ἀπὸ τῆς *KB*] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆι $\overline{KB}$ AB, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς $\varkappa\beta$ S, τοῦ ὑπὸ τῆς *KB* καὶ τῆς ἡμισείας τῆς *KB Co*, corr. *Hu* πολλῷ τὸ ὑπὸ *ΛΑ ΓΟ* ἡμίσους τοῦ ἀπ' αὐτῆς, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ *ΑΒΔ*. καὶ ὁ κῶνος ἄρα, οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑ ΓΟ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΒ*, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΑΒΔ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΒ*. ἀλλ' ὁ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑ ΓΟ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΒ*, ἴσος ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑ ΑΒ*, ὕψος δὲ ἡ *ΓΟ*· καὶ ὁ κῶνος ἄρα οὗτος, τουτέστιν οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑΒ*,



ὕψος δὲ ἡ *ΓΟ*, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΑΒΔ*, ὕψος δὲ ἡ *ΑΒ*, τουτέστιν τοῦ ἴσου κώνου οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ *ΑΒ*, ὕψος δὲ ἡ *ΒΔ* [ὡς γὰρ τὸ ἀπὸ *ΑΒ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΑΒΔ*, οὕτως ἡ *ΑΒ*
66 πρὸς *ΒΔ*]. καὶ δέδεικται τῷ δʹ θεωρήματι ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐπιφάνεια κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴση κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑΒ*· καὶ ὁ κῶνος ἄρα οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ *ΛΑΒ*, ὕψος δὲ

---

1. ἡμίσους τοῦ ἀπ' αὐτῆς] τοῦ ἀπ' αὐτῆς ABS, *eo quod iisdem continetur Co*, corr. *Hu* 2. τοῦ ὑπὸ *ΑΒΔ* Co pro τὸ ὑπὸ *ΛΔΒ* 4. μεῖζον AB Paris. 2368 S, corr. V 7. τοῦ om. A, add. BS

$\alpha\lambda \cdot \gamma o > \frac{1}{2} \varkappa\beta^2$†), id est, *ut supra demonstravimus*
$> \alpha\beta \cdot \beta\delta$.

Ergo etiam conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \gamma o$, altitudinem autem $\alpha\beta$, maior est cono basim habente circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta \cdot \beta\delta$, altitudinem autem eandem. Sed conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \gamma o$, altitudinem autem $\alpha\beta$, aequalis est cono basim habenti circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \alpha\beta$, altitudinem autem γo (*propos. 29*); ergo etiam conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \alpha\beta$, altitudinem autem γo, maior est cono basim habente circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta \cdot \beta\delta$, altitudinem autem $\alpha\beta$, id est *maior* aequali cono basim habente circulum radio $\alpha\beta$, altitudinem autem $\beta\delta$††). Ac theoremate 4 (*propos. 23 p. 369*) demonstravimus superficiem, quam omnia polygoni latera simili conversione efficiunt, aequalem esse circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \alpha\beta$; ergo etiam conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectan-

†) Apparet eam demonstrationem non satis elegantem ac concinnam esse; nam, omissa comparatione cum $\frac{1}{2} \lambda\beta^2$, satis erat ostendere $\alpha\varkappa \cdot \gamma\xi > \frac{1}{2} \varkappa\beta^2$, et $\alpha\lambda > \alpha\varkappa$. Sed eae quae supra leguntur ambages inde ortae sunt, quod ipse scriptor notatione $\gamma\xi$ (quam nos intulimus) abstinuit; itaque esse $\alpha\varkappa \cdot \gamma\xi > \varkappa\beta \cdot \xi\beta$ commode demonstrare non potuit; ergo primum id quod simile est ostendit in rectis $\alpha\lambda$ $\lambda\beta$ γo, ac postea eandem rationem esse rectarum $\alpha\varkappa$ $\varkappa\beta$ et eius quae ipsi $\alpha\varkappa$ parallela est, omissa appellatione $\gamma\xi$, significat.

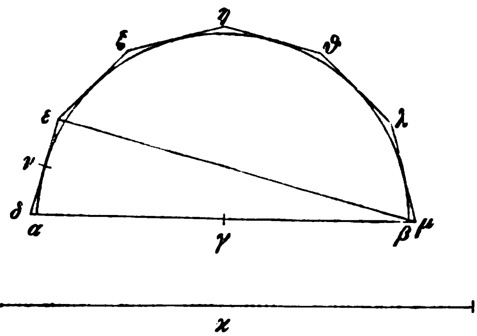
††) Hoc rursus ex propos. 29 sequitur, dummodo pro "circulum radio $\alpha\beta$" substituamus "circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta \cdot \alpha\beta$", quod, ut manifestum, non adnotavissemus, nisi in Graecis et hoc loco et paulo post p. 404, 13 sq. 406, 7—18 aliena interpretamenta occurrerent.

---

10. 11. *τουτέστιν — κύκλος* om. *Ei* 12. *οὗ* om. A, add. BS 15. *τοῦ* om. A, add. BS 15. 16. *ἡ* $\overline{\Delta B}$ *ὕψος δὲ ἡ* $\overline{\Delta}$ ABS, corr. *Co* 16. 17. *ὡς γὰρ — πρὸς BΔ* interpolatori tribuit *Hu* 17. $\overline{\Delta}$ AB, *τετάρτῳ* S *Ei*, *23. huius Co* 18. *πλευρὰ* AB, corr. S

ἡ ΓΟ, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ εἰς τὴν σφαῖραν στερεῷ σχήματι, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς ἐστιν ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα μεῖζόν ἐστιν τοῦ κώνου οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς ἐστιν ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος οὗτος μείζων τῆς σφαίρας· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστιν τῆς σφαίρας τὸ στερεὸν σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν.

67 *μα'* (κβ'). *Ἔστω δὲ ἐλάσσων τῆς σφαίρας ὁ εἰρημένος κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστι κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν*



ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΒ, τουτέστιν οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒΓ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ [ὡς γὰρ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ], καὶ μεταξὺ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου νοείσθω κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ Κ *μείζων τῆς ΑΒ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ἡμικύκλιον πολύγωνον ἰσόπλευρον, ὥστε μίαν αὐτοῦ πλευρὰν τὴν ΔΕ τῆς ὑπεροχῆς τῶν Κ ΑΒ ἐλάσσονα εἶναι. καὶ ἔστιν μείζων ἡ ΔΕ τῶν ΔΑ ΒΜ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΝΔ τῆς ΔΑ· καὶ ἡ*

68 *ΔΜ ἄρα τῆς Κ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γινομένη ὑπὸ τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν*

3. *ὥστε Co* pro *ὡς δὲ* 7. *μείζων* AB, corr. S __ *στερεὸν* AB, *εἰρημένον* S *Ei* 8. *ἀδύνατόν* A¹ ex *δυνατόν* 9. *μα* A¹ in marg. (BS), *κβ'* add. *Hu* 13. 14. *ὡς — ΑΒΓ* interpolatori tribuit *Hu* 18. *τὸ* S, *ὁ* AB 15. 16. *δὲ η μείζων* A(BS), *Κ* add. *Co* 18. *τῶν* $\overline{ΚΑΒ}$ ABS,

gulum $\alpha\lambda \cdot \alpha\beta$, altitudinem autem γo, qui *conus* aequalis est solidae figurae in sphaeram inscriptae[2]), maior est cono basim habente circulum radio $\alpha\beta$, altitudinem autem $\beta\delta$; itaque etiam ea quam diximus solida figura maior est cono basim habente circulum radio $\alpha\beta$, altitudinem autem $\beta\delta$. Atqui ex hypothesi hic conus maior est sphaerâ; multo igitur solida figura sphaerae inscripta maior est sphaerâ, quod quidem fieri non potest[3]). *Ergo non maior est sphaerâ conus, cuius basis est sphaerae superficies, altitudo autem radius.*

XLI (*22*). Sed minor sit sphaerâ ille conus, cuius basis est circulus radio $\alpha\beta$, altitudo autem $\gamma\beta$, id est *conus* basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$, altitudinem autem $\alpha\beta$ (*propos. 29*); atque inter sphaeram et eum conum fingatur conus, cuius basis sit eadem, altitudo autem $\varkappa$ maior quam $\alpha\beta$, *id est conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum* $\varkappa \cdot \alpha\beta$, *altitudinem autem* $\gamma\beta$, et semicirculo circumscribatur polygonum aequilaterum ita, ut unum eius latus, *velut* $\delta\varepsilon$, minus sit differentiâ rectarum $\varkappa$ $\alpha\beta$, *id est, ut sit*

$$\varkappa > \delta\varepsilon + \alpha\beta.$$ Et est $\delta\varepsilon > \delta\alpha + \beta\mu$ (quoniam $\frac{1}{2}\delta\varepsilon = \delta\nu > \delta\alpha$); ergo etiam

$$\delta\varepsilon + \alpha\beta > \delta\alpha + \alpha\beta + \beta\mu,$$ id est $$> \delta\mu,$$ itaque *eo magis*

$$\varkappa > \delta\mu.$$

Sed quoniam superficies, quam polygonum conversione circa

2) Hoc sequitur ex lemmate 20 (p. 397); nam γo est radius semicirculi, cui polygonum $\alpha\varepsilon\zeta\eta\vartheta\lambda\beta$ circumscriptum est, et circulus, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\alpha\lambda \cdot \alpha\beta$, aequalis est superficiei, quam polygoni latera efficiunt.

3) Est enim minor, id quod ex Archim. de sphaer. et cyl. 1, 26. 27. 25. 36 sequitur. Ceterum quod Commandinus vereri se dicit, ne haec Pappi demonstratio non omnino satisfacere videatur (quare aliam sua coniectura addit), equidem existimo, si ex nostratium usu numero π adhibito breviores formulae ponantur, Graeci scriptoris viam ac rationem facile perspici.

distinx. *Ei* 19. τῶν $\overline{\varDelta A}$ $\overline{BZ}$ ABS, corr. *Co* ἡ *NΔ Co*, ἡ $\overline{M\varDelta}$ ABS, ἡ ἡμίσεια τῆς *ΔE Ei* 19. 20. ἡ *ΔM Co* pro ἡ $\overline{\varDelta Z}$ 21 — p. 406, 1. κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν $\overline{\varDelta A}$ στροφὴν ABS *Ei*, *ex simili conversione circa axem ΔM Co*

ΔΜ στροφὴν διὰ τὸ δ' θεώρημα ἴση ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ *ΑΒ, δῆλον ὡς καὶ τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεόν, ὃ δὴ περιγέγραπται περὶ τὴν σφαῖραν ἣν ποιεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ἴσον ἐστὶν κώνῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς ἐστιν ἡ* δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ *ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διὰ τὸ κ' θεώρημα, [τῷ δὲ κώνῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς ἐστιν ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ, τουτέστι τῷ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν ἴση κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒΓ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ, ἴσος ἐστὶν κῶνος, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΔΜ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ, διὰ τὸ εἶναι πάλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΜ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα ὑπὸ τοῦ πολυγώνου στερεὸν κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΔΜ στροφὴν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΔΜ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ]. καὶ ἔστιν μείζων ἡ Κ τῆς ΔΜ, ὁ δὲ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ Κ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ, ἐλάσσων ἐστὶν τῆς σφαίρας· πολλῷ ἄρα [μᾶλλον] τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν ἔλασσόν ἐστιν τῆς σφαίρας, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσος ἄρα ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ.*

69 *μβ'* (κγ'). *Σφαίρας δοθείσης καὶ λόγου, τεμεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπιπέδῳ τινί, ὥστε τὰς ἐπιφανείας τῶν τμημάτων πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.*

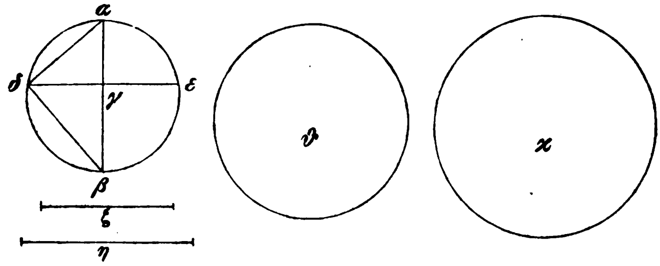
Ἔστω γὰρ σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ ΑΔΒΕ, καὶ διάμετρος ἡ ΑΒ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Ζ πρὸς Η, καὶ

---

1. *διὰ τὸ* $\bar{\varepsilon}$ *θεώρημα* AB, *διὰ τὸ πέμπτον θεώρημα* S *Ei*, om. *Co*, corr. *Hu* 2. *δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ* add. *Hu* auctore *Co*, item vs. 5 sq. (*δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒ ΔΜ Ei*) 6. 7. *ἐκ τοῦ κέντρου — τὸ κ' θεώρημα* om. *Ei* 7. $\bar{\kappa}$ A(B), *εἰκοστὸν* S, 35. *huius Co* *τῷ δὲ κώνῳ — 18. ἡ ΒΓ* del. *Ei* 9. *ἴση* add. *Hu* 10. *κώνωι* ABS, corr. *Co* 12. *ὑπὸ ΔΜ ΑΒ Co* pro *ὑπὸ* $\overline{\Delta Z A B}$ (distinx. BS), item vs. 13 et 17 sq. pro *ὑπὸ* $\overline{\Delta Z}$ $\overline{A B}$ 15. 16. *κατὰ — στροφὴν* om. *Co* 16. *τὴν ΔΜ Hu* pro

axem $\delta\mu$ efficit, propter theorema 4 (*propos. 23 extr.*) aequalis est circulo, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\delta\mu \cdot \alpha\beta$, apparet solidum a polygono effectum, quod quidem sphaerae quam semicirculus efficit circumscriptum est, aequale esse cono basim habenti circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\delta\mu \cdot \alpha\beta$, altitudinem autem $\gamma\beta$, propter theorema 20 (*p. 397*). Ac *demonstravimus* $\varkappa > \delta\mu$, et *ex hypothesi* conus basim habens circulum, cuius radii quadratum aequat rectangulum $\varkappa \cdot \alpha\beta$, altitudinem autem $\gamma\beta$, minor est sphaerâ, multo igitur solidum sphaerae circumscriptum minus est sphaerâ, quod quidem fieri non potest[4]. *Ergo non minor est sphaerâ conus, cuius basis est sphaerae superficies, altitudo autem radius. At idem, ut modo demonstravimus, ne maior quidem est*; ergo is *quem diximus* conus sphaerae aequalis est.

XLII (*23*). Sphaerâ datâ et proportione, superficies sphaerae plano ita secetur, ut segmentorum *curvae* superficies inter se proportionem eandem habeant ac datam. Prop. 36



Sit enim sphaera, cuius maximus circulus $\alpha\delta\beta\varepsilon$ et diametrus $\alpha\beta$, data autem proportio $\zeta : \eta$, et diametrus $\alpha\beta$ in

4) Est enim maius, id quod ex Archim. de sphaer. et cyl. 1, 31. 32. 35. 36 sequitur.

τὴν $\overline{\Delta Z}$ 17. *κύκλος* B³S, *κύκλου* AB¹ 18. τῆς *ΔM Co* pro τῆς $\overline{\Delta Z}$ 20. τὸ ὑπὸ $\overline{KAB}$ AB, distinx. *Ei* 21. *μᾶλλον* del. *Hu* 24. $\overline{\mu\beta}$ A¹ in marg. (BS), *κγ'* add. *Hu* 28. ὁ $\overline{A\Delta}$ $\overline{BE}$ A, coniunx. B, ὁ $\overline{\alpha\beta\delta\varepsilon}$ S *Ei* τετμήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως τὴν Ζ πρὸς Η, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ Κ, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΔ, ὁ δὲ Κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ ΔΒ· ἔσται ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔΑΕ τμήματος, ὁ δὲ Κ τοῦ ΔΒΕ τμήματος· τοῦτο γὰρ προδέδεικται. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ καὶ κάθετος ἡ ΔΓ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, τουτέστιν ἡ Ζ πρὸς Η, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Κ κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν Κ κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔΑΕ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔΒΕ τμήματος τῆς σφαίρας.

70 μγ΄. Ὄντων δὲ τούτων φανερὸν ὅτι καὶ πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ἡμικυκλίου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΕΓ, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, διχοτομία δὲ τὸ Ε, καὶ κέντρον τὸ Ζ, ὁπόταν τρεῖς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν Α Ε Γ, ὡς αἱ ΑΒ ΒΔ ΔΓ, μενούσης δὲ τῆς ΑΓ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ὁ γινόμενος ὑπὸ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ὑπὸ τοῦ ἡμικυκλίου γινομένην ἡμιόλιον λόγον ἕξει ὅνπερ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῆς ΒΔ γινομένη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου [μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῆς ΒΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΒ ΓΔ, τουτέστιν τῷ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ

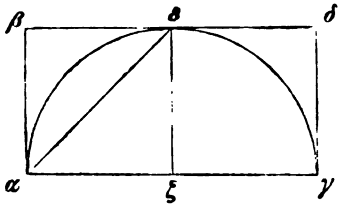
3. τῇ * $\overline{AB}$ εὐθεῖα A, corr. BS 5. οἱ $\overline{ΘK}$ A, distinx. BS ὧν ante ὁ μὲν add. S *Ei* 10. ἡ ante ΑΓ add. *Hu* 13. Κ alterum add. *Co* 16. $\overline{μΓ}$ A[1] in marg. (BS) 22. 23. τρισαχθωσιν (sine acc.) A, προσαχ-

puncto γ ita secetur, ut sit $\alpha\gamma : \gamma\beta = \zeta : \eta$, et per γ sphaera secetur plano ad rectam $\alpha\beta$ perpendiculari, et communis sectio *eius plani ac circuli maximi* $\alpha\delta\beta\varepsilon$ sit recta $\delta\gamma\varepsilon$, et iungantur $\alpha\delta$ $\delta\beta$, et exponantur duo circuli ϑ $\varkappa$, quorum prior radium aequalem ipsi $\alpha\delta$, alter ipsi $\delta\beta$ habeat; erit igitur circulus ϑ aequalis *curvae* superficiei segmenti $\delta\alpha\varepsilon$, et circulus $\varkappa$ segmenti $\delta\beta\varepsilon$ (hoc enim supra *propos. 28* demonstratum est). Et quia angulus $\alpha\delta\beta$ rectus est et $\delta\gamma$ perpendicularis, est *igitur* (*propter elem. 6, 8 et 5 def. 10*)

$$\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\gamma^2 : \gamma\delta^2 = \alpha\delta^2 : \delta\beta^2,$$

id est, ut $\zeta : \eta$, ita est quadratum radii circuli ϑ ad quadratum radii circuli $\varkappa$, id est circulus ϑ ad circulum $\varkappa$ (*elem. 12, 2*), id est *curva* superficies segmenti sphaerici $\delta\alpha\varepsilon$ ad *curvam* superficiem segmenti $\delta\beta\varepsilon$.

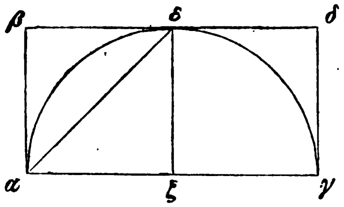
XLIII. Quae cum ita sint, apparet omnem cylindrum, qui basim aequalem maximo in sphaera circulo, altitudinem autem aequalem sphaerae diametro habeat, ipsius sphaerae sesquialterum esse, et cylindri superficiem sesquialteram superficiei sphaerae. Prop. 37



Si enim sit semicirculus $\alpha\varepsilon\gamma$, cuius diametrus $\alpha\gamma$, et centrum ζ, et punctum ε circumferentiae dimidium, et per puncta α ε γ tres tangentes, velut $\alpha\beta$ $\beta\delta$ $\delta\gamma$ ducantur, et manente rectà $\alpha\gamma$ semicirculus convertatur in eundemque locum, unde moveri coepit, restituatur, cylindrus a rectangulo $\alpha\beta\delta\gamma$ effectus ad sphaeram effectam a semicirculo proportionem sesquialteram (*id est* $1\frac{1}{2} : 1$), eandemque superficies ipsius ad superficiem sphaerae habebit. Nam quia *curva* cylindri superficies, quam recta $\beta\delta$ efficit, aequalis est

---

ϑῶσιν S *Ei*, corr. B 23. τῶν $\overline{AE\Gamma}$ A, distinx. BS 26. ὑπὸ τοῦ $\overline{AB\Gamma\Delta}$ ABS, ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ *Ei*, corr. *Hu* 31. μέση — p. 410, 1. κέντρου interpolatori tribuit *Hu* (conf. adnot. * ad Lat.) 32. τῆς $\overline{AB\Gamma\Delta}$ AS, distinx. B τοῦ add. *Ei* κέντρου] ἐστὶν ἡ *ΑΓ*, οὗτος δὲ ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶν τέσσαρσι μεγίστοις τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια δʹ μεγίστοις ἴση, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς *ΒΔ* γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ· μετὰ δύο ἄρα κύκλων, οἵ εἰσιν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, λόγον ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει τὰ ϛʹ πρὸς τὰ δʹ. οὗτος δὲ ὁ λόγος ἡμιόλιός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας * * * ἕκτον μέρος ἐστὶν τοῦ παντὸς κυλίνδρου, ἡμιόλιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τῆς σφαίρας.



71 [Ἐδείχθη δὲ ἀνώτερον, κἂν μὴ εἰς δύο ἴσα ἡ περιφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου τμηθῇ, ἀλλ᾽ εἰς ὁποσαοῦν, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν, ὡς ἐκεῖ καταγέγραπται, ἡ ὑπὸ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων γινομένη κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὁμοίως δʹ μεγίστοις κύκλοις.]

72 Καὶ τὰ μὲν περὶ τῶν ὑπὸ Ἀρχιμήδους δειχθέντων ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοσαῦτ᾽ ἐστίν, ἑξῆς δὲ τούτοις γράψομεν, ὡς ὑπεσχόμεθα, τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων πέντε σχημάτων, πυραμίδος τε καὶ κύβου καὶ ὀκταέδρου δωδεκαέδρου τε καὶ εἰκοσαέδρου [καὶ τὴν ἔφοδον τῶν ἀποδείξεων ἐχούσας], οὐ διὰ τῆς ἀναλυτικῆς λεγομένης θεωρίας, δι᾽ ἧς ἔνιοι τῶν παλαιῶν

---

3. $\overline{\Delta}$ A, *τέσσαρσι* BS *ἴσην ἄρα* AB, *ἡ ἄρα* S, corr. *Ei* 7. *τὸ* $\overline{ϛ}$ AB, *τὰ ἕξ* S 8. *τέσσαρα* S 13. lacunam indicavit *Co* (temere neglexit *Ei*) 16. *Ἐδείχθη* — 21. *κύκλοις* om. *Co*, interpolatori tribuit *Hu* 16. *ἀνώτερον*] propos. 24 19. *γινομένη** A 22. *τοῦ* ante *Ἀρχιμ.* add. *Ei* 27. *καὶ τὴν* — *ἐχούσας* et p. 412, 1. *τῶν προειρ. σχημάτων* et p. 412, 3. *ἐπεὶ καὶ* — 6. *χρεία* interpolatori tribuit *Hu*

circulo, cuius radius est $\alpha\gamma$ *), isque circulus aequalis est quattuor maximis in sphaera (*quoniam* $\alpha\gamma = 2\alpha\zeta$), itemque sphaerae superficies quattuor maximis *circulis* aequalis demonstrata est [1]), superficies igitur, quam recta $\beta\delta$ efficit, aequalis est sphaerae superficiei. Ergo cum duobus circulis *maximo in sphaera aequalibus*, quae sunt bases cylindri, *tota cylindri superficies* ad superficiem sphaerae proportionem habet $6 : 4 = 1\frac{1}{2} : 1$. Et quia conus basim habens *circulum* superficiei sphaerae aequalem, altitudinem autem radium sphaerae, *ipsi sphaerae aequalis est* (*propos. 35*), *conus igitur basim habens circulum in sphaera maximum, altitudinem autem eandem, quarta pars est sphaerae. Sed idem conus tertia pars est cylindri basim et altitudinem eandem habentis* (*elem. 12, 10*), *id est* [2]) sexta pars totius, *quem initio posuimus*, cylindri; ergo hic cylindrus *ad sphaeram habet proportionem 6 : 4, id est* sesquialter est sphaerae.

LIBRI QUINTI PARS TERTIA.

Quinque polyedrorum Platonicorum comparationes.

Sic igitur cum de iis quae Archimedes *primo* de sphaera et cylindro libro demonstravit satis sit dictum, iam porro, ut polliciti sumus (*cap. 39*), comparationes quinque polyedrorum aequalem superficiem habentium, *videlicet* pyramidis, cubi, octaedri, dodecaedri, icosaedri, ita pertractemus, ut

*) Curvam superficiem, quam recta $\beta\delta$ conversione circa axem $\alpha\gamma$ efficit, aequalem esse circulo, cuius radius est $\alpha\gamma$, ipse Pappus supra propos. 24 demonstravit. Qui si insuper Archimedem citare volebat, illius de sphaer. et cyl. I propositionem 14 afferre et pro verbis, quae nos in Graeco contextu seclusimus, sic fere dicere debuit: μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῆς $B\varDelta$ καὶ διπλασίας τῆς AB, τουτέστιν cet. At interpolator Archimedis propositionem 17, supra apud Pappum propos. 24 citatam, respexit, in qua de cono agitur, non de cylindro.

1) Quoniam ipse Pappus supra propos. 28 extr. demonstravit sphaerae superficiem aequalem esse circulo, cuius radius est sphaerae diametrus, hoc loco pro verbis "isque circulus — demonstrata est" brevius dicere poterat "itemque sphaerae superficies aequalis circulo, cuius radius est $\alpha\gamma$, demonstrata est". Attamen summa facienda erat $4 + 2$ circulorum aequalium maximo in sphaera; ergo statim ab initio, Archimedis dicendi genus secutus, circulum, cuius radius est $\alpha\gamma$, cum quattuor maximis in sphaera aequiperavit.

2) Haec nos partim auctore *Co*, partim nostra coniectura addidimus.

ἐποιοῦντο τὰς ἀποδείξεις [τῶν προειρημένων σχημάτων], ἀλλὰ διὰ τῆς κατὰ σύνθεσιν ἀγωγῆς ἐπὶ τὸ σαφέστερον καὶ συντομώτερον ὑπ' ἐμοῦ διεσκευασμένας [ἐπεὶ καὶ τὰ λήμματα πάντα μικρά τε καὶ μεγάλα διὰ τοὺς πολλοὺς τῶν φιλομαθούντων κατέταξα τὸν ἀριθμὸν ἑκκαίδεκα, ὧν ἐστιν ἐνταῦθα χρεία]. προγράφεται δὲ [τῶν συγκρίσεων] τάδε.

73 μδ' (α'). Παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζον μέν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τετραπλάσιον.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν ἡ ΑΘ (δίχα δηλονότι τέμνουσα τὴν ΒΓ), καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ (δῆλον γὰρ ὅτι ὑπερπεσεῖται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον διὰ τὸ ἐλάσσονα εἶναι τὴν ΑΘ κάθετον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου), καὶ διὰ τοῦ Α παράλληλος ἤχθω τῇ ΒΓ ἡ ΖΑΗ. ἐπεὶ οὖν τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΘ δυνάμει, ἐπίτριτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΘ δυνάμει, τουτέστιν ἡ ΔΒ τῆς ΒΖ· ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΖ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ΒΕ τετράγωνον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ τὸ ΒΕ ἄρα τετράγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ΖΓ παραλληλογράμμου τουτέστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. τὸ ΒΕ ἄρα τετράγωνον ἔλασσον μὲν ἢ τετραπλάσιόν ἐστιν, μεῖζον δὲ ἢ διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

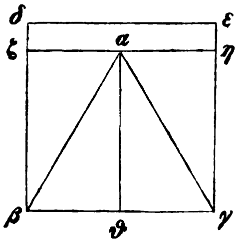
74 με' (β'). Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀκταέδρου κάθετος δυνάμει τρίτον μέρος ἐστὶν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

---

6. δὲ add. et τῶν συγκρίσεων interpolatori tribuit *Hu* 8. $\overline{\mu\Delta}$ A[1] in marg. (BS), α' add. *Hu* 10. ἐλάσσων AB, corr. S 12. δίχα — τὴν ΒΓ et 13. δῆλον — 15. τριγώνου forsitan interpolator addiderit 13. τὸ $\overline{B\Delta}$ $\overline{E\Gamma}$ AB, coniunx. S 19. ἐλασσον (sine acc.) A(B), corr. S 20. τὸ ΖΓ] τὸ $\overline{BZ}$ A[1], τὸ $\overline{ZB}$ A[2]BS, corr. *Co* 22. τουτέστιν

omissa quaestione analytica, quam veterum nonnulli ad demonstrationes adhibuerunt, synthetica ratione utamur a nobis in planiorem et breviorem formam redacta. Praemittuntur autem haec *lemmata*.

XLIV (1). In omni triangulo aequilatero quadratum, quod ab uno latere fit, maius est duplo triangulo aequilatero, minus autem quadruplo. Prop. 38



Sit enim triangulum aequilaterum $\alpha\beta\gamma$, et ad basim $\beta\gamma$ perpendicularis $\alpha\vartheta$ (quae scilicet ipsam $\beta\gamma$ bifariam secat), et erigatur a $\beta\gamma$ quadratum $\beta\delta\varepsilon\gamma$ (apparet autem id ultra triangulum $\alpha\beta\gamma$ excedere, quia perpendicularis $\alpha\vartheta$ minor est latere trianguli), et per α ducatur basi $\beta\gamma$ parallela $\zeta\alpha\eta$. Iam quia est $\beta\gamma = 2\beta\vartheta = \alpha\beta$, *ideoque*

$\alpha\beta^2 = 4\,\beta\vartheta^2$, est igitur in triangulo $\alpha\beta\vartheta$
$\alpha\beta^2 = \frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \alpha\vartheta^2$, *id est*
$3\,\alpha\beta^2 = 4\,\alpha\vartheta^2$, id est
$3\,\beta\delta^2 = 4\,\beta\zeta^2$; ergo $\beta\delta^2 < 4\,\beta\zeta^2$, *id est*
$\beta\delta < 2\beta\zeta$. Et est $\beta\delta : \beta\zeta = \beta\delta^2 : \beta\zeta\cdot\beta\gamma$; ergo
$\beta\delta^2 < 2\beta\zeta\cdot\beta\gamma$, id est
$< 4\ \Delta\ \alpha\beta\gamma$.

Ergo quadratum, quod fit a $\beta\delta$, *id est ab uno trianguli aequilateri $\alpha\beta\gamma$ latere*, minus est quadruplo eo triangulo; sed idem etiam, *quia ex constructione est $\beta\delta > \beta\zeta$, ideoque $\beta\delta^2 > \beta\zeta.\beta\gamma$*, maius est duplo triangulo $\alpha\beta\gamma$.

XLV (2). Quadratum a perpendiculari, quae a sphaerae octaedrum comprehendentis centro ad *unum* octaedri planum *ducitur*, tertia pars est quadrati a sphaerae radio. Prop. 39

ἢ τετραπλ. add. *Ei* (*καὶ ἔλασσον ἢ τετραπλ. Co*) 24. 25. τοῦ $\overline{AB}$ τριγώνου AB, corr. S 26. $\overline{\mu\varepsilon}$ A[1] in marg. (BS), β' add. *Hu* 26. 27. τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον paulo infra (v. adnot. ad p. 444, 4) alieno loco inserta huc transposuit *Hu* (conf. cap. 84)

Ἔστω [τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου *τὸ ΑΒΓ, ἐν τῇ σφαίρᾳ ὄν, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ* τὸ *τοῦ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΔΕ· φανερὸν δὴ ἐκ τῶν σφαιρικῶν ὅτι τὸ Ε κέντρον ἐστὶν τοῦ κύκλου. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ ΒΔ· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΔΕ.*

Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ὀκταέδρῳ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶν τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας δυνάμει τετραπλασία, διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ τοῦ ἀπὸ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ τοῦ μὲν *ἀπὸ ΒΕ τριπλάσιόν ἐστιν διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων, τοῦ δὲ ἀπὸ ΒΔ [ἐστὶν] διπλάσιον, τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΔ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἡμιόλιον. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ τοῖς ἀπὸ ΒΕΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΕΔ ἡμιόλια τοῦ ἀπὸ ΒΕ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΕ τοῦ ἀπὸ ΔΕ· τριπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΕ ΕΔ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΒΔ, τοῦ ἀπὸ ΔΕ.*

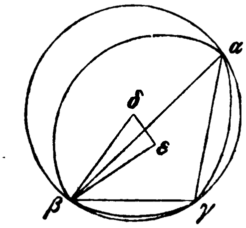
Ἄλλως τὸ αὐτό.

75 *μς'* (γ'). *Ἐκκείσθω τετράγωνον, ἐφ' οὗ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀκταέδρου ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἵ τε ΑΓ ΒΔ διάμετροι τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκ κέντρου ἐστὶν τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις· ἀπὸ τοῦ Ζ κέντρου τοίνυν ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ (ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ), καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστιν τὸ ΑΒΕ τρίγωνον, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ, καὶ ἡ ΕΗ ἥξει διὰ*

---

1. 2. *Ἔστω τρίγωνον ὀκταέδρου τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένου τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ* cet. coni. *Hu* 1. *τοῦ ὀκταέδρου] τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας* ABS, quae om. *Ei* 3. *τὸ* add. *Hu* *ἐπίπεδον* om. S, unde *ἐπὶ τὸν κύκλον κάθετος Ei* 6. *τῆς* ante *ΔΕ* add. *Ei* 8. *διπλάσιός ἐστιν Ei* invitis ABS 9. 10. *δυνάμει τετραπλάσιον ἄρα* ABS, corr. *Co* 11. *ἐπεὶ* BS, *ἐπὶ* A *μὲν* add. *Hu* 11. 12. *διὰ τὸ $\overline{Θ}$* AB cod. *Co*, *διὰ τὸ ἔνατον* S *Ei*, corr. *Co* 12. *στοιχείου* ABS, corr. *Hu* *ἐστὶν* del. *Co* 14. *τὰ ἄρα* S *Co*, *τὸ ἄρα* AB cod. *Co* 18. $\overline{μς}$ A[1] in marg. (BS), *γ'* add. *Hu* 19. *τὸ $\overline{ΑΒ}$ $\overline{ΓΔΕ}$* A, coniunx. BS 22. *τοῦ* * $\overline{Ζ}$ A 23. *ἴση — τῇ ΗΒ* forsitan interpolator addiderit 23. 24. *καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ καὶ ΕΒ* coni. *Co* (oportebat *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ ΕΒ*; at rectam *εβ*,

Sit octaedri sphaerae inscripti triangulum $\alpha\beta\gamma$, et circa id circulus, cuius ad planum a sphaerae centro δ *ducatur* perpendicularis $\delta\varepsilon$; apparet igitur ex *Theodosii* sphaericis (*1*, *1* *coroll.* *2*) punctum ε centrum eius circuli esse. Iungantur $\varepsilon\beta$ $\beta\delta$; dico quadratum a sphaerae radio $\beta\delta$ triplum esse quadrati ab $\varepsilon\delta$.

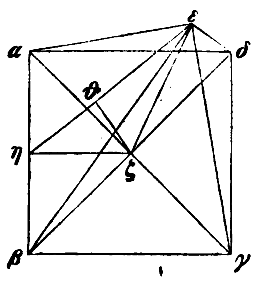


Quoniam enim in *problemate de* octaedro (*elem.* *13*, *14*) quadratum a diametro sphaerae duplum demonstratum est quadrati a latere octaedri, idemque quadruplum est quadrati a radio sphaerae, est igitur

$\beta\gamma^2 = 2\beta\delta^2$. Et quia propter elem. 13, 12 est $\beta\gamma^2$
$= 3\beta\varepsilon^2$, est igitur
$\beta\delta^2 = \beta\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\beta\varepsilon^2$. Sed *in triangulo orthogonio* $\beta\varepsilon\delta$ est $\beta\delta^2$
$= \beta\varepsilon^2 + \varepsilon\delta^2$; ergo
$\beta\varepsilon^2 = 2\varepsilon\delta^2$, itaque $\beta\varepsilon^2 + \varepsilon\delta^2$, id est
$\beta\delta^2 = 3\varepsilon\delta^2$.

ALITER IDEM.

XLVI (3). Exponatur quadratum, in eoque erigatur dimidium octaedrum $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, et iungantur quadrati diametri $\alpha\gamma$ $\beta\delta$ *in puncto* ζ *se invicem secantes*, ac *iungatur* $\varepsilon\zeta$; ergo $\varepsilon\zeta$ radius est sphaerae octaedrum comprehendentis, ut in elementis *13*, *14* *est demonstratum*. Iam a centro ζ ad $\alpha\beta$ perpendicularis ducatur $\zeta\eta$ (est igitur $\alpha\eta = \eta\beta$), et iungatur $\varepsilon\eta$. Et quia triangulum $\alpha\beta\varepsilon$ aequilaterum est, et $\alpha\eta = \eta\beta$, recta *igitur* $\varepsilon\eta$ per centrum circuli triangulo $\alpha\beta\varepsilon$ circumscripti transibit



id est octaedri latus, iam ductam esse scriptor supponit) 24. τὸ *ABE* Co, τὰ $\overline{AB}$ AB, τὸ $\overline{\alpha\beta}$ S τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ *ΑΒΕ* τρίγωνον κύκλου· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ *Ζ* ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ *ΑΒΕ* κύκλου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν *ΕΗ* πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ *ΖΘ*. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΒ*, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ *ΑΖΒ*, ἡ ἄρα ὑπὸ *ΖΑΗ* ἡμίσους ὀρθῆς ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ *ΖΗΑ* ὀρθή· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ *ΑΖΗ* ἡμίσους ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ *ΑΗ* τῇ *ΖΗ*· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ *ΑΖ* τοῦ ἀπὸ *ΖΗ*. ἴση δὲ ἡ *ΑΖ* τῇ *ΕΖ*· τριπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ *ΕΖΗ* τοῦ ἀπὸ *ΖΗ*. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ *ΕΖΗ* ἴσα ἐστὶν τῷ ἀπὸ *ΕΗ* διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν *ΕΖ* πρὸς τὸ *ΑΒΓΔ* τετράγωνον· καὶ τὸ ἀπὸ *ΕΗ* ἄρα τριπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ *ΖΗ*. καὶ ἔστιν ὡς ἡ *ΕΗ* πρὸς τὴν *ΗΖ*, οὕτως ἡ *ΕΖ* πρὸς τὴν *ΖΘ* διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ *ΕΖΗ ΕΖΘ* τρίγωνα· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΘ* καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀκταέδρου τριπλάσιόν ἐστιν.

76 μζʹ (δʹ). Ἔστω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ *ΑΒΓ* ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ *Δ*, καὶ ἤχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τοῦ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἡ *ΔΕ* (τὸ *Ε* ἄρα κέντρον ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ *ΑΒΓ* τρίγωνον γραφομένου κύκλου, ὡς ἔστιν ἐν σφαιρικοῖς), καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ *ΑΕ* ἐκβεβλήσθω· ὅτι ἡ *ΑΕ* τῆς *ΕΖ* διπλῆ ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ *ΒΕ ΕΓ*· ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τρίτον μὲν ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ *ΒΑΕ ΕΒΖ*, διμοίρου δὲ ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ *ΒΕΖ ΑΒΓ*, ἰσογώνιόν ἐστιν τὸ *ΑΒΖ* τρίγωνον τῷ *ΒΕΖ* τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς *ΒΖ*, ἡ *ΒΕ*, τουτέστιν ἡ

---

1. τρίγωνον et ἡ ἄρα — 2. τοῦ *ΑΒΕ* add. A[2] in marg. (BS) 1. κύκλου add. *Hu* auctore *Co* 2. κύκλου add. *Hu*, τριγώνου *Ei* auctore *Co* 9. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ AB cod. *Co*, corr. S *Co* 9. 10. τῶι ἀπὸ $\overline{ΘΗ}$ ABS, corr. *Co* 12. ὡς ἡ $\overline{ΕΒ}$ ABS, corr. *Co* 13. τὰ $\overline{ΕΖ}$ ἡ $\overline{ΕΖΘ}$ A, corr. BS 13. 14. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{ΘΖ}$ AB cod. *Co*, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\overline{ζϑ}$ S, corr. *Co* 17. $\overline{μζ}$ A[1] in marg. (BS). δʹ add. *Hu* 19. τοῦ add. S 20. τὸ δὲ $\overline{Ε}$ ἄρα AB, δὲ del. S 25. ἐπεὶ Paris. 2368, ἐπὶ ABS[a]

(*elem.* 3, 1 *coroll.*); ergo perpendicularis $\zeta\vartheta$ a ζ ad planum circuli $\alpha\beta\varepsilon$ ducta, *quoniam in circuli centrum cadet* (*Theodos. l. c.*), cadet in rectam $\varepsilon\eta$. Iam quia est $\alpha\zeta = \zeta\beta$, rectusque angulus $\alpha\zeta\beta$, est igitur

$\angle\, \zeta\alpha\eta = \frac{1}{2}$R. Sed etiam angulus $\zeta\eta\alpha$ rectus est; itaque etiam reliquus

$\angle\, \alpha\zeta\eta = \frac{1}{2}$R; itaque

$\alpha\eta = \zeta\eta$; ergo

$\alpha\zeta^2 = 2\zeta\eta^2$. Sed aequales sunt $\alpha\zeta$ $\varepsilon\zeta$ *ut radii sphaerae octaedro circumscriptae*; ergo

$\varepsilon\zeta^2 + \zeta\eta^2 = 3\zeta\eta^2$. Sed quia $\varepsilon\zeta$ perpendicularis est ad *planum* quadrati $\alpha\beta\gamma\delta$ (*est enim* ε *polus hemisphaerii dimidio octaedro circumscripti, eiusque basis circulus centro* ζ, *circumscriptus quadrato* $\alpha\beta\gamma\delta$), est $\varepsilon\zeta^2 + \zeta\eta^2$

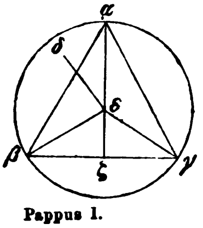
$= \varepsilon\eta^2$, ideoque

$\varepsilon\eta^2 = 3\zeta\eta^2$. Et propter triangulorum $\varepsilon\zeta\eta$ $\varepsilon\vartheta\zeta$ similitudinem est

$\varepsilon\eta : \zeta\eta = \varepsilon\zeta : \vartheta\zeta$; ergo etiam

$\varepsilon\zeta^2 = 3\zeta\vartheta^2$, id est quadratum a radio sphaerae triplum est quadrati ab ea recta, quae ex centro sphaerae ad octaedri planum ducitur.

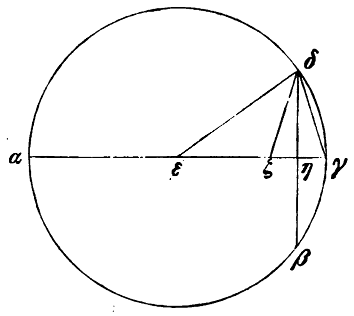
XLVII (4). Sit triangulum aequilaterum $\alpha\beta\gamma$ sphaerae inscriptum, centrum autem sphaerae δ, et ducatur ab eo ad trianguli planum perpendicularis $\delta\varepsilon$ (ergo ε centrum est circuli circa triangulum $\alpha\beta\gamma$ descripti, ut est in *Theodosii* sphaericis 1, 1 *coroll.* 2), et iuncta $\alpha\varepsilon$ producatur *rectamque* $\beta\gamma$ *secet in* ζ; dico esse $\alpha\varepsilon = 2\varepsilon\zeta$. Prop. 40



Iungantur enim $\beta\varepsilon$ $\varepsilon\gamma$; hae igitur inter se aequales sunt. Et quoniam uterque angulorum $\beta\alpha\varepsilon$ $\varepsilon\beta\zeta$ tertia pars recti est, et uterque angulorum $\alpha\beta\gamma$ $\beta\varepsilon\zeta$ duabus partibus recti aequalis, triangulum *igitur* $\alpha\beta\zeta$ simile est triangulo $\beta\varepsilon\zeta$; ita-

ΑΕ, πρὸς ΕΖ. διπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΖ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΖ.

77 μη′ (ε′.) *Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἔστω ἡ ΔΗΒ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΑΓ διαμέτρῳ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἴση ἡ ΖΗ· ὅτι ἡ ΕΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ.*



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΔ ΖΔ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ περιφέρεια δεκαγώνου ἐστίν (πενταγώνου γὰρ ἡ ΔΓΒ), εἴη ἂν ἡ ὑπὸ ΔΕΓ γωνία δύο πέμπτων ὀρθῆς· ὥστε ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΓΔ ΕΔΓ τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς ἐστιν. ἀλλʼ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΓ ἴση ἐστίν, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΓ, ἔστιν ἄρα καὶ ἡ ΔΖ εὐθεῖα τῇ ΔΓ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ἴση οὖσα τῇ ὑπὸ ΔΓΖ τεσσάρων πέμπτων ἐστὶν ὀρθῆς. δύο δὲ πέμπτων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ δύο πέμπτων ὀρθῆς ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΖ τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν, τουτέστιν τῇ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΔΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΔΓΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΓΔ. ἴση δὲ ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΖ· ἡ ΕΓ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ.

78 μθ′ (ϛ′). *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δʹ πρὸς γʹ.*

que $\alpha\beta : \beta\zeta = \beta\varepsilon : \varepsilon\zeta = \alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta$. Sed est $\alpha\beta = 2\,\beta\zeta$; ergo etiam $\alpha\varepsilon = 2\,\varepsilon\zeta$.

XLVIII (5). Sit circulus $\alpha\beta\gamma\delta$ circa centrum ε et diametrum $\alpha\gamma$, sitque pentagoni latus $\delta\eta\beta$ perpendiculare diametro $\alpha\gamma$, et ponatur $\eta\zeta = \eta\gamma$; dico rectam $\varepsilon\gamma$ extrema ac media proportione[1]) sectam esse in puncto ζ, et maius quidem segmentum esse $\varepsilon\zeta$. Prop. 41

Iungantur enim $\varepsilon\delta$ $\zeta\delta$ $\gamma\delta$. Iam quia circumferentia $\gamma\delta$ decagoni est (etenim pentagoni est $\delta\gamma\beta$), angulus $\delta\varepsilon\gamma$ est duarum quintarum partium recti; itaque

$\angle\, \varepsilon\delta\gamma = \angle\, \varepsilon\gamma\delta = \frac{3}{5}\mathrm{R}$.

Sed quia $\zeta\eta$ ipsi $\eta\gamma$ aequalis, et recta $\delta\eta$ *triangulis* $\zeta\delta\eta$ $\gamma\delta\eta$ communis eademque ad $\zeta\gamma$ perpendicularis est, aequales igitur sunt $\delta\zeta$ $\delta\gamma$; itaque etiam

$\angle\, \delta\zeta\gamma = \angle\, \delta\gamma\varepsilon = \frac{3}{5}\mathrm{R}$. Sed est $\angle\, \delta\varepsilon\zeta = \frac{2}{5}\mathrm{R}$; ergo

$\angle\, \delta\zeta\gamma - \angle\, \delta\varepsilon\zeta = \angle\, \varepsilon\delta\zeta = \frac{1}{5}\mathrm{R}$; itaque

$\angle\, \delta\varepsilon\zeta = \angle\, \varepsilon\delta\zeta$, et

$\varepsilon\zeta = \zeta\delta = \delta\gamma$. Iam quia est $\angle\, \varepsilon\delta\gamma = \angle\, \varepsilon\gamma\delta = \angle\, \delta\zeta\gamma$, et *triangulis* $\varepsilon\delta\gamma$ $\delta\gamma\zeta$ communis est angulus $\delta\gamma\varepsilon$, restat igitur

$\angle\, \delta\varepsilon\gamma = \angle\, \gamma\delta\zeta$; itaque

$\Delta\, \delta\varepsilon\gamma \sim \Delta\, \gamma\delta\zeta$, et

$\varepsilon\gamma : \gamma\delta = \gamma\delta : \gamma\zeta$, id est $\varepsilon\gamma \cdot \gamma\zeta = \gamma\delta^2$. Sed *demonstravimus* esse $\gamma\delta = \varepsilon\zeta$; ergo

$\varepsilon\gamma \cdot \gamma\zeta = \varepsilon\zeta^2$, *sive* $\varepsilon\gamma : \varepsilon\zeta = \varepsilon\zeta : \zeta\gamma$; itaque recta $\varepsilon\gamma$ in puncto ζ extrema ac media proportione secta est, ac maius segmentum est $\varepsilon\zeta$.

IL (6). Si recta linea extrema ac media proportione secetur, quadratum a tota ad quintuplum quadratum a minore *parte* maiorem proportionem habet quam $4 : 3$. Prop. 42

1) Conf. supra III propos. 57 adnot. 2.

3. $\overline{\mu\eta}$ A[1] in marg. (BS), ε' add. *Hu* 21. 22. ἐστὶν ἡ — πέμπτων add. A[2] in marg. (BS) 25. ἡ ὑπὸ $\overline{E\varDelta}$ $\overline{*\varGamma}$ A, corr. BS 30. τὸ ἄρα — EZ om. *Ei* 33. $\overline{\mu\Theta}$ A[1] in marg. (BS), ς' add. *Hu*

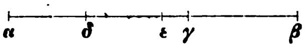
Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΓΒ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δʹ πρὸς γʹ.

Κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΓΔ· γίνεται ἄρα, διὰ τὸ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμῆσθαι τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ ΑΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ ἴσα τῷ τρὶς ἀπὸ ΑΓ, ὡς ἔστιν στοιχείοις δʹ τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματι, τουτέστιν τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ τὸ τρὶς ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ τρὶς ἀπὸ ΓΒ (ἐπεὶ καὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΓ, ὥς ἔστι στοιχείοις τὸ γʹ θεώρημα τοῦ βʹ)· τὰ ἄρα ἀπὸ ΑΒΓ ἴσα ἐστὶν τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ τρὶς ἀπὸ ΓΒ· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΒΓ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΓ, τουτέστιν τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΓΔ. ἀλλὰ τὸ τρὶς ὑπὸ ΑΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τρὶς ἀπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ τρὶς ἀπὸ ΓΔ (ἐπεὶ καὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΓ διὰ τὸ αὐτὸ γʹ τοῦ βʹ στοιχείων θεώρημα)· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ πεντάκις
79 ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τῷ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ. κείσθω δὴ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· φανερὸν γὰρ ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΔΑ τῆς ΓΔ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΓΑ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν τὸ ΔΓ. καθόλου γάρ, ἐὰν ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἡ ΑΒ, καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα οἷον τὸ ΓΒ, καὶ τῇ ΓΒ ἴση τεθῇ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν τὸ ΔΓ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ε,

---

3. *τῆς* ante *ΓΒ* add. *Ei* 5. *ἄρα* add. *Hu* auctore *Co* 8. *δʹ* *Co*, $\overline{Γ}$ A (S, sed id in Paris. 2368 punctis notatum), *Γʹ* B *θεωρήματος* ABS, corr. *Hu* (*στοιχείοις τὸ δʹ θεώρημα τοῦ τρισκαιδεκάτου Ei*) 10. 11. *ἅπαξ ἀπὸ* $\overline{ΑΒ}$ *ἴσον ἐστιν τῷ ὑπὸ* $\overline{ΑΒΓ}$ A(BS), corr. *Co* (*ἅπαξ ὑπὸ ΑΓ* etc. imperite *Ei*) 12. *τὸ τρίτον θεώρημα* S *Ei*, *τῷ γʹ θεωρήματι Hu* 13. *τῷ τρὶς ὑπὸ* $\overline{ΑΓΒ}$ *καὶ* bis scripta in A 18. *ἴσον τὸ ὑπὸ* A, corr. BS 19. *τρίτον τοῦ δευτέρου στοιχείου* S

Recta enim $\alpha\beta$ extrema ac media proportione secta sit in puncto γ, sitque minus segmentum $\gamma\beta$; dico esse



$$\alpha\beta^2 : 5\gamma\beta^2 > 4 : 3.$$

Ponatur $\gamma\delta = \gamma\beta$; fit igitur, quia recta $\alpha\beta$ extrema ac media proportione secta est, propter elem. 13, 4

$$\alpha\beta^2 + \gamma\beta^2 = 3\alpha\gamma^2, \text{ id est, } \textit{quia } \alpha\beta : \alpha\gamma = \alpha\gamma : \gamma\beta,$$
$$= 3\alpha\beta\cdot\beta\gamma, \text{ id est, quia propter elem. 2, 3 est } \alpha\beta\cdot\beta\gamma = \alpha\gamma\cdot\gamma\beta + \beta\gamma^2,$$
$$= 3\alpha\gamma\cdot\gamma\beta + 3\gamma\beta^2; \text{ communi igitur sublato } \gamma\beta^2 \text{ restat}$$
$$\alpha\beta^2 = 3\alpha\gamma\cdot\gamma\beta + 2\gamma\beta^2, \text{ id est}$$
$$= 3\alpha\gamma\cdot\gamma\delta + 2\gamma\delta^2, \text{ id est, quia propter elem. l. c. est } \alpha\gamma\cdot\gamma\delta = \alpha\delta\cdot\delta\gamma + \gamma\delta^2,$$
$$= 3\alpha\delta\cdot\delta\gamma + 5\gamma\delta^2$$
$$= 3\alpha\delta\cdot\delta\gamma + 5\gamma\beta^2.$$

Ponatur $\delta\varepsilon = \alpha\delta$; et quidem apparet esse $\alpha\delta$, *id est* $\delta\varepsilon < \delta\gamma$, quoniam etiam $\gamma\alpha$ extrema ac media proportione secta et $\delta\gamma$ maius segmentum est. Omnino enim, si recta linea, velut $\alpha\beta$, extrema ac media proportione secta sit et minori segmento, velut $\gamma\beta$, aequalis ponatur $\gamma\delta$, etiam $\alpha\gamma$ extrema ac media proportione secta et $\gamma\delta$ maius segmentum est[1]). *Est enim*

$$\alpha\beta : \alpha\gamma = \alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\gamma : \gamma\delta, \textit{ itaque}$$
$$\alpha\gamma : \gamma\beta = \alpha\beta - \alpha\gamma : \alpha\gamma - \gamma\delta$$
$$= \gamma\beta : \alpha\delta, \textit{ id est}$$
$$\alpha\gamma : \gamma\delta = \gamma\delta : \alpha\delta.$$

Eadem ratione etiam $\delta\gamma$ extrema ac media proportione in puncto ε secta et $\delta\varepsilon$ maius segmentum est; ergo est

1) Hoc lemma de minore aureae sectionis parte idem docet, quod similiter de maiore parte Euclides elem. 13, 5. Demonstrationem autem nos addidimus multo breviorem quam Commandinus.

Ei 20. καὶ πεντάκις ABS, τῷ add. *Ei* 25. ἐὰν ἄκρον S, ενακρον A, ἐν ἄκρον B γραμμῇ om. S *Ei* καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΔΕ [καὶ γάρ, τῇ ΔΓ ἴσης τεθείσης τῆς ΓΒ, ἡ ὅλη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΓ ἑκατέρας τῶν ΑΔ ΔΕ, ἐπειδήπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΕ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΓΔ, ἡ ΕΓ πρὸς ΔΕ. ἐλάσσων δὲ ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΕΓ τῆς ΔΕ]· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΔΓΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΓΕ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΓΕ, τουτέστιν τὸ τετράκις ἀπὸ ΔΕ, μεῖζον τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τετράκις ὑπὸ ΓΔΕ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΓΔΕ μεῖζον τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ πεντάκις ὑπὸ ΓΔΕ· τὸ ἄρα ἐννάκις ὑπὸ ΓΔΕ μεῖζόν ἐστιν τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΓΔΕ καὶ τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ, τουτέστιν τοῦ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ· τὸ ἄρα τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ἐννάκις ὑπὸ ΑΔΓ. λόγος δὲ τοῦ τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἐννάκις ὑπὸ ΑΔΓ, ὃν α′ πρὸς γ′· τὸ ἄρα τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ α′ πρὸς γ′· συνθέντι τὸ ἄρα τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ, τουτέστιν τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δ′ πρὸς γ′. ἐδείχθη δὲ τὸ τρὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δ′ πρὸς γ′.

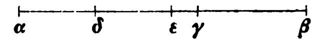
80 Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ πεντάκις ἀπὸ τῆς ΒΓ μεῖζόν ἐστιν.

81 ν′ (ζ′). Τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ εἰκοσάεδρον ἐφ᾽ ἓν ἐπίπεδον τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου καθέτου τὸ δυνάμει δωδεκαπλάσιον μεῖζόν ἐστιν τοῦ δυνάμει πενταπλασίου τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου.

Ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ ὁ δεχόμενος τὸ πεντάγωνον τοῦ [εἰκοσαέδρου, ὡς ἐν στοιχείοις, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΓ διάμετρος τοῦ κύκλου, τὸ δὲ Ε κέντρον, ἡ δὲ ΔΚΒ πεν-

$\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma > \varepsilon\gamma^2$, *et, quia propter elem. l. c. est* $\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma + \varepsilon\gamma^2 = \delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$, *est igitur*

$2\,\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma > \delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$, *multoque magis*



$4\,\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma > \delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$. Commune addatur $4\,\delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon = 4\,\delta\varepsilon^2$ (*quia* $\delta\gamma : \delta\varepsilon = \delta\varepsilon : \varepsilon\gamma$); est igitur

$4\,\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma + 4\,\delta\varepsilon^2 > 5\,\delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$, id est, quia *propter elem. l. c.* est $\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma + \delta\varepsilon^2 = \gamma\delta \cdot \delta\varepsilon$,

$4\,\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon > 5\,\delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon$. Commune addatur $5\,\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon$; est igitur, quia $\delta\gamma \cdot \gamma\varepsilon + \gamma\delta \cdot \delta\varepsilon = \delta\gamma^2$,

$9\,\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon > 5\,\delta\gamma^2$. *Et ex constructione est* $\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon = \alpha\delta \cdot \delta\gamma$; ergo *propter elem. 5, 8* est

$3\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma : 5\,\delta\gamma^2 > 3\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma : 9\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma$, id est $> 1 : 3$; ergo componendo (*infra VII propos. 3*)

$3\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma + 5\,\delta\gamma^2 : 5\,\delta\gamma^2 > 3 + 1 : 3$, id est

$3\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma + 5\,\gamma\beta^2 : 5\,\gamma\beta^2 > 4 : 3$. Sed demonstratum est (*p. 421*) $3\,\alpha\delta \cdot \delta\gamma + 5\,\gamma\beta^2 = \alpha\beta^2$; ergo

$\alpha\beta^2 : 5\,\gamma\beta^2 > 4 : 3$.

Hinc apparet etiam esse $\alpha\beta^2 > 5\,\gamma\beta^2$.

L (7). Duodecuplum quadratum a perpendiculari, quae a sphaerae icosaedrum comprehendentis centro ad unum icosaedri planum *ducitur*, maius est quintuplo quadrato ab icosaedri latere. Prop. 48

Exponatur circulus $\alpha\beta\gamma$ icosaedri pentagonum comprehendens, ut est in elementis (*13, 16*), et sit eius circuli diametrus $\alpha\gamma$, centrum ε, recta autem $\delta\varkappa\beta$ *sit* pentagoni ae-

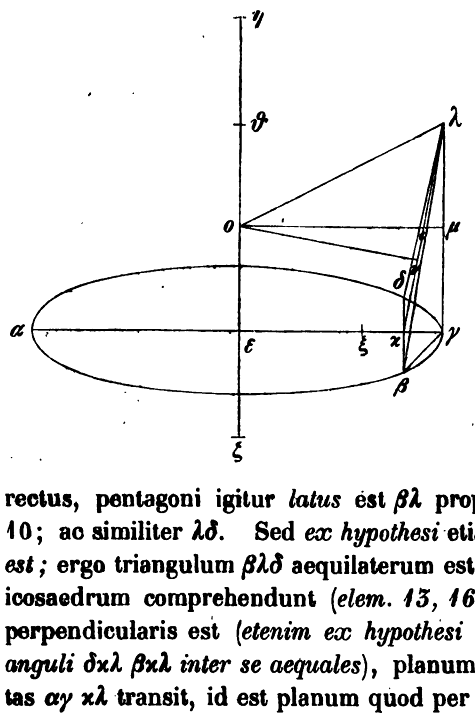
1. *καὶ γάρ* — 7. *τῆς ΔΕ* interpolatori tribuit *Hu* 3. *κατὰ τὸ Γ Hu, καὶ τῶι* $\overline{Γ}$ AB, *τῷ* $\overline{γ}$ S *Ei* 13. *τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΓΔΕ* add. *Co* 15. *ὑπὸ* (post *ἐννάκις*) S[s] *Ei*, om. AB Paris. 2368 *μείζων ἐστιν* A, *μεῖζον ἐστὶ* B, accentum corr. S 19. 20. *πρὸς τὸ ἐννάκις ὑπὸ* $\overline{ΑΔΓ}$ *ὃν* $\overline{α}$ *πρὸς* $\overline{Γ}$ *τὸ ἄρα* $\overline{Γ}$ *ὑπὸ* $\overline{ΑΔΓ}$ add. A[2] in marg. (BS, nisi quod hi *ἄρα τρὶς ὑπὸ*) 22. *πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ* add. *Co* 29. $\overline{Ν}$ A[1] in marg. (BS), *ζ* add. *Hu* 30. *τῶν Ei* auctore *Co* pro *τὴν* 36. *δὲ* (ante *E*) add. *Hu*

ταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν διάμετρον [αὕτη δέ ἐστιν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις], καὶ ἀπὸ τῶν Ε Γ ἀνεστάτωσαν ὀρθαὶ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου αἱ ΖΕΗ ΓΛ, καὶ ἑκατέρα μὲν τῶν ΕΘ ΓΛ ἑξαγώνου, ἑκατέρα δὲ τῶν ΕΖ ΗΘ δεκαγώνου, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΘ δίχα κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶν τῆς σφαίρας, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ιϛʹ θεώρημα τοῦ ιγʹ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ ΛΒ ΛΚ ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΓΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΒΓ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΓΛ, πενταγώνου ἄρα ἐστιν ἡ ΒΛ διὰ τὸ ιʹ θεώρημα τοῦ ιγʹ· ὁμοίως καὶ ἡ ΛΔ. ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΔ· τὸ ἄρα ΒΛΔ τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν τῶν περιεχόντων τὸ εἰκοσάεδρον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΛΚ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, *καὶ τὸ διὰ τῶν ΛΓ ΚΛ ἄρα ἐπίπεδον, ὅπερ ἐστὶν τὸ διὰ τῶν ΕΗ ΓΛ παραλλήλων, ὀρθόν ἐστιν πρὸς τὴν ΒΔ [καὶ ἡ ΒΔ ἄρα ὀρθή ἐστιν πρὸς αὐτό· ταῦτα γὰρ ἐν τοῖς στερεοῖς τῶν στοιχείων ἐδείχθη]· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΒΔ ἐπίπεδα, ὧν ἐστιν καὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον, ὀρθά ἐστιν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΕΗ ΓΛ παραλλήλων ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν καὶ τὸ ΓΚΛ τρίγωνον· ὥστε καὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον ὀρθόν ἐστιν πρὸς τὸ ΓΚΛ. ἤχθω ἐπὶ τὴν ΚΛ κάθετος ἡ ΟΝ· δύο οὖν ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ ἀλλήλοις τό τε ΓΚΛ καὶ τὸ ΒΔΛ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΚΛ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ὀρθή ἐστιν ἡ ΟΝ· καὶ ἡ ΟΝ ἄρα κάθετός ἐστιν*

---

2. 3. *αὕτη — στοιχείοις* interpolatori tribuit *Hu* 3. *τῶν* $\overline{ΕΓ}$ AB, distinx. S 4. *αἱ ΖΕΗ ΓΛ Hu*, *αἱ* $\overline{ΖΕ}$ $\overline{ΗΓΛ}$ ABS, *αἱ ΖΕΘΗ ΓΛ Co*, *αἱ ΕΗ ΓΛ Ei* *ἑκατέρας* ABS, corr. *Ei* auctore *Co* 4. 5. *τῶν* $\overline{ΕΘΓΛ}$ A, distinx. BS 7. *θεωρήματι Hu* 10. *ὑπὸ ΒΓΛ Co* pro *ὑπὸ* $\overline{ΒΛΓ}$ *διὰ τὸ θεώρημα* ABS *Ei*, numerum add. *Co* 11. *ἔτι* B[3], *ἐστιν* A, *ἐστὶ* B[1]S *Ei* 13. 14. *πρὸς ὀρθάς ἐστι* add. *Ei* auctore *Co*, tum post *καὶ τὸ* add. *α* AS cod. *Co*, *αʹ* B, quod punctis notatum in S del. *Co* 14. *τὸ* (post *ἐστὶν*) *Co*, *ηο* A cod. *Co*, *ἡ ὸ* B, $\overline{ηο}$ S 15. *καὶ ἡ ΒΔ* — 17. *ἐδείχθη* interpolatori tribuit *Hu* 18. *τὸ ΒΔΛ Hu*, *τὸ ΒΛΔ Co* pro *τὸ* $\overline{ΒΛΛ}$ 20. *τὸ ΒΔΛ Hu* pro *τὸ* $\overline{ΒΛΔ}$ 22. 23. *τό τε* $\overline{ΓΚΔ}$ *καὶ τὸ* $\overline{ΒΛΛ}$ ABS, corr. *Co* (*τό τε ΛΓΛ καὶ τὸ ΒΛΔ Ei*)

quilateri *circulo inscripti* latus idque ad diametrum perpendiculare, et a punctis ε γ erigantur ad circuli planum perpendiculares $\zeta\varepsilon\eta$ $\gamma\lambda$, et sit utraque rectarum $\varepsilon\vartheta$ $\gamma\lambda$ hexagoni *latus circulo* $\alpha\beta\gamma$ *inscripti*, utraque autem $\varepsilon\zeta$ $\eta\vartheta$ decagoni, et secetur $\varepsilon\vartheta$ bifariam in puncto o; ergo o est centrum sphaerae *icosaedrum comprehendentis*, ut *est* in elementis libri 13 theorematis 16 *corollario*[1]. Iungantur $\lambda\delta$ $\lambda\beta$ $\lambda\varkappa$ $\beta\gamma$. Iam quia $\gamma\lambda$ hexagoni *latus* est et $\beta\gamma$ decagoni et angulus $\beta\gamma\lambda$ rectus, pentagoni igitur *latus* est $\beta\lambda$ propter libri 13 theorema 10; ac similiter $\lambda\delta$. Sed *ex hypothesi* etiam $\beta\delta$ *pentagoni latus est*; ergo triangulum $\beta\lambda\delta$ aequilaterum est et quidem ex iis quae icosaedrum comprehendunt (*elem. 13, 16*). Et quia $\lambda\varkappa$ ipsi $\beta\delta$ perpendicularis est (*etenim ex hypothesi est* $\delta\varkappa = \varkappa\beta$, *ideoque anguli* $\delta\varkappa\lambda$ $\beta\varkappa\lambda$ *inter se aequales*), planum igitur quod per rectas $\alpha\gamma$ $\varkappa\lambda$ transit, id est planum quod per parallelas $\varepsilon\eta$ $\gamma\lambda$, perpendiculare est rectae $\beta\delta$ (*propter elem. 11, 4, quia* $\beta\delta$ *utrique rectarum* $\alpha\varkappa\gamma$ $\lambda\varkappa$ *perpendicularis est*); ergo etiam (*elem. 11, 18*) omnia quae per $\beta\delta$ transeunt plana, quorum e numero est triangulum $\beta\delta\lambda$, perpendicularia sunt ad planum quod per parallelas $\varepsilon\eta$ $\gamma\lambda$ transit, in quo est triangulum $\gamma\varkappa\lambda$; itaque etiam triangulum $\beta\delta\lambda$ triangulo $\gamma\varkappa\lambda$ perpendiculare est. Ducatur ad $\varkappa\lambda$ perpendicularis $o\nu$; duo igitur sunt plana $\gamma\varkappa\lambda$ $\beta\delta\lambda$ sibi invicem perpendicularia, eorumque communi sectioni $\varkappa\lambda$ in



1) Ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου (id est in nostra figura $\varepsilon\vartheta$) καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου (id est $\varepsilon\zeta$ $\eta\vartheta$) τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (scil. ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται) ἐγγραφομένων.

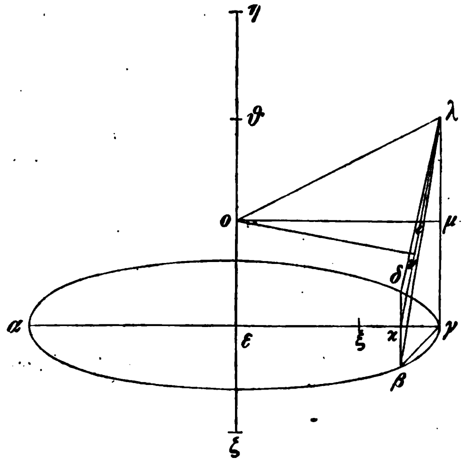
ἐπὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον. καὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΛΒ τῆς ΒΚ· ὥστε διπλῆ ἐστιν ἡ ΛΝ τῆς ΝΚ διὰ τὸ δ'. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΓΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΜ· ἔσται δὴ παράλληλος ἡ ΟΜ τῇ ΕΓ (ἴση γὰρ ἡ ΕΟ τῇ ΓΜ, ἐπεὶ καὶ αἱ ΓΛ ΕΘ διπλαῖ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν), καὶ ἡ ΛΙ τῇ ΙΚ ἴση (τριγώνου γὰρ τοῦ ΓΚΛ παρὰ τὴν ΓΚ ἦκται ἡ ΙΜ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΜ τῇ ΜΛ). καὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΛΝ τῆς ΝΚ· οἵων ἄρα ἡ ΚΛ ϛ', ἡ ΛΝ δ' καὶ ἡ ΚΝ β', καὶ ἑκατέρα τῶν ΛΙ ΙΚ τριῶν, καὶ λοιπὴ ἡ ΙΝ ἑνός· τριπλῆ ἄρα ἡ ΛΙ τῆς ΙΝ· λέγω οὖν ὅτι δώδεκα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονά ἐστιν ε' τῶν ἀπὸ ΒΔ.

82 Κείσθω τῇ ΚΓ ἴση ἡ ΚΞ· διὰ μὲν οὖν τὸ ε' θεώρημα τῶν προγραφομένων ἡ ΕΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΞ, διὰ δὲ τὸ ϛ' τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τοῦ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΞΓ μεῖζον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς ΞΓ μεῖζόν ἐστιν ἢ πενταπλάσιον, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΓ μεῖζον ἢ εἰκοσαπλάσιον. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΓ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΚ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΟΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΙ (ἰσογώνια γὰρ τὰ ΟΝΙ ΛΙΜ ΛΚΓ τρίγωνα)· τὸ ἄρα ἀπὸ ΟΝ εἴκοσι τῶν ἀπὸ ΝΙ μεῖζόν ἐστιν. καὶ λϛ' ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ ψκ' τῶν ἀπὸ ΝΙ μείζονά ἐστιν. ψκ' δὲ τὰ ἀπὸ ΝΙ ὀγδοήκοντά ἐστιν τὰ ἀπὸ ΛΙ (ἐδείχθη γὰρ τριπλῆ ἡ ΛΙ τῆς ΙΝ). ὀγδοήκοντα δὲ τὰ ἀπὸ ΙΛ εἴκοσί ἐστιν τὰ ἀπὸ ΛΚ (διπλῆ γὰρ ἡ ΛΚ τῆς ΛΙ). εἴκοσι δὲ τὰ ἀπὸ ΚΛ ιε' ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΒΔ

---

1. καὶ διπλῆ — τῆς ΒΚ om. *Ei* τῆς ΒΚ *Co* pro τῆς ΟΚ 3. καὶ add. A[1] super vs. 4. τῇ ΓΜ *Co*, τῆς Μ AB, τῇ μγ S *Ei* 8. οιον (sine spir. et acc.) A, οἷον B, corr. S ἡ ΛΝΔ καὶ ἡ ΚΝΒ A, distinguenda esse significavit B, ἡ λν τεσσάρων καὶ ἡ κν δύο S *Ei* 11. ἐστιν ε'] ἐστιν τε A, ἐστι B, ἐστι τριῶν S, ἐστι πέντε *Ei* auctore *Co* 12. ἡ ΚΞ *Co*, ἡ ΗΚΞ Η/Γ A, ἡ ηκξ νεγ B (ac similiter cod. *Co*), ἡ νκξ S 14. 15. ἡ ΕΞ] τὸ ϛ AB, τὸ σ S, τὸ ΕΞ *Co*, ἡ corr. *Ei* 20. 21. γὰρ τὰ ΟΝ Ι Λ ΙΜΛ ΚΓ A, γὰρ τὰ ονι λιμ ακγ BS, ΛΙΜ om. *Ei*, ΛΚΓ corr. *Co* 23. ΨΚ ΔΕ τὰ AB, corr. S 25. 26. γὰρ ἡ ΔΚ τῆς ΔΙ ABS, corr. *Co* 26. ἀπὸ ΚΛΙΕ τῶν ἀπὸ ΒΔ μείζονα A (BS, nisi quod κλ ιε), τα corr. et μείζονα del. *Co*, ἐστὶν add. *Hu*

plano $\gamma\kappa\lambda$ perpendicularis est $o\nu$; ergo $o\nu$ perpendicularis est ad triangulum $\beta\delta\lambda$ (*elem. 11 def. 3*). Atque est $\lambda\beta = \beta\delta = 2\beta\kappa$; itaque etiam $\lambda\nu = 2\nu\kappa$ propter *superius lemma 4*. Secetur autem $\gamma\lambda$ bifariam in puncto μ, et iungatur $o\mu$ *rectam* $\kappa\lambda$ *secans in puncto* ι; parallelae igitur erunt $o\mu$ $\varepsilon\gamma$ (rectae enim εo $\gamma\mu$ et parallelae sunt et, ut dimidiae $\varepsilon\vartheta$ $\gamma\lambda$, inter se aequales), et $\lambda\iota = \iota\kappa$ (nam in triangulo $\gamma\kappa\lambda$ ipsi $\kappa\gamma$ parallela ducta est $\iota\mu$, estque $\gamma\mu = \mu\lambda$). Et *demonstrata* est $\lambda\nu = 2\nu\kappa$, *estque tota* $\lambda\kappa = 3\nu\kappa$, et utraque rectarum $\lambda\iota$ $\iota\kappa$



$= 1\frac{1}{2}\nu\kappa$, et $\iota\nu$ (id est $\iota\kappa - \nu\kappa$) $= \frac{1}{2}\nu\kappa$; ergo inter se sunt

$$\lambda\kappa : \lambda\nu : \lambda\iota : \kappa\nu : \iota\nu = 6 : 4 : 3 : 2 : 1,$$

itaque $\lambda\iota = 3\,\iota\nu$; iam dico esse $12\,o\nu^2 > 5\beta\delta^2$.

Ponatur $\kappa\xi = \kappa\gamma$; ergo propter superius theorema 5 recta $\varepsilon\gamma$ extrema ac media proportione secta est in puncto ξ et maius eius segmentum est $\varepsilon\xi$, et propter 6 *theorema extremum* (quia $\xi\gamma$ est minus segmentum) est

$\varepsilon\gamma^2 > 5\,\xi\gamma^2$, id est (*quia* $\xi\gamma = 2\kappa\gamma$)
$> 20\,\kappa\gamma^2$. Et est
$\varepsilon\gamma^2 : \kappa\gamma^2 = \gamma\lambda^2 : \kappa\gamma^2 = o\nu^2 : \iota\nu^2$ (est enim *ex constructione* $\varepsilon\gamma = \gamma\lambda$, et triangula *orthogonia* $\lambda\gamma\kappa$ $o\nu\iota$ inter se sunt similia, quia utrumque triangulo $\lambda\mu\iota$ simile); ergo est
$o\nu^2 > 20\,\iota\nu^2$, itaque
$36\,o\nu^2 > 720\,\iota\nu^2$. Sed sunt $720\,\iota\nu^2 = 80\,\lambda\iota^2$ (nam demonstrata est $\lambda\iota = 3\,\iota\nu$, *id est* $\lambda\iota^2 = 9\,\iota\nu^2$), et $80\,\lambda\iota^2 = 20\,\lambda\kappa^2$ (est enim $\lambda\kappa = 2\lambda\iota$), et $20\,\lambda\kappa^2 = 15\beta\delta^2$ (nam

(ἰσόπλευρον γάρ ἐστιν τὸ ΔΒΔ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἡ ΔΚ, καὶ ἐπίτριτος· δυνάμει ἡ ΒΔ τῆς ΚΔ)· ὥστε λς' τὰ ἀπὸ ΟΝ δεκαπέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ, καὶ δώδεκα ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονα πέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

83 *να' (η'). Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶν τῇ ὑποκειμένῃ.*

Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΑΓ, οὕτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ συνθέντι ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶν τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ διὰ τὸ η' θεώρημα τοῦ β' στοιχείων, τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶν τῆς ΔΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΔΕΖ πρὸς ΔΖ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότεραι αἱ ΑΒ ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ, τουτέστιν δύο αἱ ΑΒ, πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότεραι αἱ ΔΕ ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ, τουτέστιν δύο αἱ ΔΕ, πρὸς ΔΖ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΔΖ.

---

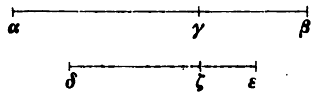
1. *τὸ* om. AB, add. S 2. post $\overline{\lambda\varsigma}$ add: $\overline{\Delta}$ AS cod. *Co*, δ' B, del. *Co* 3. 4. *καὶ δώδεκα — ἀπὸ ΒΔ* om. S, quapropter ex Latinis Commandini *τουτέστι δώδεκα τὰ ἀπὸ ΟΝ πέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ μείζονά ἐστιν* add. *Ei* 4. *ἀπὸ ΟΝ* (ante *μείζονα*) *Co*, *ἀπὸ* $\overline{\Gamma E}$ AB 5. $\overline{N\Delta}$

triangulum $\beta\delta\lambda$ aequilaterum est, et perpendicularis $\lambda\varkappa$, itaque $3\,\beta\delta^2 = 4\,\lambda\varkappa^2$, *ut supra lemmate 1 medio demonstravimus*); ergo sunt

$36\,o\nu^2 > 15\,\beta\delta^2$, id est

$12\,o\nu^2 > 5\,\beta\delta^2$, q. e. d.

LI (*8*). Si duae rectae extrema ac media proportione secentur, sunt in proportione infra proposita. Prop. 44*)



Secetur enim $\alpha\beta$ extrema ac media proportione in puncto γ, sitque maius segmentum $\alpha\gamma$, et similiter $\delta\varepsilon$ in puncto ζ, sitque maius segmentum $\delta\zeta$; dico esse ut totam $\alpha\beta$ ad maius segmentum $\alpha\gamma$, ita totam $\delta\varepsilon$ ad maius segmentum $\delta\zeta$.

Quoniam enim est $\alpha\beta \cdot \beta\gamma = \alpha\gamma^2$, et $\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta = \delta\zeta^2$, est igitur

$\alpha\beta \cdot \beta\gamma : \alpha\gamma^2 = \delta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta : \delta\zeta^2$, itaque etiam

$4\,\alpha\beta \cdot \beta\gamma : \alpha\gamma^2 = 4\,\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta : \delta\zeta^2$, et componendo

$4\,\alpha\beta \cdot \beta\gamma + \alpha\gamma^2 : \alpha\gamma^2 = 4\,\delta\varepsilon \cdot \varepsilon\zeta + \delta\zeta^2 : \delta\zeta^2$, id est propter elem. 2, 8

$(\alpha\beta + \beta\gamma)^2 : \alpha\gamma^2 = (\delta\varepsilon + \varepsilon\zeta)^2 : \delta\zeta^2$; itaque

$\alpha\beta + \beta\gamma : \alpha\gamma = \delta\varepsilon + \varepsilon\zeta : \delta\zeta$, et componendo

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\beta : \alpha\gamma = \delta\varepsilon + \delta\zeta + \zeta\varepsilon : \delta\zeta$, id est

$2\,\alpha\beta : \alpha\gamma = 2\,\delta\varepsilon : \delta\zeta$, et antecedentium dimidia

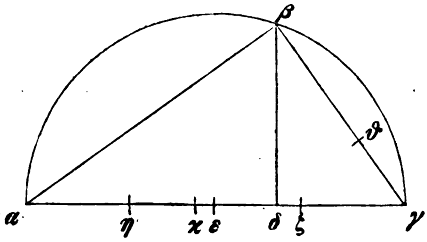
$\alpha\beta : \alpha\gamma = \delta\varepsilon : \delta\zeta$.

*) Idem theorema iisdem fere verbis compositum exstat in Hypsiclis libro qui vulgo fertur primo (propositione 7, Euclid. ed. Peyrard vol. III p. 504).

A[1] in marg. (BS), *η'* add. *Hu* 9. post *ΔE* add. *ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω Ei* ex Hypsicle 13. *ἀπὸ τῆς BΔZ* AB, *ἀπὸ τῆς βζδ* S, corr. *Co* 18. 19. *τοῦ ἀπὸ /Γ πρὸς τὸ ΛΓ* A, *τοῦ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ αγ* B, *ἀπὸ* add. S 19. *μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛZ* A, corr. BS 20. *ἀλλὰ τὸ* — 23. *τῆς ΔEZ* om. Hypsicles 21. 22. *διὰ τὸ ζ /η θεώρημα* A, corr. B (*διὰ τὸ ὄγδοον θεώρ.* S *Ei*) 22. *στοιχείου* ABS, corr. *Hu* 25. *τῆς AΓ Co* pro *τῆς BΓ* 28. *συναμφότερος αἱ* A, *συναμφότερος ἡ* S, corr. B (ut mox *συναμφότεραι αἱ ΔE EZ* ABS)

84 Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν ὦσιν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ὡς αἱ ΑΒ ΔΕ, καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ κατὰ τὰ Γ Ζ, ἔσται τὰ μείζονα τμήματα αὐτῶν ἴσα καὶ τὰ ἐλάσσονα ὁμοίως ἴσα. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐδείχθη, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· ~

85 νβ′ (ϑ′). Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ τριπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, καὶ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ· ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΒΓ δυνάμει τριπλασίων ἐστίν (ὡς γὰρ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓ ΒΔΓ τριγώνων). τετμήσθω δ' ἡ ΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τῷ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΒΘ, καὶ γεγενήσθω ἡ ΓΕ τῆς ΕΖ δυνάμει πενταπλῆ (δυνατὸν δὲ τοῦτο· ἡ γὰρ ΕΓ τῆς ΕΔ [μήκει] τριπλῆ [δυνάμει ἐνναπλῆ]) · λέγω ὅτι λόγος ἐστὶν τῆς ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ δυνάμει ὃν ε′ πρὸς γ′.



Κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΖΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Κ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΓΕ ἑαυτῆς τμήματος τῆς ΕΖ πενταπλάσιον δύναται, καὶ ἡ διπλῆ τῆς ΕΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Κ, ἡ ΚΖ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ΖΓ διὰ τὸ β′ θεώρημα τοῦ ιγ′ στοιχείων· ὥστε καὶ ἡ ΓΗ ἄκρον καὶ

2. ὡς αἱ $\overline{AB}$ $\overline{B\Delta}$ ABS, corr. *Ei* 3. κατὰ τὰ $\overline{\Gamma Z}$ A, distinx. BS 7. $\overline{NB}$ A[1] in marg. (BS), ϑ′ add. *Hu* 8. καὶ τῆς $\overline{A\Gamma}$ πρὸς AB, corr. S 11. 12. τῶν $\overline{AB}$ $\overline{\Gamma B}$ $\overline{\Delta\Gamma}$ A, recte distinx. BS 13. δη $\overline{B\Gamma}$ A; δὲ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ B[1], δὴ ἡ $\overline{\beta\gamma}$ B[3]S, corr. *Hu* 20. μήκει et 21. δυνάμει ἐνναπλῆ del. *Hu* (vide adnot. 1 ad Latina) 21. ὁ ante λόγος add. S *Ei* 22. πρὸς τὴν $\overline{\Gamma Z}$ AB *Co*, πρὸς τὴν $\overline{\beta\gamma}$ S, quod in πρὸς τὴν $\overline{\zeta\gamma}$ corr. *Sca* 27. τῶι $\overline{KH}$ $\overline{KZ}$ ἄρα AB, distinx. S 28. στοιχείου ABS, corr. *Hu* auctore *Co*

Hinc igitur apparet, si duae rectae, velut $\alpha\beta$ $\delta\varepsilon$, *inter se* aequales sint, et utraque earum extrema ac media proportione secetur, *velut* in punctis γ ζ, segmenta maiora, et similiter minora, inter se aequalia esse. Nam quia demonstrata est $\alpha\beta : \alpha\gamma = \delta\varepsilon : \delta\zeta$, vicissim etiam *est* $\alpha\beta : \delta\varepsilon = \alpha\gamma : \delta\zeta$; *ergo* $\alpha\gamma = \delta\zeta$, *et* $\gamma\beta = \zeta\varepsilon$**).

LII (*9*). Sit semicirculus $\alpha\beta\gamma$, cuius centrum ε, et $\alpha\gamma = 3\gamma\delta$, et ipsi $\alpha\gamma$ perpendicularis $\delta\beta$, et iungatur $\beta\gamma$; ergo est $\alpha\gamma^2 = 3\beta\gamma^2$ (nam propter triangulorum $\alpha\beta\gamma$ $\beta\delta\gamma$ similitudinem est $\alpha\gamma : \beta\gamma = \beta\gamma : \gamma\delta$, *id est propter elem. 6, 20 coroll. 2* $\alpha\gamma : \gamma\delta = \alpha\gamma^2 : \beta\gamma^2$). Sed recta $\beta\gamma$ secetur extrema ac media proportione in puncto ϑ, sitque maius eius segmentum $\beta\vartheta$, et *sumatur rectae* $\gamma\varepsilon$ *pars* $\varepsilon\zeta$ *ita, ut* sit $5\,\varepsilon\zeta^2 = \gamma\varepsilon^2$, quod quidem fieri potest; est enim $\gamma\varepsilon = 3\,\varepsilon\delta$ *etc.* [1]); dico esse $\beta\vartheta^2 : \zeta\gamma^2 = 5 : 3$. Prop. 45

Ponatur $\varepsilon\eta = \varepsilon\zeta$, et $\zeta\eta$ extrema ac media proportione secetur in puncto $\varkappa$, sitque maior *pars* $\zeta\varkappa$. Et quia quadratum a $\gamma\varepsilon$ quintuplum est quadrati ab $\varepsilon\zeta$, *id est a* segmento rectae $\gamma\varepsilon$, et dupla $\varepsilon\zeta$, *id est* $\zeta\eta$, extrema ac media proportione secta est in puncto $\varkappa$, est igitur $\varkappa\zeta = \zeta\gamma$ propter theorema 2 libri 13 elementorum; itaque etiam $\gamma\eta$ extrema

**) Hoc corollarium neque apud Hypsiclem exstat, neque, si ab hac Pappi collectione absit, quisquam desideret; tamen omnibus rebus circumspectis causam satis idoneam, cur id interpolatori tribueremus, non invenimus.

1) Quomodo datâ rectâ, velut $\gamma\varepsilon$, pars eius $\varepsilon\zeta$ ita inveniatur, ut sit $5\,\varepsilon\zeta^2 = \gamma\varepsilon^2$, Euclides demonstrat elem. 13 propositione 16 fere extrema (p. 269 ed. August.), quem locum Pappus perinde citare poterat ac paulo infra cap. 94, ubi genuinam scripturam ὡς ἔστιν λῆμμα ιγ' στοιχείων nostra coniectura restituimus. Sed quoniam in hac propositione peculiaris is casus occurrit, ut semicirculi radii $\varepsilon\gamma$ tertia pars abscissa sit $\varepsilon\delta$, Graecus scriptor paucissimis verbis ἡ γὰρ ΕΓ τῆς ΕΔ τριπλῆ significavit rectam $\varepsilon\zeta$ ea ratione inveniri posse quam paulo post initio propositionis 48 (p. 437) acutissime exponit; nam quae recta illic est $\gamma\vartheta$, ea hic notatur $\varepsilon\zeta$. Facile autem apparet ista quae a Graeco contextu seclusimus ab interpolatore addita esse, qui locum propter nimiam brevitatem obscurissimum (neque nos per eas tenebras nisi post multos indagandi errores irritosque conatus penetravimus) intellegere non posset.

μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΖΗ. ἀλλὰ διὰ τὸ προδειχθέν ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΘ, ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΖΓ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τῆς μὲν ΒΓ δυνάμει τριπλῆ ἐστιν, τῆς δὲ ΗΖ πενταπλῆ, οἵων ἄρα δυνάμει ἡ ΔΓ ιε', τοιούτων ἡ μὲν ΒΓ ε', ἡ δὲ ΖΗ γ'· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΖΗ λόγον ἔχει δυνάμει ὃν ε' πρὸς γ'· ὥστε καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει δυνάμει ὃν ε' πρὸς γ'.

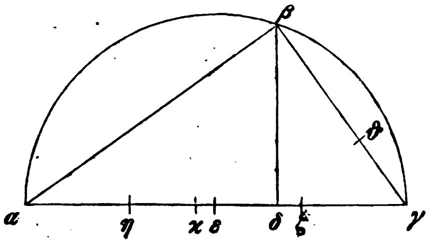
86 νγ' (ι'). Πάλιν ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΔΒΓ οὗ κέντρον τὸ Ζ, καὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΓΖ τοῦ ἀπὸ ΕΖ, καὶ τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Δ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΒΔ· ὅτι τὰ ἀπὸ ΓΒ ΒΔ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΕ.

Κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΖΗ· ἡ ΗΓ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ε, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΗΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΗ, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΕΓ τῇ ΔΗ (ὅτι καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ), ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΓ τῷ ἀπὸ ΕΗ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΗ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΕΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ (ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ). ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΕΓ [τοῦτο γὰρ δείκνυται διὰ τοῦ α' τοῦ ϛ' στοιχείων, τετραγώνου ἀναγραφέντος ἀπὸ τῆς ΕΓ καὶ συμπληρωθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΔΕ παραλληλογράμμου]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

---

6. τῆς ΔΕ ΗΖ A[1], corr. A rec. BS 7. ἡ δὲ ΖΗΓ A, distinx. B (ἡ δὲ ζη τριῶν S Ei) 8 et 9. δυνάμει ὃν Hu pro ὃν δυνάμει Ε πρὸς τὰ Γ A, πέντε πρὸς τὰ τρία B, πέντε πρὸς τρία S Ei 10. ΝΓ A[1] in marg. (BS), ι' add. Hu οὗ Hu auctore Co pro καὶ 11. τὸ ἀπὸ ΓΒ ΒΔ A, τὸ ἀπὸ γδβ βδ B (sed γδβ ut spurium notatum), corr. S (τὰ ἀπὸ ΓΒΔ Ei) post πενταπλάσια add. ἐστι Ei, item vs. 18 post ἄρα 15. ἡ ΖΗ ΗΓ AB, ἡ add. S 17. τῶ ἀπὸ ΘΗ A(BS), corr. Co 21. ὡς ἡ Ε πρὸς ABS, corr. Co (ὡς ἡ ΕΗ Ei) 23. τοῦτο — 25. παραλληλογράμμου interpolatori tribuit Hu 24. στοιχείων AB, στοιχείου S Ei 26. πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ ABS, corr. Co

ac media proportione secta est in puncto ζ, maiusque eius segmentum est $\zeta\eta$ (*elem. 13, 5*). Sed propter superius *lemma 8* est $\gamma\beta : \beta\vartheta = \gamma\eta : \eta\zeta = \eta\zeta : \zeta\varkappa$, id est $\eta\zeta : \zeta\gamma$; et vicissim igitur $\gamma\beta : \eta\zeta = \beta\vartheta : \zeta\gamma$. Iam quia *initio demonstratum est* $\alpha\gamma^2 = 3\beta\gamma^2$, atque est $\alpha\gamma^2 = 5\,\eta\zeta^2$ (quoniam $\alpha\gamma = 2\gamma\varepsilon$, *et* $\eta\zeta = 2\zeta\varepsilon$, *et ex constructione* $\gamma\varepsilon^2 = 5\,\zeta\varepsilon^2$), est igitur

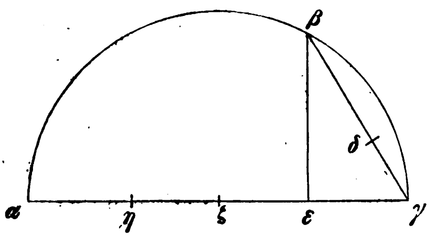


$\alpha\gamma^2 : \gamma\beta^2 : \eta\zeta^2 = 15 : 5 : 3$; itaque, *quia*

$\gamma\beta : \eta\zeta = \beta\vartheta : \zeta\gamma$,

$\beta\vartheta^2 : \zeta\gamma^2 = 5 : 3$.

LIII (*10*). Rursus sit semicirculus $\alpha\beta\gamma$, cuius centrum ζ, et sit $\gamma\zeta^2 = 5\,\zeta\varepsilon^2$, et ipsi $\alpha\gamma$ perpendicularis $\beta\varepsilon$, et iuncta $\beta\gamma$ extrema ac media proportione secetur in puncto δ, sitque maior *pars* $\beta\delta$; dico esse $\gamma\beta^2 + \beta\delta^2 = 5\,\gamma\varepsilon^2$. Prop. 46



Ponatur $\zeta\eta = \zeta\varepsilon$; ergo *ex iis quae superiore lemmate demonstravimus* recta $\eta\gamma$ extrema ac media proportione in puncto ε secta maiusque eius segmentum est $\eta\varepsilon$. Et quia est $\eta\gamma : \varepsilon\eta = \varepsilon\eta : \varepsilon\gamma$, *id est*

$\eta\gamma \cdot \varepsilon\gamma = \varepsilon\eta^2$, et $\varepsilon\gamma = \alpha\eta$ (quoniam $\varepsilon\zeta = \zeta\eta$), *itaque*

$\eta\gamma = \alpha\varepsilon$, est igitur

$\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma = \varepsilon\eta^2$. Et *ex hypothesi ac propter lemma 8 est*

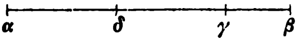
$\varepsilon\eta : \varepsilon\gamma = \gamma\beta : \beta\delta$*); ergo $\varepsilon\eta^2$, id est

$\alpha\varepsilon \cdot \varepsilon\gamma : \varepsilon\gamma^2 = \gamma\beta^2 : \beta\delta^2$, itaque (*elem. 6, 1*)

*) Proximo enim lemmate demonstratum est, si recta $\eta\varepsilon$ (quae quidem illic notatur $\eta\zeta$) extrema ac media proportione secetur in $\varkappa$, maiorque pars sit $\varkappa\varepsilon$, esse $\varkappa\varepsilon = \varepsilon\gamma$; ergo in his quae supra scripta sunt rectae $\varepsilon\eta$ extr. ac med. prop. sectae maior pars est $\varepsilon\gamma$, perinde ac rectae $\beta\gamma$ maior pars $\beta\delta$.

συνθέντι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΓΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, τὰ ἀπὸ ΓΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΗΕ· πενταπλάσια ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ ΓΒΔ τοῦ ἀπὸ ΓΕ, ὅπερ: ~

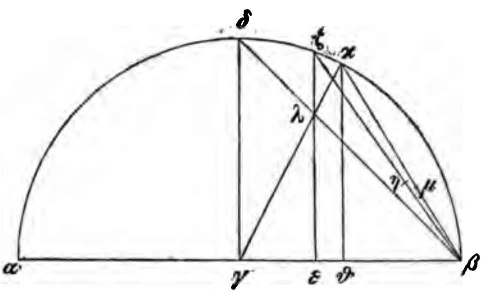
87 νδ' (ια'). *Τῆς δὲ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρά.*



Ἑξαγώνου γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΔΓ· λέγω ὅτι ἡ ΔΓ δεκαγώνου ἐστίν.

Προσκείσθω ἡ ΔΑ δεκαγώνου οὖσα· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Δ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΒ τῷ Γ· διὰ ἄρα τὸ η' λῆμμά ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΑΔ· δεκαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΔΓ.

88 νε' (ιβ'). *Τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει.*



Ἐκκείσθω γὰρ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ ὥστε διπλασίαν εἶ-

3. *ἐστι* (sine acc.) A, *ἔτι* B[3], *ἐστὶ* S, corr. B[1] 7. *ὅπερ* om. *Ei* 8. $\overline{N\Delta}$ A[1] in marg. (BS), *ια'* add. *Hu* 15. *ουσαν* (sine spir. et acc.) A, corr. BS 16. *τῷ γ* (post *ΔΒ*) S, *τῶι* $\overline{I}$ AB 18. *οὕτως ἡ* $\overline{AB}$ ABS, corr. *Co* (*οὕτως ἡ ΔΒ Ei*) 20. $\overline{NE}$*ον* add. B, $\overline{\nu\varepsilon}$' S, *ιβ'* add. *Hu*

$\alpha\varepsilon : \varepsilon\gamma = \gamma\beta^2 : \beta\delta^2$. Componendo est $\alpha\gamma : \gamma\varepsilon$, id est, *quia* $\alpha\gamma : \gamma\beta = \gamma\beta : \gamma\varepsilon$,

$\alpha\gamma^2 : \gamma\beta^2 = \gamma\beta^2 + \beta\delta^2 : \beta\delta^2$. Sed (*quia* $\gamma\beta : \beta\delta = \varepsilon\eta : \varepsilon\gamma$) est etiam

$\gamma\beta^2 : \varepsilon\eta^2 = \beta\delta^2 : \varepsilon\gamma^2$; ex aequali igitur

$\alpha\gamma^2 : \varepsilon\eta^2 = \gamma\beta^2 + \beta\delta^2 : \varepsilon\gamma^2$. Sed *quia ex hypothesi* est $\gamma\zeta^2 = 5\,\zeta\varepsilon^2$, *est igitur* (*quia* $\alpha\gamma = 2\,\gamma\zeta$, *et* $\varepsilon\eta = 2\,\zeta\varepsilon$) $\alpha\gamma^2 = 5\,\varepsilon\eta^2$; ergo etiam

$\gamma\beta^2 + \beta\delta^2 = 5\,\gamma\varepsilon^2$, q. e. d.

LIV (*11*). Si hexagoni latus extrema ac media proportione secetur, maius segmentum est latus decagoni. Prop. 47

Hexagoni enim *latus* $\delta\beta$ extrema ac media proportione secetur in puncto γ, sitque maior *pars* $\delta\gamma$; dico ipsam $\delta\gamma$ decagoni *latus* esse.

Apponatur decagoni *latus* $\delta\alpha$; ergo *propter elem. 13, 9* $\alpha\beta$ extrema ac media proportione secta est in puncto δ; itaque est

$\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \delta\alpha$. Sed *ex hypothesi* etiam $\delta\beta$ *extr. ac med. prop. secta est* in γ; itaque propter lemma 8 est

$\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \delta\gamma$; ergo est $\delta\gamma = \delta\alpha$.

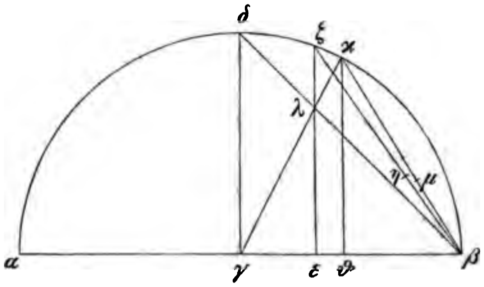
Sed decagoni *latus* est $\delta\alpha$; ergo etiam $\delta\gamma$.

LV (*12*). *Polyedrorum* eidem sphaerae inscriptorum pentagonum dodecaedri et triangulum icosaedri idem circulus comprehendit[1]). Prop. 48

Exponatur enim sphaerae diametrus $\alpha\beta$, et circa eam semicirculus, cuius centrum γ, et ab eo *ad circumferentiam ducatur* ipsi $\alpha\beta$ perpendicularis $\gamma\delta$, et recta $\alpha\beta$ ita secetur,

1) Hoc theorema, quod scriptor iam supra III propos. 58 extr. breviter attigit, item in Hypsiclis de quinque corporibus libro qui vulgo fertur primo propos. 2 (Euclid. ed. Peyrard vol. III p. 485, Friedlein *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Novembre* 1873, p. 10) tractatur his praemissis: *τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ τῶν ε' σχημάτων σύγκρισις, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ*

ναι τὴν ΔΕ τῆς ΕΒ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑΒ ΖΒ· ἡ ΖΒ ἄρα κύβου ἐστὶν πλευρά, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ′ τῶν στοιχείων ἐπὶ τοῦ κύβου. τετμήσθω ἡ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τῷ Η, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΖΗ· ἡ ΖΗ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶν πλευρὰ διὰ τὸ ἐν τῷ ιγ′ στοιχείων ἐπιλεγόμενον τῷ δωδεκαέδρῳ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΔΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κάθετος μὲν ἡ ΚΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΚΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Μ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ διπλῆ, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΒ διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ λοιπῆς τῆς ΓΕ διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ΒΕ τῇ ΕΛ ἐστὶν ἴση διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς ΔΓ, τὴν ΒΕ πρὸς ΕΛ· καὶ ἡ ΛΕ ἄρα τῆς ΕΓ ἐστὶν διπλῆ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΓ διπλῆ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΚ τοῦ ἀπὸ ΓΘ πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΓ τοῦ ἀπὸ ΓΘ· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐστὶν πενταπλάσιον· ἡ ΚΒ ἄρα εἰκοσαέδρου ἐστὶν πλευρά· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ιγ′ στοιχείων. ἐπεὶ οὖν ἐν μὲν τῷ θ′ λήμματι δέδεικται λόγος τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ ὃν ἔχει τὰ ε′ πρὸς τὰ γ′, ἐν δὲ τῷ δεκάτῳ τὰ ἀπὸ ΒΚ ΚΜ πεντα-



1. *τὴν* ΔE *Co* pro *τὴν* $\overline{AB}$ *ὀρθὴ ἡ* $\overline{CZ}$ A, corr. BS 10. *ἡ δὲ* $\overline{\Delta E}$ *τῆς* $\overline{EB}$ *διπλῆ* om. S, quapropter ex Latinis Commandini *ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΒΕ* concinnavit *Ei* 11. 12. *τῆς* $\overline{E\Delta}$ *ἐστιν* A, *τῆς* $\overline{ελ}$ *ἐστὶν* B, *τῇ* corr. S 14. *τῆς* $\overline{E\Gamma}$ *διπλῆ* AB, corr. *Co* 14. 15. *τὸ ἀπὸ* $\overline{EK}$ *τοῦ* $\overline{\Gamma E}$ ABS, *τὸ ἀπὸ ΚΘ τοῦ ἀπὸ ΘΓ Co*, ordinem litterarum restituit *Ei* 15. *πενταπλάσιον ἄρα* — 18. *ἀπὸ ΓΘ* om. *Ei*, qui paulo post *ἀπὸ ΚΓ* pro *ἀπὸ ΒΓ* 18. *ΓΘ Co* pro $\overline{\Gamma E}$ 27. *δεκάτῳ Ei* (*ι′ Co*) pro *δωδεκάτωι* *τὰ ἀπὸ* $\overline{BZ}$ $\overline{ZH}$ ABS, corr. *Co* (*τὰ ἀπὸ ΒΚΜ Ei*, itemque paulo post)

ut sit $\alpha\varepsilon = 2\varepsilon\beta$, et *ducatur* perpendicularis $\varepsilon\zeta$, et iungantur rectae $\delta\lambda\beta$ $\zeta\beta$; ergo $\zeta\beta$ cubi latus est, ut est in libro 13 elementorum *eo loco quo* de cubo *agitur* (*propos. 15*). Secetur $\zeta\beta$ extrema ac media proportione in puncto η, sitque maior *pars* $\zeta\eta$; ergo $\zeta\eta$ dodecaedri latus est propter corollarium *problematis* de dodecaedro in libro 13 elementorum (*propos. 17*). Iuncta autem $\gamma\lambda$ producatur ad $\varkappa$ *punctum circumferentiae*, et ad $\alpha\beta$ *ducatur* perpendicularis $\varkappa\vartheta$, et iuncta $\varkappa\beta$ extrema ac media proportione secetur in puncto μ, sitque maior *pars* $\varkappa\mu$. Et quia est $\alpha\beta = 2\beta\gamma$, et $\alpha\varepsilon = 2\varepsilon\beta$, subtrahendo igitur est $\varepsilon\beta = 2\gamma\varepsilon$. Sed, quia *propter triangulorum $\beta\gamma\delta$ $\beta\varepsilon\lambda$ similitudinem* est $\beta\gamma : \gamma\delta = \beta\varepsilon : \varepsilon\lambda$, est igitur $\beta\varepsilon = \varepsilon\lambda$; itaque $\varepsilon\lambda = 2\gamma\varepsilon$. Sed propter *triangulorum $\gamma\varepsilon\lambda$ $\gamma\vartheta\varkappa$ similitudinem est* etiam $\vartheta\varkappa = 2\gamma\vartheta$; ergo $\vartheta\varkappa^2 = 4\gamma\vartheta^2$, itaque $\gamma\varkappa^2 = 5\gamma\vartheta^2$; ergo etiam $\beta\gamma^2 = 5\gamma\vartheta^2$; itaque $\varkappa\beta$ icosaedri latus est iuxta ea quae in libro 13 elementorum demonstrata sunt[2]). Iam quia lemmate 9 ostendimus esse

$$\zeta\eta^2 : \beta\vartheta^2 = 5 : 3, \text{ et lemmate } 10$$

δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον διὰ τὸ τὴν αὐτὴν εἶναι εὐθεῖαν (κάθετον alii) *ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.* Atque haec quidem demonstratio, quam Hypsicles ipse se composuisse profitetur, similis est illi quae apud Pappum cap. 90 sub *Ἄλλως* sequitur; sed ab Hypsicle omnia in brevissimum contracta; a Pappo autem nonnulla, quibus omissis demonstrandi ratio vix perspici posset, recte sunt addita; alia denique, quae non minus desiderari posse viderentur, a nobis in Latina interpretatione suppleta sunt.

2) Quoniam enim est $\beta\gamma^2 : \gamma\vartheta^2 = 5 : 1$, in eadem sunt proportione quadrata ex duplis rectis; itaque $\alpha\beta^2 = 5\,\vartheta\varkappa^2$. Ergo propter elem. 13, 16 et coroll. recta $\vartheta\varkappa$ est radius circuli, a quo icosaedrum in sphaeram $\alpha\beta$ inscribitur (ita scilicet, ut circulo, cuius radius $\vartheta\varkappa$, inscribatur pentagonum aequilaterum, cuius latus aequale est lateri triangulorum, quibus icosaedrum in sphaeram $\alpha\beta$ inscriptum continetur). Sed ex constructione, quam figura supra descripta exhibet, est $\varkappa\beta^2 = \beta\vartheta^2 + \vartheta\varkappa^2$; ergo propter elem. 13, 10 est $\varkappa\beta$ latus pentagoni, $\beta\vartheta$ decagoni, $\vartheta\varkappa$ hexagoni eidem circulo inscriptorum. Sed est $\vartheta\varkappa = 2\gamma\vartheta$; itaque $\alpha\beta = \vartheta\varkappa + 2\beta\vartheta$; ergo propter elem. 13, 16 coroll. $\vartheta\varkappa$ est latus hexagoni et $\beta\vartheta$ latus decagoni ei circulo inscriptorum, unde icosaedrum constituitur. Sed demonstravimus $\varkappa\beta$ esse latus pentagoni eidem circulo inscripti; ergo $\varkappa\beta$ est latus icosaedri in sphaeram $\alpha\beta$ inscripti.

πλάσια τοῦ ἀπὸ ΒΘ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΚ ΚΜ τριπλάσια τοῦ
89 ἀπὸ ΖΗ. ἐκκείσθω οὖν κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τυχοῦσα διηγμένη ἡ ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Ο, καὶ μεῖζον ἔστω τμῆμα τὸ ΟΝ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΝΟ διὰ τὸ προδειχθέν. καὶ ἐπεὶ ἡ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον οὗ κέντρον τὸ Ν γραφομένου τριπλασία ἐστὶν δυνάμει τῆς ΝΞ ἐκ κέντρου, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ′ βιβλίῳ στοιχείων, ἦν δὲ ἡ τοῦ τριγώνου ἡ ΚΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΝΞ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημέναι· διὰ τὸ ἐν ἀρχῇ τοίνυν ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΝΞ, ἡ ΚΜ πρὸς ΝΟ. καὶ τὰ τετράγωνα. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, πάντα πρὸς πάντα· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΚΜ τῶν ἀπὸ ΞΝΟ ἐστὶν τριπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΗ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΚΜ τριπλάσια· ἴσα ἄρα τὰ ἀπὸ ΞΝΟ τῷ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΝΞ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΝΟ δεκαγώνου· ἡ ΖΗ ἄρα πενταγώνου ἐστὶν πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ Ν, γραφομένου (δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ′ στοιχείων καὶ τοῦτο). ἡ δὲ ΖΗ πενταγώνου οὖσα πλευρὰ καὶ δωδεκαέδρου πλευρά ἐστιν· ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου.

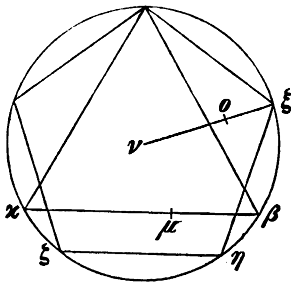
90 νς′ (ιγ′). Ἄλλως ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον.

Ἐκκείσθω τις σφαῖρα καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὴν δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν δωδεκαέδρου

---

1. ἄρα ἀπὸ $\overline{BZ}$ $\overline{Z\Theta}$ ABS, corr. *Co* 4. τῷ Ο *Co* pro τῶ $\overline{\Theta}$ 8. τοῦ ante κέντρου add. *Ei* ἐν τῶι Γ A, ἐν τῷ τρίτῳ S, corr. B 10. τοῦ ἀπὸ $\overline{M\Xi}$ AB, corr. S 12. ὡς ἡ $\overline{BZ}$ τῆς $\overline{N\Xi}$ ἡ $\overline{ZH}$ πρὸς $\overline{NO}$ ABS, corr. *Co* 13. ἓν πρὸς ἓν idem pro ἔμπροσθεν 14. ἀπὸ ΒΚΜ idem pro ἀπὸ $\overline{BKH}$ 15. ἀπὸ τῶν $\overline{BZ}$ $\overline{ZH}$ AS, ἀπὸ τῶν $\overline{\beta\zeta}$ $\overline{\zeta\nu}$ B cod. *Co*, ἀπὸ τῶν ΒΚ ΚΜ *Co* (quod in ΒΚΜ coniunx. *Ei*) 16. τὰ ἀπὸ $\overline{\Xi NI}$ A, τὰ ἀπὸ $\overline{\xi\nu\varrho}$ B, corr. S τῶι ἀπὸ $\overline{\Xi N}$ ABS, corr. *Co* 20. 21. ἡ δὲ ΖΗ δωδεκαέδρου οὖσα πλευρὰ καὶ πενταγώνου πλευρά ἐστιν *Ei* 21. τὸ ABS, τό τε *Ei* 23. $\overline{N\varsigma}$ A[1] in marg. (BS),

$\beta\varkappa^2 + \varkappa\mu^2 = 5\,\beta\vartheta^2$, est igitur
$3\,\zeta\eta^2 = \beta\varkappa^2 + \varkappa\mu^2$.



Iam exponatur circulus icosaedri triangulum (*cuius latus est* $\varkappa\beta$) comprehendens, cuius circuli a centro *ad circumferentiam* ducatur quaelibet $\nu\xi$, quae extrema ac media proportione secetur in puncto o, sitque maius segmentum νo; ergo propter superius *lemma 11* decagoni latus est νo. Et quia $\varkappa\beta$ erat latus trianguli circulo, cuius radius $\nu\xi$, inscripti, propter elem. 13, *12* est

$\varkappa\beta^2 = 3\,\nu\xi^2$. Et utraque $\varkappa\beta$ $\nu\xi$ extrema ac media proportione secta est; ergo propter superius *lemma 8* est

$\varkappa\beta : \nu\xi = \varkappa\mu : \nu o$. Atque item quadrata

$\varkappa\beta^2 : \nu\xi^2 = \varkappa\mu^2 : \nu o^2$, *id est, ut statim ostendimus* $= 3 : 1$; itaque etiam summâ factâ

$\beta\varkappa^2 + \varkappa\mu^2 : \xi\nu^2 + \nu o^2 = 3 : 1$. Sed demonstravimus

$\beta\varkappa^2 + \varkappa\mu^2 = 3\,\zeta\eta^2$; ergo est

$\zeta\eta^2 = \xi\nu^2 + \nu o^2$.

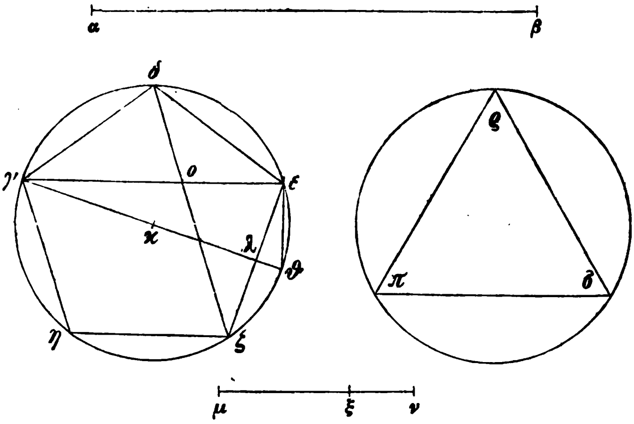
Atqui $\xi\nu$ hexagoni, et νo decagoni latus est; ergo propter elem. 13, *10* $\zeta\eta$ latus est pentagoni circulo, cuius centrum ν, inscripti. Sed eadem $\zeta\eta$, *quemadmodum initio* (*p. 437*) *demonstravimus*, est dodecaedri latus in sphaeram $\alpha\beta$ inscripti; ergo idem circulus et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum comprehendit.

LVI (*13*). Aliter *demonstratur* eundem circulum et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum comprehendere *hoc modo*.

Exponatur sphaera, *cuius diametrus* $\alpha\beta$, in eamque et dodecaedrum et icosaedrum inscriptum esse *fingatur*, et do-

---

ιγʹ add. *Hu* 23. 24. ὅτι — πεντάγωνον om. *Ei* 23. ὅτι ὁ] ὁτι (sine acc.) A, ὅτι B3, ὁ B1, corr. S *πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλῳ περιεχόμενον τῷ ΓΔΕ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον ἐν κύκλῳ τῷ ΠΡΣ· λέγω ὅτι οἱ*



κύκλοι ἴσοι εἰσίν, τουτέστιν ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ πεντάγωνον καὶ τὸ τρίγωνον.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· κύβου ἄρα τοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν σφαῖραν τῷ δωδεκαέδρῳ πλευρά ἐστιν ἡ ΓΕ· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ιγʹ στοιχείων. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ κάθετος ἀπʼ αὐτοῦ ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Γ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕΘ τετραπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΕ ΕΘ ΘΚ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ ΕΘ ΘΚ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ (ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων, ὡς ἔστιν ιγʹ στοιχείων)· τὰ
91 *ἄρα ἀπὸ ΓΕ ΕΖ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἐκκείσθω δὴ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ εὐθεῖά τις ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ, ὡς ἔστιν λῆμμα ιγʹ στοιχείων. ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαί-*

---

2. *τῷ* add. *Hu* 4. *τό τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΠΡΣ τρίγωνον Ei* ex Hypsicle 7. *στοιχείω* A, *στοιχείῳ* S *Ei*, corr. B

decaedri pentagonum $\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ contineatur circulo $\gamma\delta\varepsilon$, icosaedri autem triangulum circulo $\pi\varrho\sigma$; dico eos circulos aequales esse, id est, eundem circulum et pentagonum *dodecaedri* et triangulum *icosaedri* comprehendere.

Iungatur $\varepsilon\gamma$; haec igitur cubi latus est in eandem sphaeram cum dodecaedro *inscripti* iuxta ea quae in libro 13 elementorum demonstrata sunt[3]). Sumatur circuli centrum $\varkappa$, a quo *ad quodlibet pentagoni latus, velut* $\varepsilon\zeta$, *ducatur* perpendicularis $\varkappa\lambda$ producaturque ad γ ϑ *puncta circumferentiae*[4]), et iungatur $\varepsilon\vartheta$; haec igitur decagoni latus est. Et quia est

$\gamma\vartheta^2 = 4\,\vartheta\varkappa^2$, id est (*quia angulus* $\gamma\varepsilon\vartheta$, *ut in semicirculo, rectus est*)

$\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\vartheta^2 = 4\,\vartheta\varkappa^2$, sunt igitur

$\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\varkappa^2 = 5\,\vartheta\varkappa^2$. Sed propter elem. 13, *10* sunt

$\varepsilon\vartheta^2 + \vartheta\varkappa^2 = \varepsilon\zeta^2$; ergo

$\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2 = 5\,\vartheta\varkappa^2$.

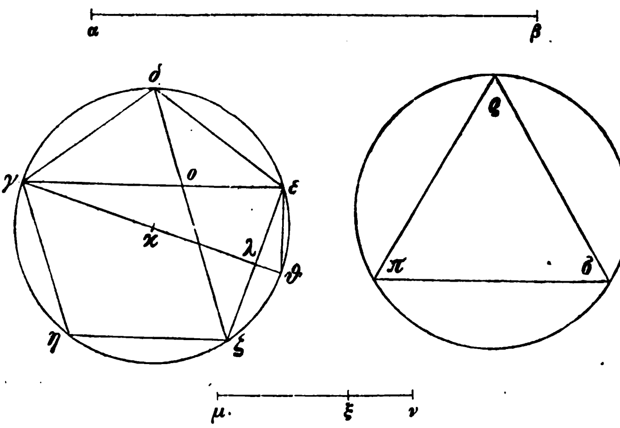
Exponatur igitur (*ut iam supra significavimus*) sphaerae diametrus $\alpha\beta$, et recta $\mu\nu$ *ita construatur*, ut sit $\alpha\beta^2 = 5\,\mu\nu^2$,

3) Etenim iuncta $\delta\zeta$ rectam $\gamma\varepsilon$ secet in puncto o; in hoc igitur ipsa $\gamma\varepsilon$ extrema ac media proportione secta maiorque pars est $\gamma o = \gamma\delta$ propter elem. 13, 8. Sed est $\gamma\delta$ dodecaedri latus; ergo propter elem. 13, 17 coroll. $\gamma\varepsilon$ cubi latus est. Quod autem nos et rectam $\delta\zeta$ et punctum o addidimus, cum haec duo et a Graeco contextu, qui nunc exstat, et a figura in codicibus tradita absint, sine dubio ex mente ipsius Graeci scriptoris fecimus, qui cum litterarum seriem usque ad σ adhibuerit, certe unam o omittere noluit.

4) Tamquam consentaneum omisit scriptor demonstrare productam $\lambda\varkappa$ cadere in ipsum γ verticem anguli pentagoni. At rectius, nisi fallor, praecipere poterat, ut ex puncto γ per centrum duceretur recta $\gamma\varkappa\lambda\vartheta$ etc.

8. 9. *ἐπὶ τὰ* $\overline{\Gamma\Theta}$ A, distinx. BS 13. *ἐστὶ* ante *τὸ ἀπὸ* add. *Ei* 15. *κύκλον ον γραφομενων* A[1], ex *ον* fecit *ενγ* (sic) A[2], corr. BS 16. *ἀπὸ* $\overline{\Gamma E}$ $\overline{\Theta Z}$ ABS, corr. *Co* 19. *ὡς — στοιχείων* om. *Co Ei* *ιγ'*. i. e. *τρισκαιδεκάτου Hu*, *κ̂* A, *κ'* B, *κ̄* S, *εἰκοστὸν* e Paris. 2368 descripsit Waitzius (forsitan in *κ̂* lateat elem. libri 13 propos. 16 mentio per formulam *ἐν τῷ εἰκοσαέδρῳ*, ut paulo post)

ρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων· ἐκ τοῦ κέντρου ἄρα ἐστὶν τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἡ *ΜΝ*. τετμήσθω ἡ *ΜΝ* ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ *Ξ*, καὶ ἔστω μείζων ἡ *ΜΞ*· δεκαγώνου ἄρα ἡ *ΜΞ* διὰ τὸ ια' λῆμμα. καὶ ἐπεί ἐστιν τὸ ἀπὸ *ΑΒ* τοῦ ἀπὸ *ΜΝ*



πενταπλάσιον, ἔστιν δὲ καὶ τὸ ἀπὸ *ΑΒ* τοῦ ἀπὸ *ΓΕ* τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου τριπλάσιον, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ *ΓΕ* ἴσα ἐστὶν ε' τοῖς ἀπὸ *ΜΝ*. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ *ΓΕ* πρὸς τρία τὰ ἀπὸ *ΓΔ*, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ *ΜΝ* πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ *ΜΞ* (τῆς γὰρ *ΓΕ* κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων)· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ *ΓΕ* καὶ τρία τὰ ἀπὸ *ΖΕ* ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ἀπὸ *ΜΝ* καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ *ΜΞ*. πέντε

2. *ἀφ' οὗ Ei* ex Eucl. elem. 13, 16 pro *ἐφ' οὗ*, item proximo vs. 3. *τοῦ κύκλου* add. *Ei* auctore *Co* 6. *ια' Ei* auctore *Co*, *Δ̂* A, $\bar{\delta}'$ B, $\bar{\delta}$ S (*τέταρτον* descripsit Waitzius) 7. 8. *τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς Ei* 8. *στοιχείω* A, *στοιχείῳ* S *Ei*, corr. B, item vs. 13 9. *τοῖς ἀπὸ* $\overline{MH}$ AB, corr. S 13. *δωδεκαέδρου*] *πενταγώνου* temere *Ei*

sicut lemmate *quodam* libri 13 elementorum *traditur*[5]. Sed propter elem. 13, *16 coroll.* quadratum a sphaerae diametro item quintuplum est quadrati a radio circuli, unde icosaedrum *in eandem sphaeram inscribitur*[6]; ergo eius circuli radius est $\mu\nu$. Secetur $\mu\nu$ extrema ac media proportione in puncto ξ, sitque maior *pars* $\mu\xi$; ergo propter lemma 11 $\mu\xi$ est decagoni latus. Et quia est

$\alpha\beta^2 = 5\mu\nu^2$, atque propter elem. 13, *15* (*demonstravimus* enim $\gamma\varepsilon$ cubi latus esse)

$\alpha\beta^2 = 3\gamma\varepsilon^2$, sunt igitur

$3\gamma\varepsilon^2 = 5\mu\nu^2$. Sed quia rectae $\gamma\varepsilon$, quae est cubi latus, extrema ac media proportione sectae maius segmentum est dodecaedri latus, ut est libro 13 elementorum[7], sunt igitur *propter lemma 8*

$3\gamma\varepsilon^2 : 3\gamma\delta^2 = 5\mu\nu^2 : 5\mu\xi^2$; itaque, *quia* $3\gamma\varepsilon^2 = 5\mu\nu^2$, *propter elem. 5, 9, et quia* $\gamma\delta = \varepsilon\zeta$,

5) His verbis Pappus eius quem citat libri propositionis 16 particulam quandam fere extremam (p. 269, 8—12 ed. August.) significat. Hoc enim loco elementorum scriptor, postquam initio praecepit τετμήσθω (ἡ ΑΒ) κατὰ τὸ Γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, verbis καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν cet., singularis lemmatis instar, docet, quomodo ea recta inveniatur, cuius quadratum sit quinta pars quadrati a data recta $\alpha\beta$. Itaque, quod hoc loco propositum est, datâ rectâ $\alpha\beta$, rectam $\mu\nu$ statim inveniemus, si rectae $\alpha\beta$ quintam partem fecerimus $\gamma\beta$, et in semicirculo, cuius diametrus $\alpha\beta$, perpendicularem duxerimus $\gamma\delta$, et iunxerimus $\delta\beta$ eique aequalem fecerimus $\mu\nu$. Est enim $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \gamma\beta$; itaque $\alpha\beta^2 : \beta\delta^2 = \alpha\beta : \gamma\beta = 5 : 1$. (Figuram vide apud Euclid. l. c.)

6) Conf. supra p. 437 adnot. 2.

7) Hoc ex elem. 13, 8 similiter ac supra adnot. 3 demonstratur; nam rectae $\gamma\varepsilon$ extrema ac media proportione sectae maior pars est $\gamma o = \gamma\delta$, id est ex hypothesi dodecaedri latus.

14. τὰ ἀπὸ ΖΕ] τὰ ἀπὸ $\overline{\text{ΑΕ}}$ ABS, τὰ ἀπὸ ΔΕ Co, τὰ ἀπὸ ΓΔ Ei, corr. Hu

δὲ τὰ ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ἀπὸ ΡΣ, ὡς ἐν τῷ εἰκοσαέδρῳ ιγʹ στοιχείων δείκνυται· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΡΣ ἴσα ἐστὶν τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΕ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΡΣ ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περὶ τὸ ΠΡΣ γραφομένου διὰ τὸ ιβʹ τοῦ ιγʹ στοιχείων. τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΓΕ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΖΕ ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ πεντάπλευρον (ἐδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΓΕΖ τοῦ ἀπὸ ΘΚ πενταπλάσια)· δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΠΡΣ τρίγωνον κύκλου ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου· ὥστε καὶ τὸ ἓν τῷ ἑνὶ ἴσον· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση τῇ διαμέτρῳ, καὶ ὁ κύκλος τῷ κύκλῳ· ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

92 νζʹ (ιδʹ). Τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων τὰ δώδεκα πεντάγωνα μείζονά ἐστιν εἴκοσι τριγώνων.

Ἔστω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τό τε τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου ὁ ΒΓΔΕ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν πλευρὰ ἡ ΒΕ, πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Α, καὶ ἀπʼ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ἡ ΑΖΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ ΑΔ ΑΕ ΒΘ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΕ τριγώνου πλευρά ἐστιν, ἡ ΒΘ ἄρα ἑξαγώνου ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΓΔ πεν-

---

2. ιγʹ στοιχείων uncis seclusit *Ei* 4. ἀπὸ ΖΕ *Hu* pro ἀπὸ $\overline{ΔΕ}$, item vs. 7 5. δεκαπέντε *Hu*, δὲ καὶ πέντε ABS, δέκα καὶ πέντε *Co Ei*, item vs. 8 τῆς ἐκ add. *Ei* τοῦ κύκλου bis scripta in A 6. διὰ τὸ $\overline{Ζ}$ AB, διὰ τὸ ἕβδομον S, corr. *Ei* auctore *Co* στοιχείου ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 8. ἀπὸ τῆς add. *Ei* 10. δεκαπέντε *Ei*, δὲ καὶ πέντε AB, καὶ πέντε S 11. ἀπὸ τῆς *Ei* pro ἀπὸ τῶν 12. δεκαπέντε *Ei* pro δὲ καὶ πέντε 13. τὸ ἓν *Ei* auctore *Co* pro τὸ ἓν 18. $\overline{Ν}ζ^{ον}$ add. B, $\overline{νζ}ʹ$ S, ιδʹ add. *Hu* 20. τό τε τρίγωνον S, τὸ τετράγωνον AB 21. ὁ $\overline{ΑΒΓΔΕ}$ AB, corr. S 26. ΒΘ ΓΘ add. *Hu*

$3\,\gamma\varepsilon^2 + 3\,\varepsilon\zeta^2 = 5\,\mu\nu^2 + 5\,\mu\xi^2$. Sed quia *ex iis quae* libro 13 elementorum in *problemate de* icosaedro demonstrantur[8]) *efficitur* esse

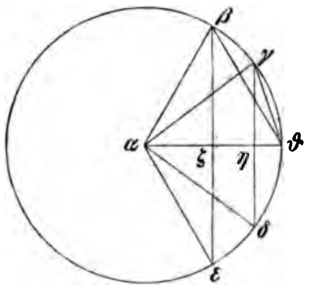
$5\,(\mu\nu^2 + \mu\xi^2) = 5\,\varrho\sigma^2$, sunt igitur

$3\,(\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2) = 5\,\varrho\sigma^2$. Sed propter elem. 13, 12 sunt $5\,\varrho\sigma^2 = 15$ (rad. circuli $\pi\varrho\sigma)^2$, et, quia *supra* demonstravimus $\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2 = 5\,\vartheta\varkappa^2$, sunt

$3\,(\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon\zeta^2) = 15$ (rad. circuli $\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta)^2$;

ergo radius circuli circa triangulum $\pi\varrho\sigma$ descripti aequalis est radio circuli circa pentagonum $\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ descripti, itemque diametri aequales, atque ipsi circuli; ergo idem circulus et dodecaedri pentagonum et icosaedri triangulum in eandem sphaeram inscriptorum comprehendit.

LVII (*14*). Duodecim pentagona circulo inscripta maiora sunt viginti triangulis eidem circulo inscriptis. Prop. 49

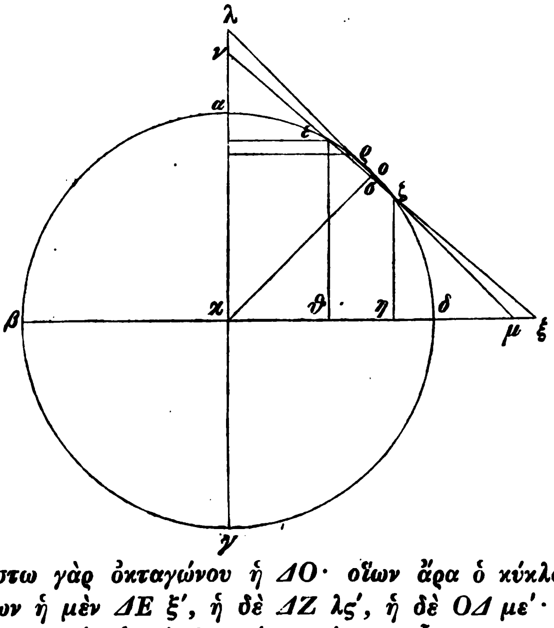


Sit circulus $\beta\gamma\delta\varepsilon$ et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum comprehendens (*propos. 48*), in eumque inscribatur et trianguli latus $\beta\varepsilon$ et pentagoni $\gamma\delta$, quae *inter se* parallelae sint, et sumatur circuli centrum α, ab eoque ad parallelas *ducatur* perpendicularis $\alpha\zeta\eta\vartheta$, et iungantur $\alpha\beta$ $\alpha\gamma$ $\alpha\delta$ $\alpha\varepsilon$ $\beta\vartheta$ $\gamma\vartheta$. Iam quia $\beta\varepsilon$ trianguli latus est, hexagoni igitur est $\beta\vartheta$. Rursus quia $\gamma\delta$ pentagoni est, decagoni igi-

8) Scilicet supra p. 443 scriptor primum ex elem. 13, 16 demonstravit $\mu\nu$ esse radium circuli, unde icosaedrum constituitur, id est latus hexagoni eidem circulo inscripti (elem. 4, 15 coroll.); tum $\mu\xi$ esse latus decagoni eidem circulo inscripti. Sed ex hypothesi rursus propter elem. 13, 16 $\varrho\sigma$ est latus pentagoni eidem circulo inscripti; ergo propter elem. 13, 10 est $\varrho\sigma^2 = \mu\nu^2 + \mu\xi^2$.

ταγώνου ἐστίν, ἡ ΓΘ ἄρα δεκαγώνου ἐστίν. καὶ κάθετοί εἰσιν αἱ ΒΖ ΓΗ· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΗΑ τοῦ ὑπὸ ΒΖΑ διὰ τὸ ἑξῆς· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τοῦ ΑΒΕ τριγώνου· καὶ ξ' ἄρα τρίγωνα τὰ ΓΔΑ ξ' τριγώνων τῶν ΒΑΕ μείζονά ἐστιν. ἀλλὰ ξ' μὲν τὰ ΓΑΔ τρίγωνα τὸ δωδεκάεδρόν ἐστιν (ἕκαστον γὰρ πεντάγωνον πέντε ἔχει τρίγωνα ὅμοια τῷ ΓΑΔ), ξ' δὲ τὰ ΒΑΕ τὸ εἰκοσάεδρόν ἐστιν (ἕκαστον γὰρ τρίγωνον τρία ἔχει ὅμοια τῷ ΒΑΕ)· μείζονα ἄρα τὰ δώδεκα πεντάγωνα εἴκοσι τριγώνων τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

93 *νη' (ιε'). Τὸ ὑπερτεθέν. ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ ἑξαγώνου μὲν περιφέρεια ἡ ΔΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΔΖ, καὶ αἱ ΕΘ ΖΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΔ διάμετρον· ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΚ μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΕΘΚ.*



Ἔστω γὰρ ὀκταγώνου ἡ ΔΟ· οἵων ἄρα ὁ κύκλος τξ', τοιούτων ἡ μὲν ΔΕ ξ', ἡ δὲ ΔΖ λς', ἡ δὲ ΟΔ με'· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΟ θ', ἡ δὲ ΟΕ ιε'. κείσθω οὖν τῇ ΖΟ ἴση ἡ ΟΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΡ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπιζευχθεῖ-

tur est $\gamma\vartheta$. Et perpendiculares sunt $\beta\zeta$ $\gamma\eta$; ergo est $\gamma\eta \cdot \eta\alpha > \beta\zeta \cdot \zeta\alpha$ propter proximum *lemma*; itaque etiam, *quia rectangulum* $\gamma\eta \cdot \eta\alpha = \Delta\ \alpha\gamma\delta$, *et* $\beta\zeta \cdot \zeta\alpha = \Delta\ \alpha\beta\varepsilon$,

$$60\ \Delta\ \alpha\gamma\delta > 60\ \Delta\ \alpha\beta\varepsilon.$$

Sed 60 triangula $\alpha\gamma\delta$ dodecaedri *superficiem* efficiunt (nam singula *dodecaedri* pentagona constant 5 triangulis aequalibus ipsi $\alpha\gamma\delta$), et 60 triangula $\alpha\beta\varepsilon$ icosaedri *superficiem* efficiunt (nam singula *icosaedri* triangula constant 3 triangulis aequalibus ipsi $\alpha\beta\varepsilon$); ergo 12 pentagona maiora sunt 20 triangulis eidem circulo inscriptis.

LVIII (*15*). *Sequitur id quod modo dilatum est.* Sit cir- **Prop. 50**
culus $\alpha\beta\gamma\delta$ circa centrum $\varkappa$, eiusque diametri invicem perpendiculares $\alpha\gamma$ $\beta\delta$, et sit hexagoni *anguli* circumferentia $\delta\varepsilon$, decagoni autem $\delta\zeta$, et *ducantur* $\varepsilon\vartheta$ $\zeta\eta$ perpendiculares ad diametrum; dico esse $\zeta\eta \cdot \eta\varkappa > \varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\varkappa$.

Sit enim octagoni *anguli* circumferentia δo; ergo est circumferentia

$$\delta\varepsilon = 60^{\circ}$$
$$\delta\zeta = 36^{\circ}$$
$$\delta o = 45^{\circ}$$

et per subtractionem

$$\zeta o = 9^{\circ}$$
$$\varepsilon o = 15^{\circ}$$

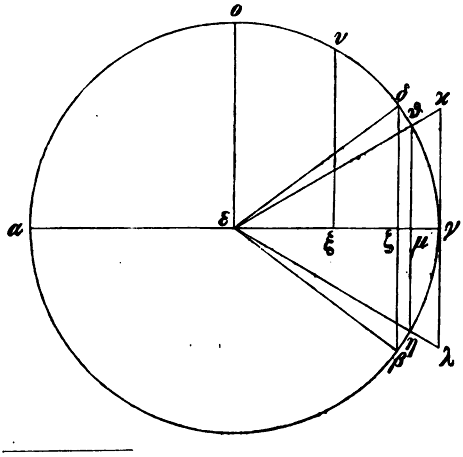
Iam ponatur $o\varrho = \zeta o$; ergo, *quia* $\alpha o = o\delta$, etiam $\alpha\varrho = \zeta\delta$. Et iungantur $\zeta\varepsilon$ $\zeta\varrho$, quibus productis *ad ipsas quoque*

---

1. *δωδεκαγώνου* AB cod. *Co*, corr. S *Co* 2. *μείζων* A, corr. BS *ὑπὸ ΓΗΑ Co*, *ὑπὸ* $\overline{\mathit{ΓΗ}}$ *ἀπὸ* AB, *ὑπὸ* $\overline{\gamma\eta}$ S 4. *τὰ* $\overline{\mathit{ΓΔΑ}}$ *ξ′*] *τὰ* $\overline{\mathit{ΓΔΑΞ}}$ AB, *τὰ* $\overline{\gamma\alpha\delta}$ *ἑξήκοντα* S *Ei* 4. 5. *τῶ* $\overline{\mathit{ΒΑΘ}}$ A, *τῶν* $\overline{\beta\alpha\vartheta}$ BS, corr. *Ei* (*triangulis ABE Co*) 5. *μὲν* et *τρίγωνα* om. *Ei* 6. 7. *ἕκαστον — τῷ ΓΑΔ* om. *Ei* 7. *τῶ* $\overline{\mathit{ΓΑ}}$ $\overline{\mathit{ΔΞ}}$ $\overline{\mathit{ΔΕ}}$ *τὰ* $\overline{\mathit{ΒΑΕ}}$ A, *τῷ* et cetera perinde B, *τῷ* om. et reliqua distinx. S 9. *εἴκοσι* BS, $\overline{\varkappa}$ A 11. $\overline{\mathit{ΝΗ}}$ A[1] in marg. (BS), *ιε′* add. *Hu* 12. *τὸ Κ Co* pro *τὸ* $\overline{\mathit{Ε}}$ 14. *κάθετοι ἐπὶ τὴν* $\overline{\mathit{ΒΔ}}$ AB, *κατὰ*, omissis reliquis, S, *κάθετοι ἐπὶ τὴν*, omisso *ΒΔ*, *Ei* 17. $\overline{\mu\varepsilon}$ B Paris. 2368, $\acute{\mu}$ *ἑ* A, $\overline{\mu}$ *ε′* S 18. *ἄρα* $\overline{\mathit{ΖΟΘ}}$ *ἡ δὲ* $\overline{\mathit{ΟΕ}}$ $\overline{\mathit{ΙΕ}}$ AB Paris. 2368, *ἄρα* $\bar{\zeta}$ $\bar{o}$ $\bar{\vartheta}$ et cetera perinde S, distinx. *Co*, *ἡ* add. *Ei*

σαι δὲ αἱ ΖΕ ΖΡ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ ἔστωσαν ὡς αἱ ΝΕΖΞ ΛΡΖΜ εὐθεῖαι· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΚΟ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ τὴν ΖΡ. τεμνέτω κατὰ τὸ Σ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσους ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΟΚΛ ΟΚΜ, ἴση ἄρα καὶ ἡ μὲν ΚΜ τῇ ΚΛ, μείζων δὲ ἡ ΚΞ πολλῷ τῆς ΚΝ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΞ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΞ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΗΞ. ἀλλὰ ἡ ΖΗ μείζων ἐστὶν τῆς ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΔΚ καθέτου, τουτέστιν τῆς ΘΚ (τῇ γὰρ ἀπὸ τοῦ Ρ καθέτῳ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ)· ἡ ΗΘ ἄρα πρὸς ΘΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΗΞ. καὶ συνθέντι ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΞ πρὸς τὴν ΞΗ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΚ μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΕΘΚ.

94 νθ′ (ις′). *Ἐὰν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς καὶ ἰσόπλευρον αὐτῷ ἴσον ᾖ, δείκνυται τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου πρὸς τὸ ἀπὸ μιᾶς [πλευρᾶς] τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς ἐλάσσονα λόγον ἔχον ἤπερ εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος.*



Ἔστω γὰρ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΒΔΕ ἔχον τεσσάρων πέμπτων τὴν πρὸς τῷ Ε περιειλημμένην κύκλῳ οὗ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρος ἡ ΑΕΖΓ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΒΔ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖΔ πλευρά. ἐὰν δὲ ἀπολάβωμεν ἑκατέ-

---

1. 2. *αἱ* $\overline{NE}$ $\overline{Z\Xi}$ $\overline{\Lambda P}$ $\overline{ZM}$ AB, coniunx. S, *Λ* pro *Α* corr. *Co* 2. *ἐπιζευχθεῖσαι* A, corr. BS *ἡ ΚΟ Co* pro *ἡ* $\overline{K\Theta}$ 4. *καὶ ἐπι* A(B),

productas $\kappa\alpha$ $\kappa\delta$ fiant rectae $\nu\varepsilon\zeta\xi$ $\lambda\varrho\zeta\mu$; iuncta igitur κo rectam $\zeta\varrho$ bifariam et ad rectos angulos secabit (*elem.* *6, 33. 5, 3*). Secet in puncto σ. Et quia est

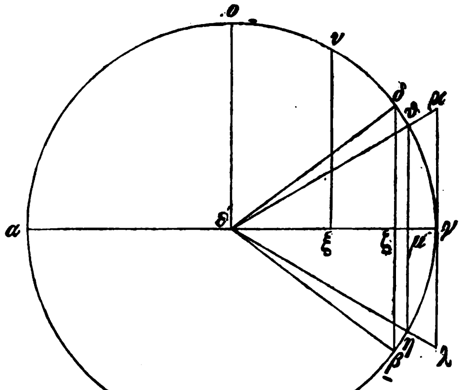
$\angle\, o\kappa\lambda = \angle\, o\kappa\mu = \frac{1}{2}$R, est igitur $\Delta\, o\kappa\lambda \cong \Delta\, o\kappa\mu$, *itaque*
$\kappa\lambda = \kappa\mu$. Sed *quia circumferentiae punctum* ϱ *cadit inter* $\varepsilon\ \zeta$, *est* $\kappa\lambda > \kappa\nu$, *et* $\kappa\mu < \kappa\xi$; *itaque* multo
$\kappa\xi > \kappa\nu$. Et *propter parallelas* $\nu\kappa$ $\zeta\eta$ est
$\kappa\xi : \kappa\nu = \eta\xi : \eta\zeta$; ergo
$\eta\xi > \eta\zeta$. Sed $\eta\zeta$ maior est perpendiculari quae ab ε ad $\alpha\kappa$ *ducitur* (nam perpendiculari quae a ϱ *ad eandem* $\alpha\kappa$ *ducitur* aequalis est $\eta\zeta$); itaque, *quia perpendicularis ab* ε *ad* $\alpha\kappa$ *ipsi* $\kappa\vartheta$ *aequalis est*,
$\eta\zeta > \kappa\vartheta$; ergo *propter elem. 5, 8* est
$\eta\vartheta : \kappa\vartheta > \eta\vartheta : \eta\xi$. Et componendo (*infra VII propos. 3*)
$\eta\kappa : \kappa\vartheta > \vartheta\xi : \xi\eta$, id est *propter parallelas* $\vartheta\varepsilon$ $\eta\zeta$
$> \varepsilon\vartheta : \zeta\eta$; ergo *propter VII propos. 16*
$\zeta\eta \cdot \eta\kappa > \varepsilon\vartheta \cdot \vartheta\kappa$.

LIX (*16*). Si sit triangulum aequicrure, cuius ad verticem angulus sit quattuor quintarum *partium* recti, eique aequale triangulum aequilaterum, demonstratur quadratum ab uno aequilateri latere ad quadratum ab uno aequalium aequicruris laterum minorem proportionem habere quam, si recta *quaedam* extrema ac media proportione secetur, quadratum a tota ad quintuplum quadratum a minore *parte*. Prop. 51

Sit enim triangulum aequicrure $\beta\varepsilon\delta$, cuius ad *verticem* ε angulus sit $= \frac{4}{5}$R, idque comprehendatur circulo, cuius centrum ε, et diametrus $\alpha\varepsilon\zeta\gamma$ ad rectam $\beta\delta$ sit perpendicularis; ergo recta $\beta\zeta\delta$ pentagoni *circulo inscripti* latus est. Sin

corr. S   ἡμισείας S, ἡμίσεια *Ei*   6. ὡς ἡ $\overline{K}$ AB, ὡς $\overline{\eta\kappa}$ S, corr. *Co*   14. $\overline{\nu\vartheta^{o}}$ add. B, $\overline{\nu\vartheta}'$ S, ις′ add. *Hu*   Ἐὰν ᾖ τρίγωνον *Ei*   15. γωνίαι A (γωνίᾳ B), corr. S   16. αὐτῶ ἴσον η A, αὐτῷ ἴσον ἥ B, αὐτῷ ᾖ, omisso ἴσον, S. ἴσον αὐτῷ, omisso ᾖ, *Ei*   16. 17. τοῦ ἰσοπλεύρου — πλευρᾶς om. S *Ei*, quam corruptelam incredibili socordia adeo auxit *Ei*, ut vs. 18 post ἰσοσκελοῦς adderet πρὸς τὴν τοῦ ἰσοπλεύρου, quamquam verum apud Commandinum videre poterat   17. πλευρᾶς del. *Hu* auctore *Co*   23. εμπεριειλημμένη (post τῷ *E*) A, ἐμπεριειλημμένη B, ἐμπεριειλημμένην S *Ei*, corr. *Hu* (in ξμ fortasse lateat compendium vocabuli σημείῳ) ραν τῶν ΓΗ ΓΘ περιφερειῶν δωδεκαγώνου, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΗΘ καὶ τὰς ΕΗ ΕΘ, ἔσται ἰσόπλευρον τὸ ΕΗΘ. καὶ ἐὰν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τὴν ΚΓΛ, ἔσται καὶ τὸ ΕΚΛ τρίγωνον ἰσόπλευρον. καὶ ἐὰν θέλωμεν ἁρμόσαι ἴσον τῷ ΒΔΕ τριγώνῳ, δείκνυται ὅτι μεταξὺ πίπτει τῶν ΘΕΗ ΚΕΛ, τουτέστιν τοῦ μὲν ΕΗΘ μεῖζον ἔσται τοῦ δὲ ΚΕΛ ἔλασσον.

95 Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ ὃν δʹ πρὸς γʹ, ἴση δὲ ἡ ΘΕ τῇ ΕΓ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ ὃν δʹ πρὸς γʹ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τουτέστιν τὸ ΚΕΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΗΘ τρίγωνον. καὶ τὰ ἑξαπλᾶ· τὸ περιγεγραμμένον ἑξάγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον λόγον ἔχει ὃν δʹ πρὸς γʹ, τουτέστιν ὃν ιβʹ πρὸς θʹ. τοῦ δὲ περιγεγραμμένου ἑξαγώνου πρὸς εʹ τρίγωνα τὰ ΚΕΛ λόγος ἐστὶν ὃν ιβʹ πρὸς ιʹ· καὶ πέντε ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΕΛ μείζονά ἐστιν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· πολλῷ ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου μείζονά ἐστιν (ἐν γὰρ κύκλῳ τὸ ἐγγεγραμμένον πεντάγωνον ἰσόπλευρον τοῦ ἐγγραφομένου ἑξαγώνου ἔλασσόν ἐστιν)· ἔλασσον ἄρα τὸ ΔΕΒ τοῦ ΚΕΛ.



Λέγω δὴ ὅτι καὶ τοῦ ΕΗΘ μεῖζόν ἐστιν. εἰλήφθω γὰρ ἡ ΓΝ περιφέρεια ἑξαγώνου καὶ κάθετος ἡ ΝΞ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου τὸ ὑπὸ ΔΖΕ μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΝΞΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΝΞΕ τὸ ὑπὸ ΘΜΕ (πάντα γὰρ πᾶσίν ἐστιν ἴσα), καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἄρα μεῖζόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ, ὥστε καὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν τοῦ ΘΕΗ τριγώνου.

vero circumferentias $\gamma\eta$ $\gamma\vartheta$ *ita* absciderimus, *ut* utraque dodecagoni *angulo insistat*, et rectas $\eta\vartheta$ $\varepsilon\eta$ $\varepsilon\vartheta$ iunxerimus, triangulum $\eta\varepsilon\vartheta$ aequilaterum erit (*elem. 4, 15*). Et si tangentem $\varkappa\gamma\lambda$ duxerimus, *propter parallelas* $\eta\vartheta$ $\lambda\varkappa$ etiam triangulum $\lambda\varepsilon\varkappa$ aequilaterum erit. Iam si triangulum *aequilaterum* aequale triangulo $\beta\varepsilon\delta$ *sub angulo* $\lambda\varepsilon\varkappa$ construere velimus, demonstratur basim eius inter rectas $\eta\vartheta$ $\lambda\varkappa$ cadere, id est, illud quod quaeritur triangulum maius esse quam $\eta\varepsilon\vartheta$ et minus quam $\lambda\varepsilon\varkappa$.

Nam quia est, *ut lemmate 1 medio ostendimus*, $\varepsilon\vartheta^2 : \varepsilon\mu^2 = 4 : 3$, et $\varepsilon\vartheta = \varepsilon\gamma$, est igitur

$\varepsilon\gamma^2 : \varepsilon\mu^2 = 4 : 3$. Sed *propter parallelas* $\eta\vartheta$ $\lambda\varkappa$ *et secundum elem. 6, 22* est

$$\varepsilon\gamma^2 : \varepsilon\mu^2 = \lambda\varkappa^2 : \eta\vartheta^2 = \Delta\,\lambda\varepsilon\varkappa : \Delta\,\eta\varepsilon\vartheta.$$

Atque item sexcupla; ergo hexagonum *circulo* circumscriptum ad inscriptum est ut $4 : 3$, id est $12 : 9$. Sed hexagonum circumscriptum ad 5 triangula $\lambda\varepsilon\varkappa$ est ut $12 : 10$; ergo 5 triangula $\lambda\varepsilon\varkappa$ maiora sunt quam hexagonum inscriptum. Sed id hexagonum maius est quam pentagonum eidem circulo inscriptum[1]; multo igitur 5 triangula $\lambda\varepsilon\varkappa$ maiora sunt quam pentagonum inscriptum, itaque triangulum $\beta\varepsilon\delta$ minus est quam $\lambda\varepsilon\varkappa$.

Sed idem dico maius esse quam triangulum $\eta\varepsilon\vartheta$. Sumatur enim hexagoni *anguli* circumferentia $\gamma\nu$ et *ad diametrum ducatur* perpendicularis $\nu\xi$. Et quia propter superius *lemma 15* est

$$\delta\zeta \cdot \zeta\varepsilon > \nu\xi \cdot \xi\varepsilon, \text{ atque } \nu\xi = \mu\varepsilon, \text{ et } \xi\varepsilon = \vartheta\mu^{*}), \text{ est igitur}$$
$$\delta\zeta \cdot \zeta\varepsilon > \vartheta\mu \cdot \mu\varepsilon, \text{ itaque etiam } \Delta\,\beta\varepsilon\delta > \Delta\,\eta\varepsilon\vartheta.$$

1) Vide append.

*) Ducatur a centro ε ad circumferentiam diametro perpendicularis εo. Iam quia circumferentia $\gamma\vartheta$ dodecagoni anguli est, et circumf. $\gamma\nu$ hexagoni, sunt igitur circumferentiae $\vartheta o = \gamma\nu$, et $\nu o = \gamma\vartheta$. Ergo rectae $\nu\xi$ aequalis est perpendicularis a ϑ ad $o\varepsilon$ ducta, id est $\mu\varepsilon$, ac perpendiculari a ν ad $o\varepsilon$, id est ipsi $\xi\varepsilon$, aequalis est $\vartheta\mu$ (*Co*).

---

5. τοῦ $\overline{ΘΕ}$ ἡ $\overline{ΚΕΛ}$ AB, τοῦ $\overline{θε}$ ἡ $\overline{κγλ}$ S, corr. *Ei* auctore *Co* 8. $\overline{ΕΜ}$ $\overline{ΟΝΔ}$ πρὸς $\overline{Γ}$ AB, $\overline{εμ}$ ὁ $\overline{νδ}$ πρὸς $\overline{γ}$ S, corr. *Ei* auctore *Co* 9. καὶ τοῦ ἀπὸ $\overline{ΕΙ}$ ABS, corr. *Ei* (*et quadrati ex ΓΕ Co*) $\overline{ΕΜ}$ ὁ $\overline{ΝΔ}$ πρὸς $\widehat{Γ}'$ A, $\overline{εμ}$ ὁ $\overline{νδ}$ πρὸς $\overline{γ}$ BS, corr. *Ei* auctore *Co* 10. τὸ ἀπὸ *ΘΗ Co* pro τὸ ἀπὸ $\overline{ΕΗ}$ 12. ἑξαπλᾶ *Hu* pro ἑξάγωνα 13. ὃν δʹ — τουτέστιν om. *Ei* 14. θʹ *Hu* pro ἐννέα 22. 23. μείζονα ἐστὶν A(BS), corr. *Ei* auctore *Co* 26. κάθετος ἡ *ΝΣ* temere *Ei*, et similiter posthac *Σ* pro *Ξ* 30. τὸ ὑπὸ $\overline{ΝΞΕ}$ ABS, τοῦ corr. *Ei* auctore *Co* 35. ὑπὸ (ante *ΘΜΕ*) om. S *Ei*

96 *Τὸ ἄρα τῷ ΒΔΕ ἴσον συνιστάμενον ἰσόπλευρον, ὥστε τὴν βάσιν αὐτοῦ παράλληλον εἶναι τῇ ΗΘ ἢ τῇ ΚΔ, μεταξὺ τῶν Κ Θ πίπτει. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἐν τῷ ϛ' λήμματι ὅτι εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δ' πρὸς γ', ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, λόγον ὃν δ' πρὸς γ', πολλῷ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης εὐθείας πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ΚΕ ΘΕ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, τουτέστιν τῆς ΕΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς.*

97 *ξ'. Τὰ μὲν οὖν λαμβανόμενα εἰς τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων* πέντε σχημάτων *ἐδείχθη καθ' αὐτά, δεικτέον δ' ἐφεξῆς ὅτι τὸ μὲν εἰκοσάεδρον μέγιστόν ἐστιν, μετὰ δὲ τοῦτο τὸ δωδεκάεδρον, εἶτα τὸ ὀκτάεδρον, μετὰ δὲ τὸ ὀκτάεδρον ὁ κύβος, ἐλάχιστον δὲ τὸ τῆς πυραμίδος.*

98 *Ἔστω δὲ πρῶτον ἐπὶ τοῦ κύβου καὶ τῆς πυραμίδος ὁ λόγος, καὶ ἔστω κύβου μὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓ, πυραμίδος δὲ τρίγωνον τὸ ΔΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσαι ὑπόκεινται τῶν σχημάτων αἱ ἐπιφάνειαι, ἓξ ἄρα τετράγωνα τὰ ΑΒ ἴσα ἐστὶν τέσσαρσι τριγώνοις τοῖς ΔΕΖ· λόγος ἄρα τοῦ ΔΕΖ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον ὃν γ' πρὸς β'. ἤχθω δὴ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος* ἐπὶ τὸ *ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Θ κέντρον ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον γραφομένου κύκλου·*

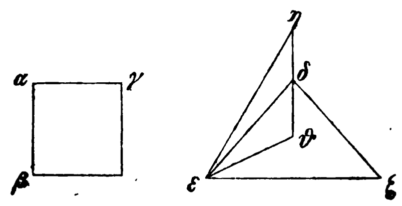
---

1. *τῷ* add. *Ei* auctore *Co* 2. *ἢ* B[1]S, *ἡ* A, *ἢ* B[3] 3. *τῶν* $\overline{ΚΘ}$ A, distinx. BS 5. *μείζονος* AB, corr. S 6. *ἔχει δὲ* — 8. *δ' πρὸς γ'* om. *Ei* 11. *πρὸς τὴν* $\overline{ΕΘ}$ *τουτέστιν τὴν* $\overline{ΕΔ}$ A(BS), corr. *Co* 13. $\bar{ξ}$ A[1] in marg. (BS) 14. *πέντε σχημάτων* add. *Hu* auctore *Co* ex cap. 72, *πολυέδρων Ei* *ἐλήφθη* AB, corr. S 16. *εἶτα* BS, *εια* A 17. *πυραμίδος*] scil. *σχῆμα* 20. *κύβος μὲν* AB, corr. S *τὸ* $\overline{ΑΒΓ}$ ABS, *τὸ ΑΒ Ei* 21. *τὸ ΔΕΖ Co* pro *τὸ* $\overline{ΔΖΕ}$ 24. *ὃν* add. *Ei* (*quam habent Co*) 25. *ἐπὶ τὸ* add. *Co*, *εἰς* S 26. *ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΕΗ* coni. *Hu*

Ergo trianguli aequilateri, quod sub angulo $\lambda\varepsilon\varkappa$ aequale triangulo $\beta\varepsilon\delta$ construitur, basis, quae rectis $\eta\vartheta$ $\lambda\varkappa$ parallela est, inter puncta ϑ $\varkappa$ cadit. Iam quia lemmate 6 demonstravimus, si recta extrema ac media proportione secetur, quadratum a tota ad quintuplum quadratum a minore *parte* maiorem proportionem habere quam $4 : 3$, et *lemmate 1 medio* esse $\varkappa\varepsilon^2 : \varepsilon\gamma^2$, id est $\varkappa\varepsilon^2 : \varepsilon\vartheta^2 = 4 : 3$, multo igitur quadratum a tota *quam diximus recta* ad quintuplum quadratum a minore parte maiorem proportionem habet quam quadratum a latere trianguli aequilateri *triangulo $\beta\varepsilon\delta$ aequalis,* quod quidem latus minus est quam $\varepsilon\varkappa$, ad quadratum ab $\varepsilon\vartheta$, id est ab $\varepsilon\delta$ latere trianguli aequicruris.

LX. Lemmata igitur, quae ad comparationes quinque polyedrorum aequalem superficiem habentium adsumuntur, singula demonstrata sunt; iam vero omnium maximum esse icosaedrum, tum *reliquis quae sequuntur maius esse* dodecaedrum, deinde octaedrum, tum cubum, denique minimum esse pyramidis *sive tetraedri volumen* ex ordine ostendamus.

Primum de cubo et pyramide disseratur, et *illum hac maiorem esse demonstretur.* Prop. 52



Sit cubi quadratum $\alpha\beta\gamma$ et pyramidis triangulum $\delta\varepsilon\zeta$. Iam quia ex hypothesi superficies aequales sunt, sex igitur quadrata $\alpha\beta\gamma$ aequalia sunt quattuor triangulis $\delta\varepsilon\zeta$; ergo trianguli $\delta\varepsilon\zeta$ ad quadratum $\alpha\beta\gamma$ proportio est $3 : 2$. Ducatur a vertice pyramidis ad basim $\delta\varepsilon\zeta$ perpendicularis $\eta\vartheta$, et iungantur $\varepsilon\vartheta$ $\varepsilon\eta$; apparet igitur ϑ centrum esse circuli circa triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ descripti[1]; itaque *propter elem. 13, 12* est $\delta\varepsilon^2$, id est (*quia η vertex pyramidis*)

1) Theodos. sphaeric. 1 def. 5, propos. 9.

τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΕΗ, τοῦ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΘΗ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ ὃν γʹ πρὸς βʹ, τουτέστιν ὃν νδʹ πρὸς λςʹ. τοῦ δὲ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ γʹ τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν λςʹ πρὸς δʹ· καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἄρα, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΕΖ, πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν νδʹ πρὸς δʹ. καὶ ἐπεὶ παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον ἔλασσον ἢ τετραπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τέσσαρα ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΕΖ, ἅπερ ἐστὶν ἓξ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ΑΓ, μείζονά ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν αʹ πρὸς ςʹ, τουτέστιν ἢ ὃν θʹ πρὸς νδʹ. τοῦ δὲ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν νδʹ πρὸς δʹ, ὡς ἐδείχθη, καὶ δι' ἴσου τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὰ θʹ πρὸς τὰ δʹ· καὶ μήκει ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὰ γʹ πρὸς τὰ βʹ. ἐδείχθη δὲ λόγος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον, ὃν γʹ πρὸς βʹ· τὸ ΔΕΖ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΓ πρὸς τὸ γʹ τῆς ΗΘ. καὶ ἀνάπαλιν ἡ ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον χωρίον τοῦ ΑΒ τετραγώνου· καὶ ἔστιν ὁ μὲν κύβος τὸ ΑΒ τετράγωνον ἐφ' ὕψος τὴν ΑΓ, ἡ δὲ πυραμὶς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφ' ὕψος τὸ τρίτον τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· μείζων ἄρα ὁ κύβος τῆς πυραμίδος.

---

4. δὲ ἀπὸ *Co*, ἀπὸ ABS, δὲ ἀπὸ τῆς *Ei* 5. καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΕ — 7. πρὸς δʹ om. *Ei* 6. τοῦ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τριγώνου τῆς ΗΘ ABS, corr. *Co* 7. καὶ ἔπι A(B), corr. S 10. ἓξ BS, ς̄ A 19. τὸ ΔΕΖ ἄρα — 21. καὶ ἀνάπαλιν] haec non tam propter verbositatem demonstrationis saepius aliis quoque locis obviam, quam propter vitiosum ἀνάπαλιν suspecta sunt (vide infra VII propos. 7); ergo his de-

$\varepsilon\eta^2 = 3\,\varepsilon\vartheta^2$. Et rectus est angulus $\varepsilon\vartheta\eta$; ergo
$\varepsilon\eta^2 : \eta\vartheta^2 = 3 : 2 = 54 : 36$. Sed est
$\eta\vartheta^2 : (\frac{1}{3}\eta\vartheta)^2 = 9 : 1 = 36 : 4$; ergo *ex aequali*
$\varepsilon\eta^2 : (\frac{1}{3}\eta\vartheta)^2 = 54 : 4$. Et quia est $\varepsilon\eta = \varepsilon\zeta$, et *propter lemma 1* $\varepsilon\zeta^2 < 4\,\Delta\,\delta\varepsilon\zeta$, et *ex hypothesi* $4\,\Delta\,\delta\varepsilon\zeta = 6\,\alpha\gamma^2$, sunt igitur
$6\,\alpha\gamma^2 > \varepsilon\zeta^2$, itaque
$\alpha\gamma^2 : \varepsilon\zeta^2 > 1 : 6$, id est $> 9 : 54$. Sed demonstratum est
$\varepsilon\zeta^2 : (\frac{1}{3}\eta\vartheta)^2 = 54 : 4$; ergo ex aequali
$\alpha\gamma^2 : (\frac{1}{3}\eta\vartheta)^2 > 9 : 4$, itaque
$\alpha\gamma : \frac{1}{3}\eta\vartheta > 3 : 2$. Sed *initio* demonstratum est
$\Delta\,\delta\varepsilon\zeta : \alpha\gamma^2 = 3 : 2$; ergo
$\alpha\gamma : \frac{1}{3}\eta\vartheta > \Delta\,\delta\varepsilon\zeta : \alpha\gamma^2$.

Ergo si ut $\alpha\gamma : \frac{1}{3}\eta\vartheta$, ita triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ ad aliud quoddam *spatium* faciamus, id ipsum minus erit quam quadratum $\alpha\beta\gamma$. Atqui cubus est *prisma*, cuius basis est quadratum $\alpha\beta\gamma$ altitudoque $\alpha\gamma$, pyramis autem *aequalis prismati*, cuius basis est triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\eta\vartheta$ (*elem. 12, 7 coroll.*); ergo cubus maior est pyramide [2]).

2) Quoniam demonstratum est $\alpha\gamma : \frac{1}{3}\eta\vartheta > \Delta\,\delta\varepsilon\zeta : \alpha\gamma^2$, ex libri VII propos. 16 brevius concludi poterat esse $\alpha\gamma^3 > \frac{1}{3}\eta\vartheta \cdot \Delta\,\delta\varepsilon\zeta$, id est cubum maiorem tetraedro. Sed quia Graeco scriptori eae multiplicandi formulae quas statim posuimus evitandae erant, interserta est aequatio $\alpha\gamma : \frac{1}{3}\eta\vartheta = \Delta\,\delta\varepsilon\zeta : x$ (ita ut sit $x < \alpha\gamma^2$). Ergo propter elem. 11, 34 prisma, cuius basis est spatium x altitudoque $\alpha\gamma$, aequale est prismati, cuius basis triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\eta\vartheta$. Sed est quadratum $\alpha\beta\gamma > x$; ergo prisma, cuius basis est quadratum $\alpha\beta\gamma$ altitudoque $\alpha\gamma$, id est cubus, maior est prismate, cuius basis triangulum $\delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\eta\vartheta$, id est maius tetraedro.

---

letis ἡ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ τρίτον cet. coni. *Hu* 21. πρὸς τὸ $\overline{\Gamma}$ AB, πρὸς τὸ τρίτον S 28. post τὸ ΔΕΖ repetunt τὸ ABS, om. Waitzius in describendo Paris. 2368, del. M

99 ξα'. Τὸ ὀκτάεδρον τοῦ κύβου μεῖζόν ἐστιν.

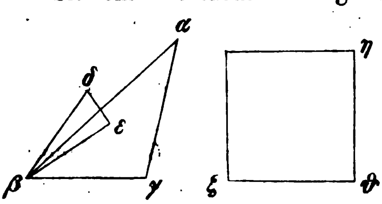
Ἔστω γὰρ ὀκταέδρου μὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, κύβου δὲ τετράγωνον τὸ ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας ἔστω κάθετος ἠγμένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὀκτὼ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἴσα ἓξ τετραγώνοις τοῖς ΖΗ, λόγος ἄρα τοῦ ΖΗ τετραγώνου πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὃν δ' πρὸς γ'. καὶ ἔστιν διὰ τὸ α' λῆμμα καθόλου παντὸς τριγώνου ἰσοπλεύρου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζον ἢ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα μεῖζόν ἐστιν ἢ ς' οἵων τὸ ἀπὸ ΖΘ δ'. τέσσαρα ἄρα πρὸς ς', τουτέστιν λς' πρὸς νδ', μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ β' λῆμμα λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ ὃν γ' πρὸς α', ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ τοῖς ἀπὸ ΒΕΔ, λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ ὃν α' πρὸς β'. τοῦ δὲ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ ὃν ς' πρὸς β' διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ ὃν α' πρὸς ς', τουτέστιν ὃν θ' πρὸς νδ'. τοῦ δὲ ἀπὸ τοῦ γ' τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ λόγος ἐστὶν ὃν α' πρὸς θ' (τὰ γὰρ μήκει τριπλάσια δυνάμει ἐνναπλάσια [καὶ τὰ μήκει ἐπίτριτα δυνάμει ἐννατά] ἐστιν)· καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου οὖν τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ λόγος ἐστὶν ὃν α' πρὸς νδ'. ἐδείχθη δὲ ὅτι λς' πρὸς νδ' μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὶ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· δι' ἴσου ἄρα λς' πρὸς α' μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ γ' τῆς ΔΕ· καὶ μήκει ἄρα ς' πρὸς α' μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὸ γ' τῆς ΔΕ. λόγος δὲ ς' τετραγώνων τῶν ΖΗ πρὸς α' ὃν ς' πρὸς α'. καὶ ἔστιν τὰ ς' τετράγωνα ἴσα η' τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ· καὶ η' ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΖΗ τετράγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ

---

1. ξα A[1] in marg. (BS) 2. τὸ om. A, add. BS 4. ἀγομένη *Ei* invitis ABS 6. ἓξ S, ς AB 9. τὸ ἀπὸ A[s] *Co*, τοῦ ἀπὸ BS cod. *Co* 10. τετράγωνον A[s] S *Co*, τετραγώνου B cod. *Co* 11. 12. τὸ ἀπὸ ΖΘΔ ABS, distinx. *Hu* (τὸ ἀπὸ ΖΘ τεσσάρων *Ei*) 17. πρὸς

LXI. Octaedrum cubo maius est. Prop. 53

Sit enim octaedri triangulum $\alpha\beta\gamma$ et cubi quadratum $\zeta\eta\vartheta$, et a centro sphaerae octaedrum comprehendentis ducta sit perpendicularis $\delta\varepsilon$ ad triangulum $\alpha\beta\gamma$, et iungantur $\delta\beta$ $\beta\varepsilon$. Iam



quia ex hypothesi octo triangula $\alpha\beta\gamma$ aequalia sunt sex quadratis $\zeta\eta\vartheta$, est igitur

$\zeta\vartheta^2 : \Delta\, \alpha\beta\gamma = 4 : 3$, *id est* $\Delta\, \alpha\beta\gamma = \frac{3}{4}\zeta\vartheta^2$. Sed propter lemma 1 est

$\beta\gamma^2 > 2\, \Delta\, \alpha\beta\gamma$; ergo

$> \frac{3}{2}\zeta\vartheta^2$, itaque $4\,\beta\gamma^2 > 6\,\zeta\vartheta^2$, *id est* (*VII propos. 16*)

$4 : 6 > \zeta\vartheta^2 : \beta\gamma^2$, id est (*VII propos. 7 extr.*)

$\beta\gamma^2 : \zeta\vartheta^2 > 54 : 36$. Et quia propter lemma 2 est

$\beta\delta^2 : \delta\varepsilon^2 = 3 : 1$, et

$\beta\delta^2 = \beta\varepsilon^2 + \varepsilon\delta^2$, *id est* $\beta\varepsilon = 2\,\varepsilon\delta^2$, est igitur

$\delta\varepsilon^2 : \varepsilon\beta^2 = 1 : 2$. Sed propter elem. 13, 12 est

$\varepsilon\beta^2 : \beta\gamma^2 = 2 : 6$; ergo *ex aequali*

$\delta\varepsilon^2 : \beta\gamma^2 = 1 : 6 = 9 : 54$. Sed est

$(\frac{1}{3}\delta\varepsilon)^2 : \delta\varepsilon^2 = 1 : 9$; ergo *ex aequali*

$(\frac{1}{3}\delta\varepsilon)^2 : \beta\gamma^2 = 1 : 54$. Sed *supra* demonstravimus esse

$\beta\gamma^2 : \zeta\vartheta^2 > 54 : 36$; ergo ex aequali

$(\frac{1}{3}\delta\varepsilon)^2 : \zeta\vartheta^2 > 1 : 36$, *id est* (*VII propos. 7 extr.*)

$36 : 1 > \zeta\vartheta^2 : (\frac{1}{3}\delta\varepsilon)^2$, itaque

$6 : 1 > \zeta\vartheta : \frac{1}{3}\delta\varepsilon$, id est, quia $6\,\zeta\vartheta^2 = 8\,\Delta\, \alpha\beta\gamma$

$8\,\Delta\, \alpha\beta\gamma : \zeta\vartheta^2 > \zeta\vartheta : \frac{1}{3}\delta\varepsilon$.

$\overline{\Delta}$ διὰ τὸ $\overline{IZ}$ A(B), *πρὸς τέσσαρα διὰ τὸ $\overline{\iota\zeta}$* S, corr. *Co* 18. *στοιχείου* ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 19. *πρὸς ϛʹ Co, πρὸς $\overline{\Gamma}$* AB, *πρὸς τρία* S 21. 22. *καὶ τὰ — ἐννατά* del. *Co* (forsitan tota parenthesis *τὰ γὰρ — ἐστιν* interpolatori tribuenda sit) 22. *ἐπίτριτα*] *τρίτα Ei ἔννατά* S, *εν̄ατα* (sine spir. et acc.) A, *ἕνατά* B 22. 23. *τοῦ τρίτου*] *τρίτου* AB, *$\overline{\gamma}$* S, *τοῦ Γʹ Ei* 29. *τῶν* add. *Ei* *πρὸς τὸ $\overline{\alpha}$* (ante *ὃν ϛʹ*) ABS, *πρὸς ἓν τῶν αὐτῶν Ei* 30. *ἴσα η* A, *ἴσα $\bar{\bar{\eta}}$* B, corr. *Co* (*ἴσα ὀκτὼ* S) *τριγώνοις τοῖς* S *Co*, *τετραγώνοις τοῖς* AB cod. *Co* *καὶ $\overline{\eta}$* A, *καὶ $\overline{\eta}'$* B (*καὶ ὀκτὼ* S)

πρὸς τὸ γ′ τῆς ΔΕ. καὶ ἔστιν ὀκτάεδρον ὀκτὼ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἐφ᾽ ὕψος τὸ γ′ τῆς ΔΕ, κύβος δὲ τὸ ΖΗ τετράγωνον ἐφ᾽ ὕψος τὴν ΘΖ· μεῖζον ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τοῦ κύβου.

100 ξβ′. Ἔστω δεῖξαι ὅτι τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ ὀκταέδρου μεῖζόν ἐστιν.

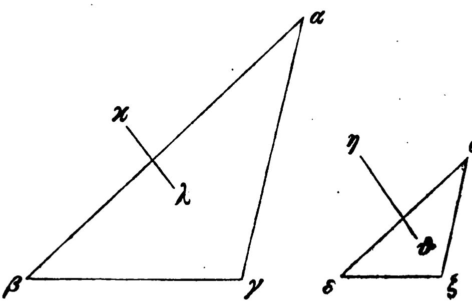
Καὶ ἔστω ὀκταέδρου μὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, εἰκοσαέδρου δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν περιλαμβανουσῶν τὰ στερεὰ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν στερεῶν κάθετοι αἱ ΗΘ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἐν τῷ ζ′ θεωρήματι τῶν προγραφομένων ὅτι δώδεκα τὰ ἀπὸ ΗΘ μείζονά ἐστιν πέντε τῶν ἀπὸ ΕΖ, πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΕΖ δύο ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΒΓ (ἐπείπερ καὶ πέντε τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἴσα ἐστὶν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ· καὶ γὰρ τετραπλάσια κ′ τρίγωνα τοῖς η′ ἴσα ἐστίν, καὶ ὡς τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως τὸ τετράγωνον πρὸς τὸ τετράγωνον τῶν ὁμοίων σχημάτων πρὸς ἄλληλα διπλασίονα λόγον ἐχόντων ἤπερ τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν), δύο δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ δώδεκά ἐστιν τὰ ἀπὸ ΚΛ (προδέδεικται γὰρ λόγος τοῦ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ ὂν ϛ′ πρὸς α′), δώδεκα ἄρα τὰ ἀπὸ ΗΘ μείζονά ἐστιν δώδεκα τῶν ἀπὸ ΚΛ· μείζων ἄρα ἡ ΘΗ τῆς ΚΛ. καὶ τὸ γ′ τῆς ΘΗ τοῦ γ′ τῆς ΚΛ μεῖζον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν εἰκοσάεδρόν ἐστιν εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἐφ᾽ ὕψος τὸ γ′ τῆς ΗΘ, τὸ δὲ ὀκτάεδρον ὀκτὼ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἐφ᾽ ὕψος τὸ γ′ τῆς ΚΛ, καὶ ἔστιν κ′ τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἴσα ὀκτὼ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, μεῖζον ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ ὀκταέδρου.

---

5. ξβον add. B(S) 9. τῶν (ante περιλαμβ.) add. Ei 10. αἱ ΗΘ ΚΛ] ἡ ΘΚΛ AB, ηθ κλ S, αἱ add. Ei 12. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΕΖ add. Ei auctore Co 18. ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρά Ei πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν add. Ei 19. ἀπὸ ΒΓ Co pro ἀπὸ ΑΒΓ προδέδεικται Hu, προδε..... A[1], Δ Ε add. A[2], unde πρὸς δε· δ′ ε′ B, προ δὲ δε S, προεδείχθη Ei, ὁ Co 22. καὶ τὸ Γ′ B, καὶ τὸ τρίτον S 22. 23. τοῦ Γ A, τοῦ Γου B, τοῦ τρίτου S 23. μείζων A, corr. BS 24. post τὸ Γ add. A τρίτον, sed id expunctum 26. 27. τοῖς ΑΒΓΔ διὰ AB, corr. S 27. μεῖζον ἄρα S, μείζονα A, μεῖζον B

Atqui octaedrum *aequale* est *prismati*, *cuius* basis $= 8\ \Delta\ \alpha\beta\gamma$ altitudoque $\frac{1}{3}\delta\varepsilon$, cubus autem est *prisma*, *cuius* basis est quadratum $\zeta\eta\vartheta$ altitudoque $\zeta\vartheta$; ergo octaedrum maius est cubo [1]).

LXII. Demonstretur icosaedrum maius esse octaedro. Prop. 54



Sit octaedri triangulum $\alpha\beta\gamma$ et icosaedri *aequalem superficiem habentis* triangulum $\delta\varepsilon\zeta$, et a centris sphaerarum ea polyedra comprehendentium ducantur ad *singula* eorum plana perpendiculares $\varkappa\lambda$ $\eta\vartheta$. Iam quia superiore lemmate 7 demonstravimus esse

$12\ \eta\vartheta^2 > 5\ \varepsilon\zeta^2$, suntque *ex hypothesi* $20\ \Delta\ \delta\varepsilon\zeta = 8\ \Delta\ \alpha\beta\gamma$, id est $5\ \Delta\ \delta\varepsilon\zeta = 2\ \Delta\ \alpha\beta\gamma$, itaque, quia *planae* figurae similes inter se sunt ut quadrata ex homologis lateribus (*elem. 6, 20 coroll. 1*),

$5\ \varepsilon\zeta^2 = 2\ \beta\gamma^2$, et, quia superiore *lemmate medio* ostendimus esse $\beta\gamma^2 : \varkappa\lambda^2 = 6 : 1$,

$2\ \beta\gamma^2 = 12\ \varkappa\lambda^2$, sunt igitur *ex aequali*

$12\ \eta\vartheta^2 > 12\ \varkappa\lambda^2$, itaque $\frac{1}{3}\ \eta\vartheta > \frac{1}{3}\ \varkappa\lambda$.

Et quia icosaedrum *aequale* est *prismati*, *cuius* basis est $= 20\ \Delta\ \delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\ \eta\vartheta$, octaedrum autem *prismati*, *cuius* basis $= 8\ \Delta\ \alpha\beta\gamma$ altitudoque $\frac{1}{3}\ \varkappa\lambda$, eaeque bases ex hypothesi aequales sunt, maius igitur est icosaedrum octaedro (*elem. 11, 31*).

1) Conf. propos. 52 extr.

101 *ξγ'. Τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ δωδεκαέδρου μεῖζόν ἐστιν.*

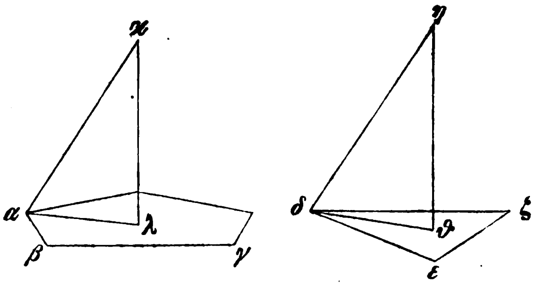
*Ἔστω γὰρ πεντάγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ ἓν τῶν τοῦ δωδεκαέδρου, τρίγωνον δὲ τὸ ΔΕΖ ἓν τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰ στερεὰ σχήματα ἐπὶ τὰ ΔΕΖ ΑΒΓ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΘ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΔ ΘΔ ΚΑ ΛΑ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἐν τῷ ιβ' θεωρήματι τῶν προγραφομένων ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε πεντά*γωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ *τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου τῷ δωδεκαέδρῳ, ὥστε ἡ ΑΛ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου, ἡ δὲ ΚΛ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος, ἡ δὲ ΚΑ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἀλλὰ καὶ τὸ ΗΘΔ τρίγωνον ὁμοίως ἐστὶν λαμβανόμενον [διὸ δὴ καὶ ὅμοιόν ἐστιν τῷ ΚΛΑ τριγώνῳ. ὡς γὰρ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς περιλαμβανούσης τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ εἰκοσάεδρον πρὸς τὴν ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ τοῦ τριγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον τὸν δεχόμενον τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΑ ἐκ κέντρου σφαίρας πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ΗΔ ἐκ κέντρου σφαίρας πρὸς ΔΘ. καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Λ Θ γωνίαι· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΚΛ τρίγωνον τῷ ΔΗΘ τριγώνῳ], καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἐν τῷ ιδ' θεωρήματι τῶν προγρα-*

---

1. $\overline{ξΓ^{ον}}$' add. B(S) 5. *ἐπὶ* S, *ἐπεὶ* AB 7. *ιβ'* *Co*, $\overline{ΙΓ}$ AB, *τρισκαιδεκάτῳ* S 8. 9. *πεντάγωνον — καὶ τὸ* add. *Co* 9. 10. *τοῦ — ἐγγραφομένου* S, *τῶν — ἐγγραφομένου* AB et, ut videtur, cod. *Co*, *τῶν — ἐγγραφομένων* coni. et *τῷ δωδεκαέδρῳ* del. *Co* 15. *διὸ δὴ* — 25. *ΔΗΘ τριγώνῳ* interpolatori tribuit *Hu* 15. *διὸ* Paris. 2368, *δει ὁ* A, *δε̃ ὸ̃* (sic) B, *δύο* S 19. *ἀλλὰ καὶ ὡς* ABS, *ὡς δὲ Ei* *ἰσοπλεύρου* vitiose interpolator, cum id aut omitti tamquam consentaneum aut ante *τριγώνου* poni oportuerit 20. *τὸ δεχόμενον* AB, corr. S 22. *πρὸς τὴν* $\overline{αλ}$ S, *πρὸς τὴν* $\overline{αγ}$ | *τὴν* $\overline{ΑΛ}$ A(B) 23. *σφαίρας — κέντρου* add. A[2] in marg. (BS) *ἡ ΗΔ* *Co* pro *ἡ* $\overline{ΕΔ}$ 24. *τοῖς* $\overline{ΛΘ}$ AB[1], distinx. B[3]S 26. *ἐν τῶι* $\overline{Δ}$ AB, *ἐν τῷ τετάρτῳ* S, corr. *Co*

LXIII. Icosaedrum maius est dodecaedro. Prop. 55

Sit enim dodecaedri pentagonum $\alpha\beta\gamma$ et icosaedri *eandem superficiem habentis* triangulum $\delta\varepsilon\zeta$, et a centris sphaerarum polyedra comprehendentium ad plana $\alpha\beta\gamma$ $\delta\varepsilon\zeta$ ducantur perpendiculares $\varkappa\lambda$ $\eta\vartheta$, et iungantur $\varkappa\alpha$ $\alpha\lambda$ $\eta\delta$ $\delta\vartheta$. Iam

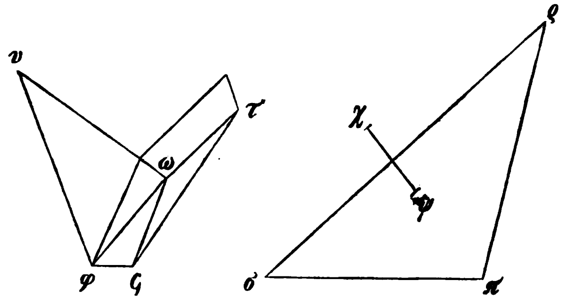


quia superiore lemmate 12 demonstravimus eundem circulum et dodecaedri pentagonum et icosaedri in eandem sphaeram inscripti triangulum comprehendere, itaque circulus, cuius radius $\alpha\lambda$, *non solum pentagonum* $\alpha\beta\gamma$, *sed etiam* icosaedri *in eandem sphaeram inscripti* triangulum (*quod quidem simile est triangulo* $\delta\varepsilon\zeta$) recipit, et $\varkappa\lambda$ perpendicularis ex centro sphaerae ad eum circulum ducta, et $\varkappa\alpha$ sphaerae radius est, et triangulum $\eta\vartheta\delta$ *prorsus* similiter constructum est[1]), tum quia superiore lemmate 14 demonstravimus esse

1) Sequitur in Graecis demonstratio quaedam hunc in modum interpretanda "quapropter triangulum $\eta\vartheta\delta$ simile est triangulo $\varkappa\lambda\alpha$; nam ut sphaerae dodecaedrum comprehendentis diametrus ad $\alpha\lambda$, ita est sphaerae icosaedrum comprehendentis ad $\delta\vartheta$. Sed ut latus trianguli aequilateri, quod in circulum qui et icosaedri triangulum et dodecaedri pentagonum recipit inscribitur, ad $\alpha\lambda$, ita est $\varepsilon\delta$ ad $\delta\vartheta$; ergo etiam ut sphaerae radius $\varkappa\alpha$ ad $\alpha\lambda$, ita est sphaerae radius $\eta\delta$ ad $\delta\vartheta$. Et anguli λ ϑ recti sunt; ergo $\Delta\, \alpha\varkappa\lambda \sim \Delta\, \delta\eta\vartheta$". Vera haec quidem sunt, sed langida et cum taedio verbosa; ac vero ipse Pappus superioribus verbis ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη — ὁμοίως ἐστὶν λαμβανόμενον satis superque similia esse triangula $\alpha\varkappa\lambda$ $\delta\eta\vartheta$ significavisse videtur; quapropter nos ista quae seclusimus ab interpolatore addita esse censemus.

φομένων ὅτι εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ, τουτέστιν δώδεκα πεντάγωνα τὰ ΑΒΓ, μείζονά ἐστιν εἴκοσι τριγώνων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον τὸν περιλαμβάνοντα τὸ ΑΒΓ πεντάγωνον, φανερὸν ὡς καὶ ὁ περὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον *κύκλος μείζων ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ πενταγώνου· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ μείζων ἐστὶν τῆς ΑΛ. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ ΔΗΘ ΑΚΛ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς ΛΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΑΛ, ἡ ΗΘ πρὸς ΚΛ. μείζων δὲ ἡ ΔΘ τῆς ΑΛ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῆς ΚΛ. καὶ τὸ τρίτον ἄρα τῆς ΗΘ τοῦ τρίτου τῆς ΚΛ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἔστιν τὸ μὲν εἰκοσάεδρον εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ΗΘ, τὸ δὲ δωδεκάεδρόν ἐστιν δώδεκα πεντάγωνα τὰ ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ΚΛ. καὶ ὑπόκειται κʹ τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ιβʹ πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓ ἴσα· μεῖζον ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ δωδεκαέδρου.*

102 ξδʹ. *Τὸ δωδεκάεδρον τοῦ ὀκταέδρου μεῖζόν ἐστιν.*



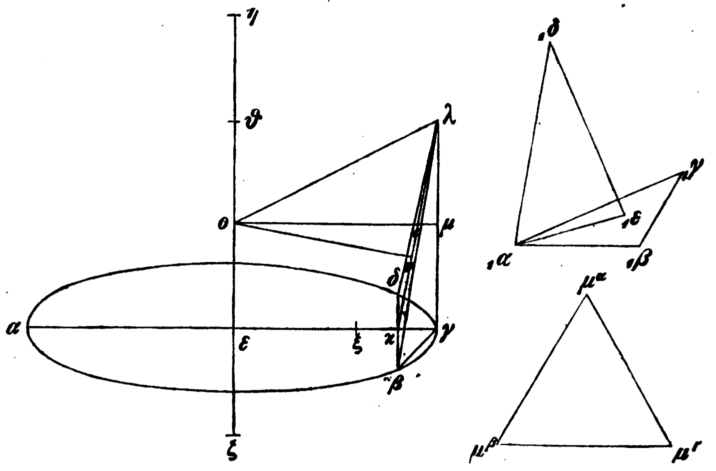
Ἔστω δωδεκαέδρου μὲν πεντάγωνον τὸ ΦϚΤ καὶ κάθετος ἡ ΥΩ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ δωδεκάεδρον ἐπὶ τὸ ΦϚΤ πεντάγωνον ἠγμένη,

---

1. *δώδεκα* BS, $\overline{\iota\beta}$ A   3. 4. *τὸ* $\overline{AB}$ *πεντάγωνον* AB, corr. S   4. *τρίγωνον* add. *Ei*   *κύκλον* AB, corr. S   5. post *πεντάγωνον* repetunt *φανερον* A (B² in marg.), sed id in A expunctum   6. *ἡ ΔΘ* Co pro *ἡ* $\overline{\Delta E}$ post *μείζων ἐστὶν* add. *ἡ* AB cod. *Co*, del. S *Co*   10. *τῆς* $\overline{\Delta\Lambda}$ *καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα* ABS, corr. *Co*   12. *ἐπίτριτον τῆς*

12 pentagona $\alpha\beta\gamma$ maiora 20 triangulis eidem circulo inscriptis, id est *ex hypothesi* 20 triangula $\delta\varepsilon\zeta$ maiora 20 triangulis circulo, qui pentagonum $\alpha\beta\gamma$ comprehendit, inscriptis, apparet circulum, qui est circa triangulum $\delta\varepsilon\zeta$, maiorem esse eo, qui est circa pentagonum $\alpha\beta\gamma$. Ergo etiam *radius* $\delta\vartheta$ maior est quam $\alpha\lambda$. Et similia sunt triangula $\delta\vartheta\eta$ $\alpha\lambda\varkappa$; ergo $\delta\vartheta : \vartheta\eta = \alpha\lambda : \lambda\varkappa$, et vicissim $\delta\vartheta : \alpha\lambda = \vartheta\eta : \lambda\varkappa$. Sed est $\delta\vartheta > \alpha\lambda$; ergo etiam $\vartheta\eta > \lambda\varkappa$, itemque $\frac{1}{3}\,\vartheta\eta > \frac{1}{3}\,\lambda\varkappa$. Atqui icosaedrum *aequale* est *prismati*, *cuius* basis $= 20$ Δ $\delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\,\vartheta\eta$, dodecaedrum autem *prismati*, *cuius* basis $= 12$ pentag. $\alpha\beta\gamma = 20$ Δ $\delta\varepsilon\zeta$ altitudoque $\frac{1}{3}\,\lambda\varkappa$; ergo icosaedrum maius est dodecaedro.

LXIV. Dodecaedrum octaedro maius est. Prop. 56



Sit dodecaedri pentagonum $\varphi\text{Ϙ}\tau$, ad quod a centro sphaerae dodecaedrum comprehendentis ducatur perpendicularis $\upsilon\omega$, et iungantur $\omega\varphi$ $\omega\text{Ϙ}$ $\omega\tau$ $\upsilon\varphi$; octaedri autem ae-

---

$\overline{H\Theta}$ *τὸ δωδεκάεδρον* ABS, corr. *Ei* auctore *Co* 13. *δώδεκα* BS, $\overline{IB}$ A 14. *κʹ Hu* auctore *Co*, $\overline{EK}$ AB(S), *εἴκοσι Ei* 16. $\overline{\xi\delta}$*ον* add. B(S) 17. *τὸ* $\Phi\text{Ϙ}T$ *Hu*, *τὸ* $\overline{\Phi YT}$ ABS, *τὸ* $\varsigma\Phi T$ *Ei* 19. *ἐπὶ τὸ* $\overline{\Phi YT}$ AB, *ἐπὶ τὸ* $\overline{\upsilon\varphi\tau}$ S, *ἐπὶ τὸ* $\varsigma\Phi T$ *Ei* *καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΩΦ ΩϚ ΩΤ ΥΦ, ὀκταέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΣΡΠ ἔστω, καὶ ὁμοίως ἡ ΧΨ κάθετος, ἣν δεῖ ἐλάσσονα δεῖξαι τῆς ΥΩ καθέτου.*

103 *Ἐκκείσθω δὲ καὶ τὸ ληφθὲν θεώρημα εἰς τὴν σύγκρισιν τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ὀκταέδρου [οὗ σημεῖον ἀστήρ], δι' οὗ ἐδείχθη δώδεκα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονα πέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ. ἔστω δὲ καὶ τὸ ͵Α͵Β͵Γ τρίγωνον εἰκοσαέδρου, καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ ͵Δ ἡ ͵Δ͵Ε, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ θεωρήματι· ὅμοιον ἄρα τὸ ΥΦΩ τῷ τε ͵Δ͵Α͵Ε τριγώνῳ καὶ τῷ ΟΝΔ [καὶ ιβʹ τὰ ἀπὸ ͵Δ͵Ε μείζονα εʹ τῶν ἀπὸ ͵Β͵Γ, τουτέστιν ιβʹ τὰ ἀπὸ ΥΩ μείζονα εʹ τῶν ἀπὸ ϚΤ.] ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ ιϛʹ λημματίου ἐδείχθη ὅτι, ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὡς τὸ ϚΩΤ ἔχον τὴν πρὸς τῷ Ω γωνίαν τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς καὶ ἰσόπλευρον ἴσον αὐτῷ ὡς τὸ $M^{\alpha}M^{\beta}M^{\gamma}$, τὸ ἀπὸ $M^{\alpha}M^{\beta}$ πρὸς τὸ ἀπὸ ϚΩ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, καὶ ἡ ΕΓ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ*

---

1. *αἱ* $\overline{\omega\varphi\omega\nu}$ $\overline{\omega}$ $\overline{\tau}$ $\overline{Υ\Phi}$ A, distinx. BS, ΩϚ corr. *Hu* (Ως *Ei*) 3. *κάθετος* AB, corr. S 5. *οὗ σημεῖον ἀστήρ* interpolatori tribuit *Co* 6. *δώδεκα* S, $\overline{IB}$ A, *δώδεκα* expunctum et *ιβ* prima manu B 7. *ἔστω* — 11. *ἀπὸ ϚΤ* om. *Ei* 7. *τὸ* ͵Α͵Β͵Γ *Hu*, *τὸ* $\overline{Γ^{\prime}\beta Ϛ}$ ABS (nisi quod *τὸ* om. S) 8. *τοῦ* $\overset{o}{\overline{ΔC}}$ *ὡς ἐν* A(S), *τοῦ* $\overline{{}^{\circ}\delta\varsigma}$ *ὡς ἐν* B, corr. *Hu* auctore *Co* 9. *τοῦ* $\overline{\Phi\Omega}$ *τῶι τε* $\overset{o}{Δ}ζ_{ε}Ϛ$ *τριγώνω* A, *τοῦ* $\overline{\varphi\omega}$ *τῷ τε* $\overset{o}{Δ}$.... *τριγώνῳ* B, *τὸ* $\overline{υϛω}$ *τῷ τε* $\overline{δζε}$ *τριγώνῳ* S, *τῷ τε* ͵Δ͵Α͵Ε corr. *Hu* (*τῷ τε* ͵Α͵Ε͵Δ voluit *Co*) 10. 11. *καὶ ιβʹ* — *ἀπὸ* ͵Β͵Γ] "vera haec quidem sunt, sed quid ad demonstrationem conferant, non video" *Co* 10. $\overline{IB}$ *τὸ ἀπὸ* $\overset{o}{Δ}Ϛς$ *μείζονα* A(B), *δώδεκα ἄρα τὰ ἀπὸ* $\overline{δεσ}$ *μείζονα* e Paris. 2368 descripsit Waitzius, $\overline{ιβ}$ *τὰ ἀπὸ* $\overline{δες}$ *μείζονα* SV, corr. *Hu* auctore *Co* 10. 11. *τῶν ἀπὸ* $\overline{{}^{\circ}BϚ}$ ABS, corr. *Hu* auctore *Co* 11. *τουτέστιν* — *ἀπὸ* ϚΤ] "corrupta haec sunt, ut opinor, neque enim vera; quare si quis ea una cum antedictis de medio tollat, fortasse non errabit" *Co* $\bar{ε}$ A, *πεντάκις* B, *πέντε* S *ἀπὸ* ϚΤ *Hu*, *ἀπὸ* $\overline{ΩΦ}$ ABS *Co* 13. *ὡς τοῦ* $\overline{ωτ}$ AB, *ὡς τὸ* $\overline{υωτ}$ S, corr. *Hu* (*ὡς τὸ* ςΩΤ *Ei*) *τῷ* $\overline{ω}$ S, *τὸ* $\overline{Ω}$ A^1B, *τῶ* $\overline{Ω}$ A^2 15. *ἀπὸ* ϚΩ *Hu*, *ἀπὸ* $\overline{ΥΩ}$ ABS (*ἀπὸ* ςΩ *Ei*) 18. *ἡ ΕΓ Co* pro *ἡ* $\overline{ΘΓ}$

qualem superficiem habentis triangulum sit $\sigma\varrho\pi$, et similiter *ducatur* perpendicularis $\chi\psi$, quam quidem minorem esse rectâ $\nu\omega$ demonstrare oportet.

Exponantur praeterea et *figura* lemmatis ad comparationem icosaedri et octaedri *praemissi* (*propos. 43*), quo demonstravimus esse $12\ o\nu^2 > 5\ \beta\delta^2$, et triangulum ${}_{,}\alpha{}_{,}\beta{}_{,}\gamma$ icosaedri *in sphaeram, cuius radius est* $\nu\varphi$, *inscripti*, atque a *centro* ${}_{,}\delta$ *ducatur* perpendicularis ${}_{,}\delta{}_{,}\varepsilon$ *iunganturque* ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha$ ${}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$, ut est in superiore theoremate (*propos. 55*); ergo similia sunt triangula $\nu\varphi\omega$ ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ $o\lambda\nu$ *). Iam quia lemmate 16 ostendimus, si sit triangulum aequicrure, velut $\text{ϙ}\omega\tau$, cuius ad ω angulus sit quattuor quintarum *partium* recti, eique aequale triangulum aequilaterum, velut $\mu^\alpha\mu^\beta\mu^\Gamma$, quadratum a $\mu^\alpha\mu^\beta$ ad quadratum ab $\omega\text{ϙ}$ minorem proportionem habere quam, si recta *quaedam* extrema ac media proportione secetur, quadratum a tota ad quintuplum quadratum a minore *parte*, et recta $\varepsilon\gamma$ extrema ac media proportione secta est in puncto ξ (*supra p. 427*), est igitur

*) Quem ad finem triangula ${}_{,}\alpha{}_{,}\beta{}_{,}\gamma$ ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ constructa sint, primo oculorum obtutu non satis liquet, ideoque non iniuria forsitan et hoc loco verba *ἔστω δὲ καὶ* cet. et infra p. 468, 4 sq. *τουτέστιν ιβʹ τὰ ἀπὸ* ${}_{,}\varDelta{}_{,}E$ *πρὸς ιεʹ τὰ ἀπὸ* ${}_{,}E{}_{,}\varDelta$ ab Eisenmanno omissa esse videantur. Sed accuratius inspicientibus hoc Graeco scriptori propositum fuisse apparet, ut figurae quaedam in sphaeris inaequalibus, quarum radii $\nu\varphi$ $o\lambda$, descriptae inter se compararentur. Iam ex hypothesi sphaerae $\nu\varphi$ circulus $\varphi\text{ϙ}\tau$ dodecaedri pentagonum, et ex constructione (propos. 48) sphaerae $o\lambda$ circulus $\lambda\delta\beta$ icosaedri triangulum comprehendit. Atqui propter propos. 48 circulus qui dodecaedri pentagonum, idem etiam icosaedri triangulum in eandem sphaeram inscripti, et vice versa recipit. Ergo comparari inter se poterant aut pentagonum $\varphi\text{ϙ}\tau$ et pentagonum circulo $\lambda\delta\beta$ inscriptum, aut triangulum circulo $\varphi\text{ϙ}\tau$ inscriptum et triangulum $\lambda\delta\beta$. Quorum alterum scriptor similiter atque in propos. 55 praetulit. Scilicet illud ${}_{,}\alpha{}_{,}\beta{}_{,}\gamma$ icosaedri triangulum propter propos. 48 simile et aequale est ei quod circulo $\varphi\text{ϙ}\tau$ inscribitur. Iam ex similitudine triangulorum ${}_{,}\alpha{}_{,}\beta{}_{,}\gamma$ $\lambda\delta\beta$ eodem modo atque in propos. 55 evincitur triangula quoque ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ $o\lambda\nu$ similia esse, tum separatim concluditur triangula quoque $\nu\varphi\omega$ ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ similia esse (quae quidem etiam aequalia sunt), denique esse $\Delta\ \nu\varphi\omega \sim \Delta\ o\lambda\nu$. Quae omnia ex veterum mathematicorum usu vix brevius absolvi poterant.

ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ $M^{\alpha}M^{\beta}$ πρὸς τὸ ἀπὸ ϛΩ, τουτέστιν τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ $M^{\alpha}M^{\beta}$ πρὸς τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ ϛΩ. καὶ ἐπεὶ ἔχομεν η΄ τρίγωνα τὰ ΣΡΠ ἴσα ιβ΄ πενταγώνοις τοῖς ΦϛΤ, τουτέστιν ξ΄ τριγώνοις τοῖς ϛΩΤ, ὥστε καὶ δύο τρίγωνα τὰ ΣΡΠ ἴσα ἐστὶν ιε΄ τριγώνοις τοῖς ϛΩΤ, τουτέστιν ιε΄ τοῖς $M^{\alpha}M^{\beta}M^{\gamma}$, ὥστε καὶ τὸ δὶς ἀπὸ ΣΠ ἴσον ἐστὶν τῷ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ $M^{\beta}M^{\gamma}$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δύο τὰ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ ΩΦ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ Ωϛ τῇ ΩΦ). δύο δὲ τὰ ἀπὸ ΣΠ ιβ΄ ἐστιν τὰ ἀπὸ ΧΨ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῇ συγκρίσει τοῦ κύβου καὶ ὀκταέδρου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε΄ τὰ ἀπὸ ΩΦ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΞΚ τῇ ΚΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ εἰκοσάκις ἀπὸ τῆς ΚΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε΄ τὰ ἀπὸ ΩΦ· ὥστε καὶ λϛ΄ τὰ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν λϛ΄ τὰ ἀπὸ ΓΛ, πρὸς ψκ΄ τὰ ἀπὸ ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε΄ τὰ ἀπὸ ΩΦ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΓΛ πρὸς ΓΚ, ἡ ΛΜ πρὸς ΙΜ, ὡς δὲ ἡ ΛΜ πρὸς ΜΙ, ἡ ΟΝ πρὸς ΝΙ· ὥστε καὶ λϛ΄ τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ψκ΄ τὰ ἀπὸ ΝΙ, τουτέστιν π΄ τὰ ἀπὸ ΙΛ (τριπλασία γὰρ ἐν τῷ ζ΄ λήμματι ἐδείχθη ἡ ΙΛ τῆς ΙΝ), τουτέστιν κ΄ τὰ ἀπὸ ΚΔ, τουτέστιν ιε΄ τὰ ἀπὸ ΒΔ (ἐπίτριτος γὰρ ἡ ΒΔ τῆς ΚΛ δυνάμει), μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε΄ τὰ ἀπὸ ΩΦ· ὥστε καὶ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ε΄ τὰ ἀπὸ ΒΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ΄ τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε΄ τὰ ἀπὸ

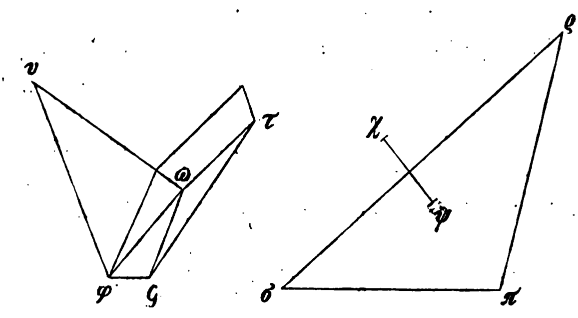
1. 2. ἀπὸ $\overline{ϛω}$ recte hoc loco ac similiter posthac ABS (ἀπὸ ϛΩ *Ei*) 2. 3. πεντεκαιδεκάκις utroque loco S, $\bar{ε}$ καὶ δεκάκις AB priore, πεντάκις καὶ δεκάκις altero loco 3. καὶ επιεχομένη τρίγωνα A(B), corr. S 3. 4. τὰ *ΣΡΠ* *Co* pro τὰ ορπ 4. ἴσαι AB, corr. S 5. 6. τὰ *ΣΡΠ* — τοῖς *ϛΩΤ* om. S 5. τὰ $\overline{ρπ}$ ἴσα A(B), corr. *Ei* auctore *Co* ἐστὶν et 6. τριγώνοις om. *Ei* 8. τὸ ἄρα *Ei* auctore *Co* pro τοῦ ἄρα 12. τὸ ἄρα — 15. τῇ *ΚΓ* om. S *Ei* 17. καὶ $\overline{λϛ}$ τὰ ἀπὸ $\overline{EI}$ AB, καὶ $\overline{δϛ}$ τὸ ἀπὸ $\overline{εη}$ Paris. 2368, καὶ $\overline{δι}$ τὸ ἀπὸ $\overline{εη}$ S, καὶ $\overline{δϛ}$ τὸ

$\varepsilon\gamma^2 : 5\ \xi\gamma^2 > \mu^\alpha\mu^{\beta 2} : \omega\text{ϛ}^2$, id est
$> 15\ \mu^\alpha\mu^{\beta 2} : 15\ \omega\text{ϛ}^2$. Et quia *ex hypothesi* habemus
$8\ \Delta\ \sigma\varrho\pi = 12$ pentag. $\varphi\text{ϛ}\tau$, id est
$= 60\ \Delta\ \text{ϛ}\omega\tau$, itaque
$2\ \Delta\ \sigma\varrho\pi = 15\ \Delta\ \text{ϛ}\omega\tau = 15\ \Delta\ \mu^\alpha\mu^\beta\mu^\Gamma$, itaque
$2\ \sigma\pi^2 = 15\ \mu^\beta\mu^{\Gamma 2}$, est igitur
$\varepsilon\gamma^2 : 5\ \xi\gamma^2 > 2\ \sigma\pi^2 : 15\ \omega\varphi^2$ (est enim $\omega\text{ϛ} = \omega\varphi$). Sed sunt $2\ \sigma\pi^2 = 12\ \chi\psi^2$, ut demonstravimus in comparatione cubi et octaedri (*propos. 53*); ergo
$\varepsilon\gamma^2 : 5\ \xi\gamma^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$. Et est $\xi\gamma = 2\ \varkappa\gamma$ (*supra p. 427*); ergo
$\varepsilon\gamma^2 : 20\ \varkappa\gamma^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$; itaque etiam 36 $\varepsilon\gamma^2$, id est (*p. 425*)
$36\ \gamma\lambda^2 : 720\ \varkappa\gamma^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$. Sed est (*p. 427*)
$\gamma\lambda : \varkappa\gamma = \mu\lambda : \iota\mu$, et, *quia triangulorum orthogoniorum $\lambda\mu\iota$ $o\nu\iota$ anguli ad verticem aequales sunt,*
$\mu\lambda : \iota\mu = \nu o : \iota\nu$; itaque
$36\ \nu o^2 : 720\ \iota\nu^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$. Sed, quia lemmate 7 (*p. 427*) demonstravimus $\iota\nu = \frac{1}{4}\ \lambda\iota = \frac{1}{8}\ \lambda\varkappa$, *et triangulum $\beta\lambda\delta$ aequilaterum est* (*p. 425*), sunt igitur $720\ \iota\nu^2 = 80\ \lambda\iota^2 = 20\ \lambda\varkappa^2$; itaque, quia *propter lemma 1 med.* est $\lambda\varkappa^2 : \beta\delta^2 = 3 : 4$,
$36\ \nu o^2 : 15\ \beta\delta^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$; itaque
$12\ \nu o^2 : 5\ \beta\delta^2 > 12\ \chi\psi^2 : 15\ \omega\varphi^2$. Sed, quia circuli circa triangulum $\beta\delta\lambda$ descripti cen-

---

ἀπὸ $\overline{\varepsilon\iota}$ V, corr. *Co*   22. *τριπλασίων Ei*   22. 23. *ἐν τῶι $\overline{\Delta}'$ λήμματι ἐδείχθη* AB, *τῷ τετάρτῳ λήμματι ἐδείχθη* S, om. *Ei*, *ζ'* corr. *Co* 24. *ἐπίτριτος — δυνάμει* in ABS post *τὰ ἀπὸ ΩΦ* inserta transposuit *Hu*   25. *ἤπερ τὰ $\overline{IB}$ τὰ* A, sed prius *τὰ* expunctum 26. *ὥστε Co* pro *τε*   *καὶ ἡ $\overline{IB}$* AS, *καὶ* | *καὶ ἡ ιβ* B, *ἡ* expunctum in Paris. 2368 V

ΩΦ. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΒΔ ιε' ἐστιν τὰ ἀπὸ ΝΛ, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' τῶν στοιχείων (τὸ γὰρ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΒΔΛ *τρίγωνον κύκλου τὸ Ν σημεῖόν ἐστιν)· καὶ ιβ' ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΛΝ, τουτέστιν ιβ' τὰ ἀπὸ ΔΕ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΕΛ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ'*



τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ΔΛΕ τρίγωνον τῷ ΥΦΩ τριγώνῳ· καὶ ιβ' ἄρα τὰ ἀπὸ ΥΩ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ιβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ· *μείζων ἄρα ἡ ΥΩ κάθετος τῆς ΧΨ καθέτου. καὶ ὑπόκεινται αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι τῶν στερεῶν σχημάτων· μεῖζον ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τοῦ ὀκταέδρου.*

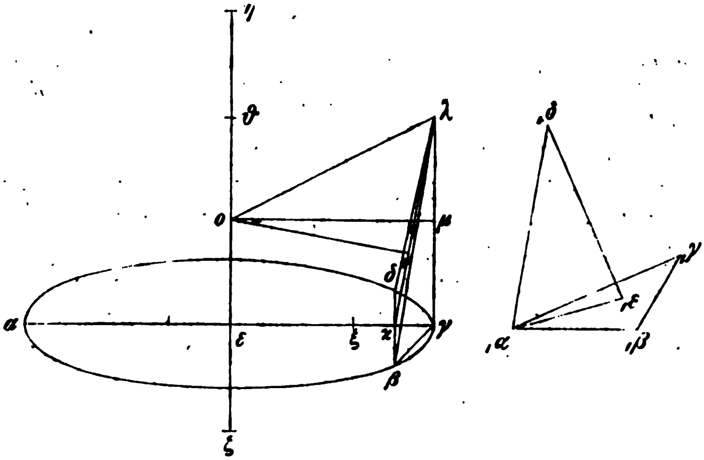
104 *ξε'. Ὅτι μὲν οὖν τῶν ε' σχημάτων τούτων ἃ δὴ καὶ πολύεδρα καλεῖται τὸ πολυεδρότερον αἰεὶ μεῖζόν ἐστιν φανερὸν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι δὲ πλείω τῶν πέντε τούτων ἀδύνατόν ἐστιν εὑρεῖν ἄλλα σχήματα ἴσοις καὶ ὁμοίοις ἰσοπλεύροις πολυγώνοις περιεχόμενα μάθοι τις ἂν καὶ οὕτως.*

105 *Πᾶσαν στερεὰν γωνίαν ἐκ τριῶν ἐλαχίστων συνεστάναι*

---

3. *ΒΔΛ* add. *Ei* 4. 5. *τουτέστιν — ἀπὸ ΕΛ* om. *Ei* *ἀπὸ Δ̊ρε πρὸς ιε τὰ ἀπὸ ρελ°* AB(S), corr. *Hu* auctore *Co* 6. 7. *τὸ ΔΛΕ*] *τὸ Λ̊ Δ̊ ἡ̊ ε* AB, *τὸ λ°δ°ς°ε* S, *τὸ ΟΛΝ Ei*, corr. *Co* 7. 8. *τὰ ἀπὸ υω* S, *τὸ ἀπὸ ΥΩ* A, *τὸ ἀπὸ υφ* B 8. 9. *μείζονα — ἀπὸ ΩΦ* add. *Co* 12. *ξε^{ον}* B, *ξΔ* A[1] in marg. (S) 13. *αἰεὶ Hu* pro *πολὺ* 18. *ἐλαχίστων* recte se habere neque vero *ἐλάχιστον* scribendum esse docet Euclides elem. 11, 21

trum est ν**), propter elem. 13, 12 sunt $5\,\beta\delta^2 = 15\,\nu\lambda^2$; ergo $12\,\nu o^2 : 15\,\nu\lambda^2$, id est *propter triangulorum* $o\lambda\nu$ ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ *similitudinem* (*supra p.* 465)



$12\,{}_{,}\delta{}_{,}\varepsilon^2 : 15\,{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon^2 > 12\,\chi\psi^2 : 15\,\omega\varphi^2$. Atqui triangula ${}_{,}\delta{}_{,}\alpha{}_{,}\varepsilon$ $\upsilon\varphi\omega$ similia sunt (*supra l. c.*); ergo $12\,\omega\upsilon^2 : 15\,\omega\varphi^2 > 12\,\chi\psi^2 : 15\,\omega\varphi^2$; itaque $\omega\upsilon > \chi\psi$.

Atqui ex hypothesi superficies dodecaedri *sphaerae, cuius centrum* υ, et octaedri *sphaerae, cuius centrum* χ, *inscriptorum* aequales sunt; ergo dodecaedrum maius est octaedro.

LXV. Harum igitur quinque figurarum, quae κατ' ἐξοχήν, *ut aiunt*, polyedra vocantur, eam semper quae plures bases habeat maiorem esse ex his quae demonstravimus liquido apparet; at praeter has quinque figuras alias plures aequalibus ac similibus polygonis aequilateris comprehensas inveniri non posse sic facile cognoscatur [1]). Prop. 57

Omnem solidum angulum ex tribus minime angulis pla-

**) Theodos. sphaer. 1, 1 coroll. 2; est enim o centrum sphaerae, in qua est circulus $\beta\delta\lambda$ (supra p. 425), et $o\nu$ perpendicularis ad circulum.

1) Conf. elem. 13, 18 scholium.

γωνιῶν ἐπιπέδων ἀναγκαῖον, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτάς, ἐάν τε τρεῖς ὦσιν ἐάν τε πλείους, τῶν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν πάντως. ὑπὸ μὲν οὖν ἑξαγώνου γωνιῶν ἤ τινος εὐθυγράμμου πολυγωνοτέρου περισχεθῆναι στερεὰν γωνίαν ἀδύνατον (αἱ γὰρ ἐλάχισται δυνάμεναι περιλαβεῖν αὐτὴν τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττους), ὑπὸ δὲ πενταγώνου τριῶν μόνων δυνατόν, ὡς καὶ συνέστηκεν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου. πάλιν δὲ τέσσαρες μὲν ἢ πλείους τετραγώνου γωνίαι περιέχειν στερεὰν γωνίαν οὐ δύνανται (τεσσάρων γὰρ ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττους), τρεῖς δὲ περιέχουσιν τὴν τοῦ κύβου. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἓξ μὲν ἢ πλείους γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττους, καὶ διὰ τοῦτο στερεὰν γωνίαν οὐ περιέχουσι, πέντε δὲ καὶ τέσσαρες καὶ τρεῖς δύνανται, καὶ περιέχεται ὑπὸ μὲν πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ τριῶν ἡ τῆς πυραμίδος. δῆλον οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων ὅτι παρὰ ταύτας οὐκ ἔστιν ἄλλη στερεὰ γωνία ἐξ ἴσων καὶ τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου συνεστηκυῖα γωνιῶν, ὥστε οὐδὲ πολύεδρον εὑρεῖν ἄλλο παρὰ τὰ προειρημένα πέντε δυνατόν ἐστιν ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων πολυγώνων περιεχόμενον.

1. *γωνίαν* AB, corr. S   4. post *πολυγωνοτέρου* add. *του* A, *τοῦ* BS, del. *Ei*   *περιενεχθῆναι* S, *περιέχεσθαι Ei*   6. *πενταγώνου Hu*, *πενταγώνων* ABS, *πενταγώνου γωνιῶν Ei*   7. *μόνων Hu*, *μενων* A(B), *μόνον* S *Ei*   18. *τοῦ αὐτοῦ Ei* pro *τὰ τοῦ*   20. in fine add. *παππου αλεξανδρεως συναγωγῆς ε̄ περιέχει δε συγκρίσεις τῶν ἴσην περίμετρον εχόντων των επιπέδων σχημάτων προσαλληλα τε και τῶν κύκλον και συγκρίσεις των ἴσην επιφάνειαν εχόντων προς αλληλα τε και τ' σφαιραν* A[3] (*τέλος τοῦ πέμπτου τῆς πάππου τοῦ ἀλεξανδρέως συναγωγῆς* B, *τέλος τοῦ ε̄' τῆς συναγωγῆς πάππου* S)

nis constare necesse est (*elem. 11 defin. 11*), et anguli *plani* qui *solidum* comprehendunt, sive tres sunt sive plures, utique quattuor rectis minores sunt (*elem. 11, 21*). Iam vero neque hexagoni angulis neque ullius figurae rectilineae plures angulos habentis angulus solidus comprehendi potest (nam tres minimi, qui continere possint, *scilicet tres hexagoni anguli,* non sunt minores quattuor rectis); at pentagoni tres anguli per se *solidum angulum comprehendere* possunt, atque id quidem fit in dodecaedro. Rursus *pentagoni aut* quadrati quattuor pluresve anguli solidum angulum *comprehendere* non possunt (neque enim minores sunt quattuor rectis); at tres *anguli quadrati* comprehendunt cubi *angulum.* Eadem denique ratione sex pluresve trianguli aequilateri anguli, quia non sunt minores quattuor rectis, angulum solidum non comprehendunt; at quinque vel quattuor vel tres possunt, et *angulis* quidem quinque icosaedri *angulus,* quattuor octaedri, tribus pyramidis *angulus* continetur. Ex his igitur quae exposuimus apparet praeter hos nullum alium solidum angulum esse, qui ex aequalibus et ad idem polygonum pertinentibus angulis constet; ergo praeter illa quinque quae diximus polyedra nullum aliud quod aequalibus ac similibus polygonis comprehendatur inveniri posse.

Typis expresserunt. Breitkopf et Härtel Lipsienses.